K METÓDAM RIEŠENIA APOLLONIOVEJ ÚLOHY

ZITA SKLENÁRIKOVÁ

Úvod

Apolloniova úloha „Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa daných troch geometrických útvarov z útvarov bod, priamka, kružnica“ (v tej istej rovine), pričom „dotyk s bodom“ znamená incidenciu, zaujíma významné postavenie v geometrii euklidovskej roviny. Existuje celkove desať možných kombinácií. Najjednoduchšie prípady nastanú, keď sú dané tri body alebo tri priamky; tieto prípady vyriešil *Euklides* vo svojich Základoch. O riešenie ďalších úloh sa zaujímali geometri všetkých čias, čo malo za následok vypracovanie rozmanitých metód riešenia. Apolloniove úlohy patria dodnes k najpríťažlivejším úlohám syntetickej geometrie.

O dotyku kružníc údajne písal už *Archimedes* ([10]). Jeho spis sa však nezachoval. Taktiež sa nezachoval dvojzväzkový pôvodný spis Apollonia z Pergy (262?–190? pred n. l.) „O dotykoch“. Zmienil sa o ňom *Pappos* okolo roku 320, podľa ktorého Apollonios vyriešil všetky úlohy s výnimkou prípadu troch kružníc.

Úlohu s tromi kružnicami riešil ako prvý *F. Viete* (1540–1603) v spise *„Apollonius Gallus“* (Paríž, r. 1600) ([1], [2], [10]). V riešení použil stredy rovnoľahlosti troch kružníc; jemu sa pripisuje ich objav, i keď sa o týchto bodoch príležitostne zmieňoval už Pappos. Výsledky nazval Viete Apolloniovými kružnicami[1]; vo všeobecnom prípade je osem výsledkov. Ak sa dané tri kružnice navzájom dotýkajú, riešenia sú dve (tzv. Soddyho[2] kružnice).

Najjednoduchšou analytickou metódou riešenia je simultánne riešenie troch kvadratických rovníc

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r \pm r_i)^2 = 0 \tag{1}$$

[1]V dnešnej terminológii pod *Apolloniovou kružnicou* prislúchajúcou usporiadanej dvojici bodov A, B a kladnému reálnemu číslu $k (k \neq 1)$ sa rozumie množina všetkých bodov X roviny, pre ktoré $|AX| : |BX| = k$.

[2]*Soddy Frederick*, Oxford. R. 1936 objavil uzavretý reťazec šiestich guľových plôch G_i („Soddys hexlet“), v ktorom plocha G_{i+1} sa dotýka plochy $G_i (i = 1, 2, \ldots 6;\ G_7 = G_1)$ a všetky plochy v reťazci sa dotýkajú daných troch guľových plôch. [11]

pre $i = 1, 2, 3$, kde (x_i, y_i) je stred a r_i polomer i-tej kružnice, (x, y) sú neznáme súradnice stredu a r neznámy polomer hľadanej kružnice pri všetkých možných kombináciách znamienok v posledných zátvorkách na ľavej strane rovníc. (Ide o kombinácie s opakovaním tretej triedy z dvoch prvkov; ich počet je $2^3 = 8$.) Umocnením výrazov v rovniciach a postupným odčítaním prvej rovnice od druhej a tretej sa dostane výsledok

$$x = \frac{b'd - bd' - b'cr + bc'r}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{-a'd + ad' + a'cr - ac'r}{ab' - a'b}, \tag{2}$$

kde $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = \pm 2(r_1 - r_2)$, $d = ({x_1}^2 + {y_1}^2 - {r_1}^2) - ({x_2}^2 + {y_2}^2 - {r_2}^2)$ a podobne sa dostanú a', b', c', d' zámenou dolného indexu 2 indexom 3. Dosadením (2) do (1) sa získa rovnica pre neznámu r. Riešenie uviedli Courant a Robbins v [2].

Syntetické metódy riešenia Apolloniovej úlohy by sme mohli rozdeliť na *elementárno-geometrické* metódy a metódy *deskriptívnogeometrické*.

1 Elementárnogeometrické metódy riešenia Apolloniovej úlohy

1.1 Metóda množín bodov

Konštrukcia stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú troch navzájom nezhodných a nesústredných kružníc sa zakladá na nasledujúcom poznatku:

Veta 1. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch nezhodných, nedotýkajúcich sa a nesústredných kružníc $k_i(S_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$, sú dve konfokálne kužeľosečky s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $|r_1 - r_2|$ a $(r_1 + r_2)$ hlavnej osi (s výnimkou nevlastných bodov kužeľosečiek a prípadných spoločných bodov daných kružníc.

Poznámka. Konštrukcia priesečníkov dvoch nenarysovaných kužeľosečiek, ktoré majú jedno ohnisko spoločné, je *euklidovská.* Možno ju vykonať napríklad:

a) Použitím homológie medzi týmito kužeľosečkami, a to jej vyjadrením ako kompozície homológií každej z kužeľosečiek s tou kružnicou k_i, ktorá má stred v spoločnom ohnisku kužeľosečiek.

b) Použitím vlastností polarity (Podľa jednej zo Steinerových viet je polárne združená krivka s kužeľosečkou, vzhľadom na určujúcu kružnicu so stredom v jednom jej ohnisku, kružnica.). Stred každého riešenia je pólom spoločnej dotyčnice polárne združených kružníc k daným kužeľosečkám vzhľadom na tú z kružníc k_i, ktorej stred je spoločným ohniskom kužeľosečiek. Obe riešenia čitateľ nájde v [5].

c) Metódou deskriptívnej geometrie možno jednoducho zostrojiť rotačnú kužeľovú plochu a na nej dve elipsy, ktoré sa premietajú kolmo do roviny určujúcej kružnice plochy do daných elíps (priemet vrcholu plochy je ich spoločným ohniskom). Hľadané priesečníky sú priemetmi priesečnice rovín zostrojených elíps s kužeľovou plochou.[3]

1.2 Metóda dilatácie

Základom konštrukcie stredu kružnice požadovanej vlastnosti je nasledujúci poznatok:

Veta 2. Stred každej kružnice dotýkajúcej sa daných troch kružníc $k_i(S_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, je za predpokladu $r_1 > r_2 > r_3$ i stredom kružnice, ktorá sa dotýka kružníc $k_1(S_1, r_1 \pm r_3)$, $k_2(S_2, r_2 \pm r_3)$ a prechádza bodom S_3. Znamienko vo výrazoch pre polomery kružníc k_1, k_2 závisí od vzájomnej polohy daných kružníc a typu dotyku s kružnicou, ktorá je riešením úlohy.

Poznámka. Konštrukcia kružnice dotýkajúcej sa daných dvoch kružníc a incidentnej s daným bodom vedie ku konštrukcii kružnice daného eliptického zväzku kružníc, ktorá sa dotýka danej kružnice (2 riešenia) ([12], [13]).

1.3 Metóda recipročných bodov dvojice kružníc

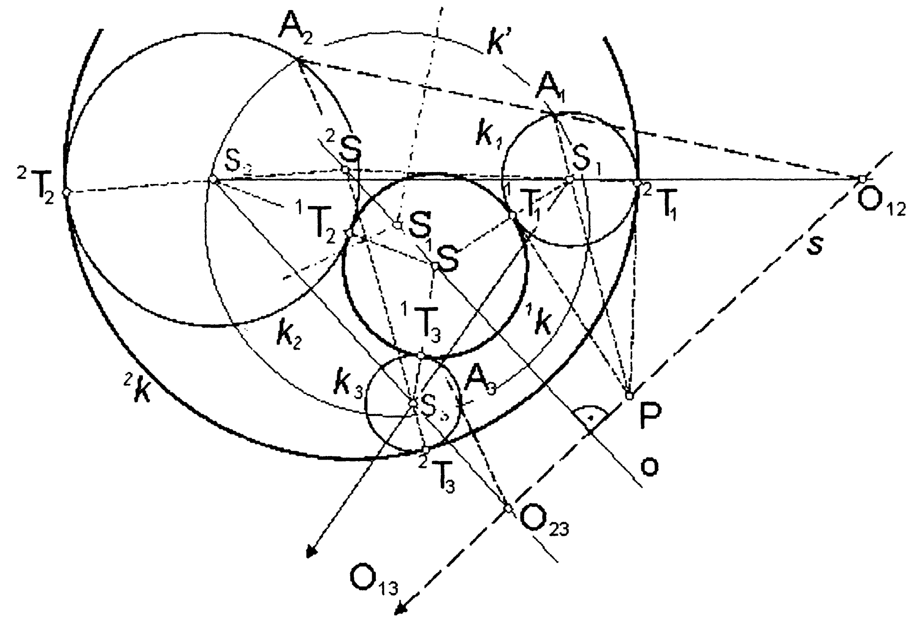
Základom konštrukcie je Mongeova veta o stredoch rovnoľahlosti troch kružníc a nasledujúca veta ([12], [13]).

Veta 3. Kružnica k sa dotýka danej dvojice kružníc k_i v bodoch T_i ($i = 1, 2$) práve vtedy, ak (T_1, T_2) je recipročná dvojica bodov kružníc ki vzhľadom na zvolený stred rovnoľahlosti týchto kružníc.

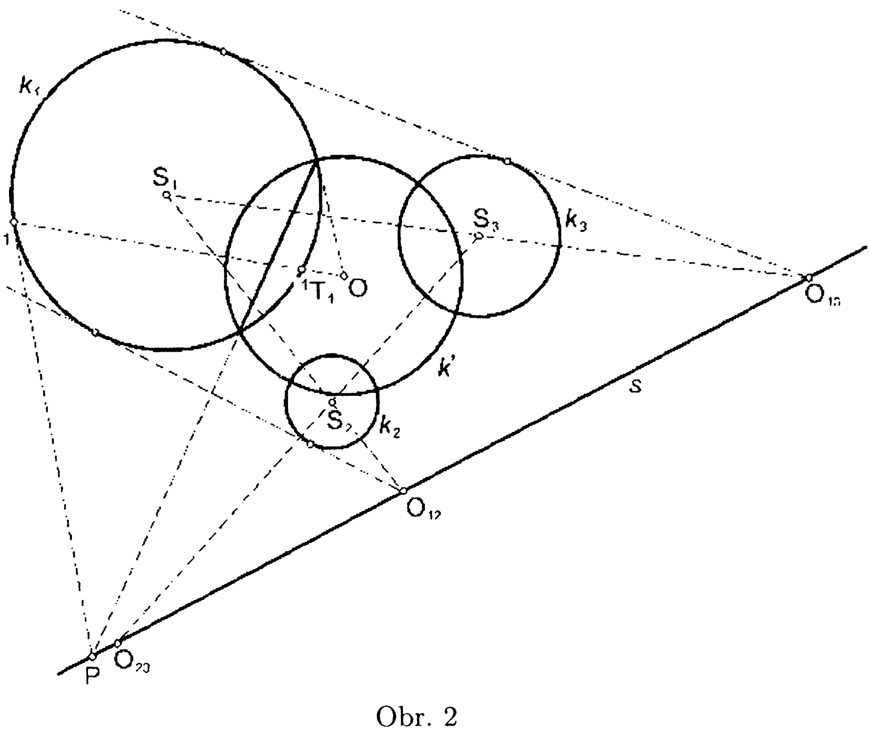
Nech $A_1, A_2; A_2, A_3$ sú ľubovoľné recipročné dvojice bodov dvojíc kružníc (k_1, k_2), (k_2, k_3) vzhľadom na zvolené stredy rovnoľahlosti O_{12} a O_{23} týchto dvojíc kružníc ležiace na osi s podobnosti daných troch kružníc a k' je kružnica incidentná s bodmi A_1, A_2, A_3. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak patrí do zväzku kružníc určeného kružnicou k' a chordálou s. Opäť ju možno zostrojiť ako kružnicu daného zväzku kružníc, ktorá sa dotýka ľubovoľnej jednej z daných kružníc; konštrukcia zaručuje i dotyk so zvyšnými dvoma kružnicami (obr. 1).

Touto metódou vyriešil Apolloniovu úlohu francúzsky geometer *Fouché*, ktorý zovšeobecnil riešenie *L. Gaultiera* z roku 1813) ([5]). Gaultier si kružnicu k' zvolil tak, aby bola ortogonálna ku všetkým daným

[3]Takto riešil úlohu o prieniku konfokálnych kužeľosečiek *R. Nemčík* (1831 - 1877) v roku 1871. [14]


A2
k'
A1
k1
2S
S2
S1
2T2
1T2
S
1S
1T1
2T1
O12
s
1T3
1k
k2
2k
k3
A3
S3
P
2T3
o
O23
O13

Obr. 1

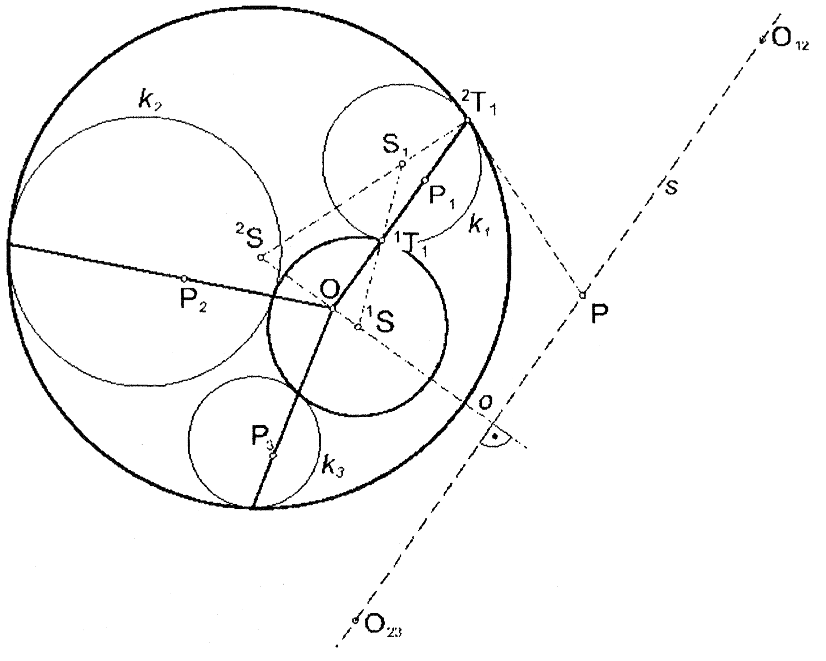

k1
S1
2T1
1T1
O
S3
k3
O13
k'
s
S2
k2
O12
P
O23

Obr. 2

kružniciam k_i $(i = 1, 2, 3)$ (obr. 2). Jeho riešenie možno interpretovať i pomocou polarity vzhľadom na niektorú z daných kružníc.

1.3 Gergonnovo riešenie[4]

Azda najelegantnejšie riešenie Apolloniovej úlohy pochádza od francúzskeho matematika *J. D. Gergonna*; [2], [3], [5]. Možno povedať, že Gergonne aplikoval na Gaultierovo riešenie úlohy poznatky o vlastnostiach polarity v rovine (vzhľadom na niektorú z daných kružníc).



Obr. 3

Vezmime si jednu z osí podobnosti týchto kružníc (s) a zostrojme jej pól P_i $(i = 1, 2, 3)$ vzhľadom na každú z kružníc k_i. Dotykové body hľadanej dvojice kružníc s kružnicami k_i ležia potom na spojniciach bodov P_i s chordálovým stredom O kružníc k_i; konštrukcia stredov kružníc

[4] *Gergonne, Joseph Diaz* (19. 6. 1771–4. 5. 1859), francúzsky matematik a astronóm. Napísal celý rad významných prác z analytickej a projektívnej geometrie, v ktorých sa zaoberal hlavne algebrickými krivkami a plochami 2. stupňa. Súčasne s Ponceletom spoznal a demonštroval význam duality v geometrii, excelentným spôsobom dokázal Pascalove vety. Známe sú pojmy Gergonnov bod, Gergonnov trojuholník; r. 1813 zaviedol Gergonne do matematiky pojem poláry. V r. 1810–1831 viedol ako hlavný vydavateľ prvý čisto matematický časopis „Annales de mathematique" a sám v ňom publikoval okolo 200 vlastných prác z geometrie, ale i z analýzy, statiky, astronómie a optiky.

je triviálna. Opakovaním postupu pre zvyšné osi podobnosti sa dostanú ďalšie tri dvojice kružníc, ktoré patria do riešenia úlohy.

Z Gaultierovho riešenia totiž vyplýva, že priamka ${}^1T_1{}^2T_1$ (polára bodu $P \in s$ vzhľadom na kružnicu k_1) prechádza bodom O (body P, O sú združené póly vzhľadom na kružnicu k_1); incidencia bodu P_1 s priamkou ${}^1T_1{}^2T_1$ je zrejmá analogicky. Navyše stredy hľadaných kružníc ležia na priamke prechádzajúcej bodom O a kolmej na priamku s, čo umožňuje vykonať konštrukciu pomocou jediného z pólov P_i $(i = 1, 2, 3)$ (obr. 3).

Spomedzi viacerých interpretácií Gergonnovho riešenia si pripomeňme analytické odvodenie konštrukcie od významného českého geometra *J. Sobotku* a interpretáciu ďalšieho českého geometra *V. Jarolímka*.

J. Sobotka (1862–1930) dokázal správnosť Gergonnovho riešenia vychádzajúc z riešenia analogického problému pre guľové plochy. V súbore prác citovaných v [5] uviedol i staršie analytické riešenie anglického geometra Caseyho z r. 1866. Sobotka navyše odvodil ďalšie súvislosti, ktoré umožňujú vykonať Gergonnovo riešenie bez rysovania pólov P_i, použitím pravouhlého trojuholníka a pravítka ([5]).

V. Jarolímek (1846–1921) použil na odvodenie konštrukcie homológiu medzi dvoma kružnicami ([7]).

1.4 Metóda kružnicovej inverzie

Kružnicová inverzia je príkladom nelineárneho involutórneho zobrazenia v euklidovskej rovine ([12], [13]). Je veľmi efektívnou metódou riešenia mnohých planimetrických úloh tak konštrukčných, ako aj dôkazových. Má značný počet ďalších aplikácií, ktoré siahajú hlboko do transformačných metód vyššej geometrie. Do geometrie bola zavedená *Stubbsom* (r. 1843, Philosophical Magasin). Názov zobrazenia pochádza od talianskeho geometra *Giusta Bellavitisa* (1809–1882) (Annali delle science del regno Lombardo Veneto, zv. VI). *Joseph Liouville*, francúzsky geometer, ju nazval transformáciou s „recipročnými sprievodičmi" (v Nouvelles Annales de Mathématiques, 1892).

Pre riešenie Apolloniovej úlohy je rozhodujúca konformnosť zobrazenia. V závislosti od vzájomnej polohy daných prvkov sú dve možnosti: buď žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod alebo sa niektoré dve z nich pretínajú, či dotýkajú. V prvom prípade možno riešiť úlohu podľa nasledujúcej vety:

Veta 4. Ku každým dvom disjunktným kružniciam k_1, k_2 existuje kružnicová inverzia, ktorá tieto kružnice zobrazí do sústredných kružníc.

Ak existuje kružnica k dotýkajúca sa kružníc k_i $(i = 1, 2, 3)$ a f je kružnicová inverzia zobrazujúca napr. kružnice k_1, k_2 do sústredných kružníc, tak $f(k) = k'$ je kružnica dotýkajúca sa sústredných kružníc

$f(k_1)$, $f(k_2)$ a kružnice $f(k_3)$. Riešenie tejto úlohy, ako aj konštrukcia kružnice $k = f^{-1}(k')$ sú triviálne.

Ak majú niektoré dve z daných kružníc spoločný bod, voľbou ľubovoľnej kružnicovej inverzie f so stredom v tomto bode sa v inverzii f zobrazia tieto kružnice do priamok. Hľadaná kružnica k je potom inverzným obrazom kružnice [priamky] dotýkajúcej sa spomenutých priamok [rovnobežnej s týmito priamkami] a kružnice, ktorá je obrazom tretej z daných kružníc vo zvolenej inverzii f.

Poznámka. V súvislosti so Gergonnovým riešením Apolloniovej úlohy z obr. 3 je zrejmé, že obe riešenia ${}^1k$, ${}^2k$ sú navzájom inverzné v kružnicovej inverzii s určujúcou kružnicou, ktorá je ortogonálna so všetkými kružnicami k_i $(i = 1, 2, 3)$, t. j. má stred v chordálovom strede O daných kružníc.

2 Deskriptívnogeometrické metódy riešenia Apolloniovej úlohy

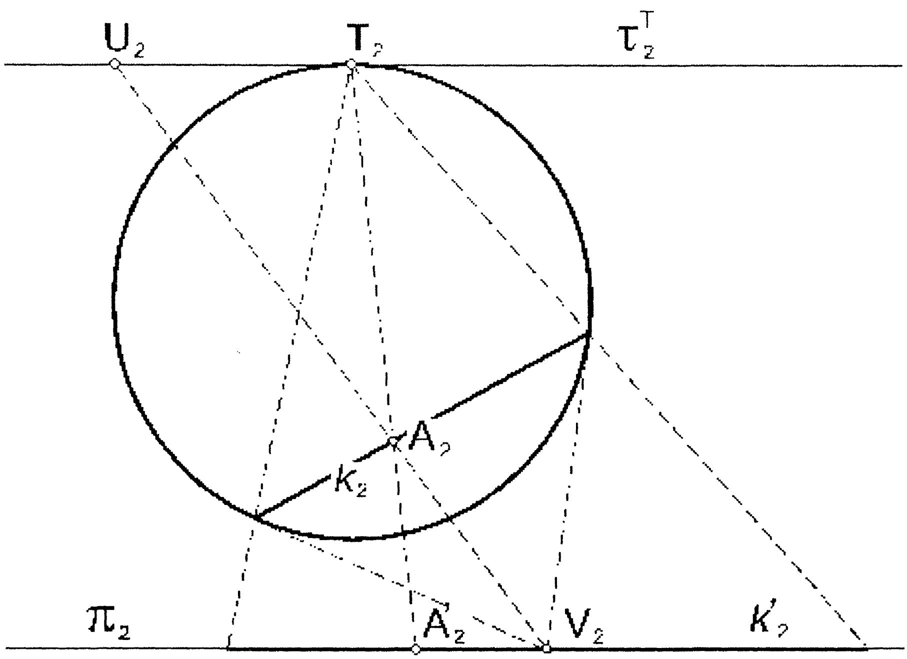
2.1 Stereografické premietanie

Myšlienka stereografického premietania sa objavila už u gréckeho astronóma *Hipparcha* (v 2. storočí pred n. l.). Vlastnosti tohto premietania použil pri konštrukcii máp zemského povrchu i nebeskej sféry *Klaudios Ptolemaios* v Alexandrii (2. storočie n. l.). Názov zobrazenia pochádza od francúzskych geometrov zo 17. storočia a za vedecké spracovanie vďačíme *M. Chaslesovi* (1793–1880). Systematicky sa stereografickému premietaniu venoval *W. Fiedler (1832–1912)*, profesor deskriptívnej geometrie na polytechnike v Zürichu. Grafickú realizáciu všetkých ôsmich riešení Apolloniovej úlohy metódou stereografického premietania čitateľ môže nájsť napr. v druhom zväzku špeciálnych prednášok *E. Müllera* ([10]).

Princípom stereografického premietania je stredové premietanie bodov danej guľovej plochy G z jedného jej bodu (T) (okrem tohto bodu) do ľubovoľnej roviny rovnobežnej s dotykovou rovinou τ^T plochy G v bode T (obr. 4). Ľahko možno dokázať, že priemetom každej kružnice guľovej plochy G, ktorá neprechádza bodom T, je v tomto premietaní kružnica.

Pre riešenie Apolloniovej úlohy je znovu rozhodujúca konformnosť zobrazenia[5]; znamená to, že obrazom dvoch dotýkajúcich sa kružníc roviny (vo vhodnom stereografickom premietaní) sú dve „dotýkajúce sa"

[5]Dôkazy vlastností stereografického premietania od *Karla Pelza* (1845–1908) (uverejnených vo *Vestníku Královské české společnosti nauk*, Praha 1898) možno nájsť v [6].



Obr. 4

kružnice tej istej guľovej plochy G, t. j. kružnice v navzájom rôznych rovinách, ktoré majú práve jeden spoločný bod (priesečnica rovín kružníc je pritom ich spoločnou dotyčnicou). Z hľadiska stereometrie k úplnému riešeniu Apolloniovej úlohy vedie konštrukcia spoločných dotykových rovín dvojíc kužeľových plôch (riešenia sú stereografickým priemetom prienikov týchto rovín s guľovou plochou G).

Poznámka. Vhodnou voľbou guľovej plochy G možno v rovine π dospieť k planimetrickým konštrukciám, ktoré predstavujú riešenia *Gaultiera, Gergonna* i *Fouchého* ([6]).[6]

2.2 Zovšeobecnenie stereografického premietania na plochu rotačného paraboloidu

Pomocou vhodnej perspektívnej kolineácie v priestore možno stereografické premietanie rozšíriť na ľubovoľnú kvadratickú rotačnú plochu (s výnimkou jednodielneho hyperboloidu). Špeciálne pre rotačný paraboloid platí, že každá elipsa alebo kružnica rotačného paraboloidu sa v pravouhlom premietaní do roviny kolmej na os plochy premieta do

[6]Dôkaz uviedol i český deskriptívny geometer *F. Machovec*, profesor karlínskej reálky r. 1879 v článku „O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii“ ([9]).

kružnice. Riešenie úlohy je analogické s riešením pomocou stereografického premietania; grafickú realizáciu riešenia čitateľ nájde napr. v [6].

2.3 Cyklografia Pod cyklografickým zobrazením rozumieme zobrazenie množiny všetkých bodov rozšíreného euklidovského priestoru na množinu orientovaných kružníc (cyklov) nákresne. Začiatky cyklografie možno nájsť v *Cousineryho*[7] *Géométrie perspéctive ou ...* (1828).

Prvý, kto systematicky spracoval zobrazenie kružníc v rovine na body priestoru bol *W. Fiedler*[8] r. 1882 v [4]. Neprekonaným dielom o cyklografii ako zobrazovacej metóde je druhý zväzok špeciálnych prednášok *Emila Müllera* pre kandidátov učiteľstva deskriptívnej geometrie na viedenskej vysokej škole technickej; kniha vyšla v spracovaní *Josefa Kramesa* r. 1929.[9] Prínosom v porovnaní s dielom Fiedlera je hlavne zavedenie orientovaných prvkov a používanie zväčša ortogonálneho premietania do roviny (namiesto stredového premietania) ([10]).

Riešenie Apolloniovej úlohy sa zakladá na nasledujúcom poznatku:

Veta 8. Cyklus X^c sa dotýka cyklov A^c, B^c, C^c práve vtedy, ak bod X (vzor cyklu X^c v cyklografickom zobrazení) je vlastným bodom prieniku troch C – kužeľových plôch K^A, K^B, K^C (s vrcholmi A, B, C).

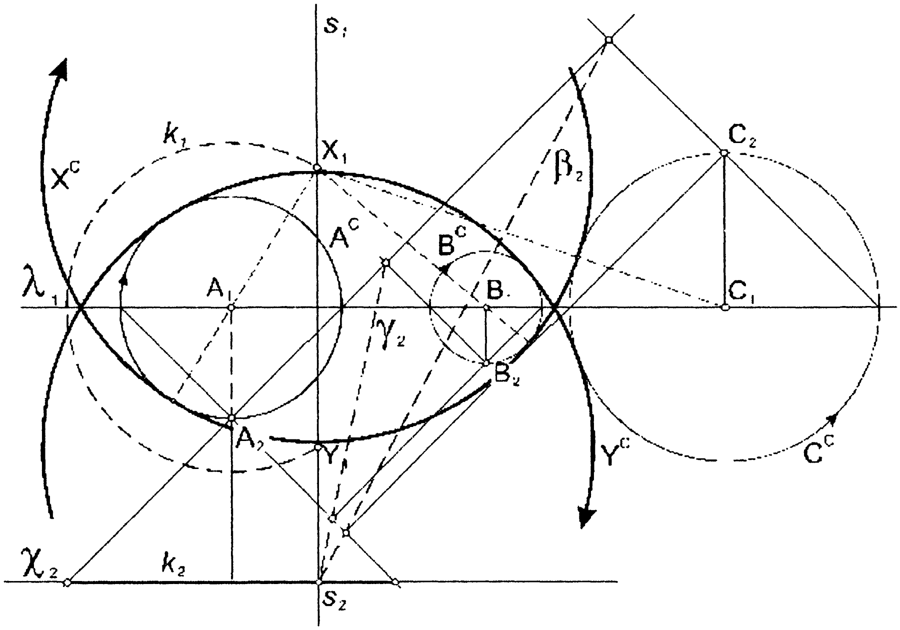
Jednoducho možno zostrojiť napr. rovinu γ vlastnej kužeľosečky prieniku $K^A \cap K^B$, rovinu β vlastnej kužeľosečky prieniku $K^A \cap K^C$, ako aj priesečnicu $s = \gamma \cap \beta$. Ak existuje cyklus X^c požadovaných vlastností, tak bod X je jedným z dvoch priesečníkov priamky s s kužeľovou plochou K^A.

---

[7] *B. E. Cousinery* (1790–1851), absolvent parížskej *École polytechnique*, hlavný inžinier správy mostov a ciest, držiteľ ceny parížskej Akadémie vied (1825) za spis, ktorý bol uverejnený pod názvom *Géométrie perspéctive ou Principes de projéction polaire appliqués a la description des corps* v Paríži r. 1828. Z hľadiska cyklografie je významná jeho stereometrická interpretácia Gergonnovho riešenia Apolloniovej úlohy; je zrejmou anticipáciou Fiedlerovej Cyklografie ([8]).

[8] *Wilhelm Fiedler* (1832, Saská Kamenica – 1912, Zürich); významný nemecký deskriptívny geometer, viac než štyridsať rokov profesor polytechniky v Zürichu vo Švajčiarsku. V diele o cyklografii [4] je ním uvedená zobrazovacia metóda vypracovaná do najmenších podrobností a jej použitie obohatené mnohými zaujímavými aplikáciami; r. 1884 berlínska Akadémia priznala dielu Steinerovu prémiu. O blahodarnom Fiedlerovom pôsobení v Prahe, kde boli jeho prednášky z geometrie polohy prvými prednáškami s touto tematikou v Rakúsku-Uhorsku, a jeho vplyve na rozvoj deskriptívnej geometrie v tejto krajine sa možno dozvedieť aj v [14].

[9] S princípom cyklografie sa možno oboznámiť v útlej knižke *Ladislava Seiferta* (1883–1956), *Cyklografie* (1949, Prometheus Praha), jedinej ucelenej publikácii venovanej cyklografickému zobrazeniu v bývalom Československu. Seifertovo dielo kopíruje prvé tri kapitoly a stručne načrtáva témy niektorých ďalších kapitol Müllerovho zväzku. Životu a dielu Emila Müllera, vrcholného predstaviteľa viedenskej geometrickej školy a posledného veľkého deskriptívneho geometra, je venovaná publikácia [15].



Obr. 5

Zaujímavé je, že grafická realizácia tohto riešenia predstavuje skvelé planimetrické Gergonnovo riešenie úlohy. Navyše má cyklografická metóda prednosť v tom, že umožňuje vykonať konštrukciu (pozoruhodne jednoduchú) aj v prípade, ak sú stredy daných troch kružníc – nositeliek cyklov – kolineárne body (obr. 5).

Literatura

[1] Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, New York 1991, s. 159

[2] Courant, R. - Robbins, H., *What is Mathematics?* Oxford Univ. P. 1996, s. 117, 125–127

[3] Dörrie, H.: , *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York 1965, s. 154–160

[4] Fiedler, W., *Cyklographie oder Construktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*, Leipzig 1882

[5] Holubář, J., *O metodách rovinných konstrukcí*, JČMF Praha, 1960

[6] Holubář, J., *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, svazek 47 JČMF Praha, 1948

[7] Jarolímek, V., *Základové geometrie polohy v rovine a v prostoru*, Česká matica technická, Praha 1918

[8] Loria, G., *Storia della Geometria Descrittiva*, Ulrico Hoepli, Milano 1921

[9] Machovec, F., *O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii.* Pátá výroční zpráva reálky karlínské, Praha 1879

[10] Müller, E. - Krames J., *Die Zyklographie*, Leipzig u. Wien, 1929

[11] Ogilvy, C. S., *Excursions in Geometry.* Dover, New York 1990, s. 48–51

[12] Perepjolkin, D. I., *Kurs elementarnoj geometrii I*, Gos. izd. techn.-teor. lit., Moskva 1948

[13] Sklenáriková, Z., Čižmár, J., *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, učebný text, Bratislava 2002

[14] Sklenáriková, Z., *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku.*, Matematika v promenách veků II, edícia Dějiny matematiky, zv. **16**, Prometheus, Praha, 2001

[15] Sklenáriková, Z., *Emil Müller - vrcholný predstaviteľ viedenskej geometrickej školy.* , G - Slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ročník 1 (2003) (v tlači)

Zita Sklenáriková
Katedra geometrie FMFI UK Bratislava
e-mail: zita.sklenarikova@fmph.uniba.sk