

Matematika v proměnách věků. III

Jaromír Šimša

Huygensovo vylepšení Archimédovy metody

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. III. (Czech).
Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. pp. [6]–31.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401592>

Terms of use:

© Výzkumné centrum pro dějiny vědy

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



ΑΡΧΙΜΗΔ

Archimédés ze Syrákús (asi 287–212 př. n. l.)

HUYGENSOVO VYLEPŠENÍ ARCHIMÉDOVY METODY

JAROMÍR ŠIMŠA

1. Úvod. *Archimédés ze Syrákús* (asi 287–212 př. n. l.), jeden z největších učenců antického Řecka, popsal ve svém díle *O měření kruhu* historicky první teoreticky podložený výpočet délky kružnice o daném poloměru. Nejprve však (pomocí dělení kruhu na malé výseče) Archimédés odvodil, že mezi obsahem S a obvodem o kruhu o poloměru R platí závislost

$$S = \frac{o \cdot R}{2}. \quad (1)$$

Z „rozměrových“ důvodů je zřejmé, že obvod kruhu o je přímo úměrný jeho poloměru R , zatímco jeho obsah S je přímo úměrný veličině R^2 :

$$o = k_1 \cdot R \quad \text{a} \quad S = k_2 \cdot R^2. \quad (2)$$

Platnost vzorce (1) je proto ekvivalentní s tvrzením, že mezi koeficienty k_1 , k_2 úměrností (2) platí vztah

$$k_1 = 2k_2.$$

Teprve 2000 let po Archimédově díle se matematikové sjednotili v názoru, která z takto geometricky významných konstant k_1 , k_2 si zaslouží vlastní označení a jméno. Vlivem prací *Leonharda Eulera* (1707–1783), jenž se v tomto ohledu inspiroval některými anglickými matematiky 17. století, definitivně zvítězila konstanta k_2 , pro kterou se vžilo označení řeckým písmenem π . Vzorce (2) se od té doby zapisují v dobře známé podobě

$$o = 2\pi R \quad \text{a} \quad S = \pi R^2. \quad (2')$$

Vidíme, že úlohy o výpočtu obvodu nebo obsahu kruhu (s daným poloměrem) jsou ekvivalentní s úlohou o výpočtu čísla π , kterému se u nás i jinde v Evropě říká též „Ludolfovo číslo“. Připomínáme si tím holandského matematika *Ludolpha van Ceulena* (1540–1610), který hodnotu čísla π stanovil na 32 desetinných míst. Dosáhl toho mnohaletými

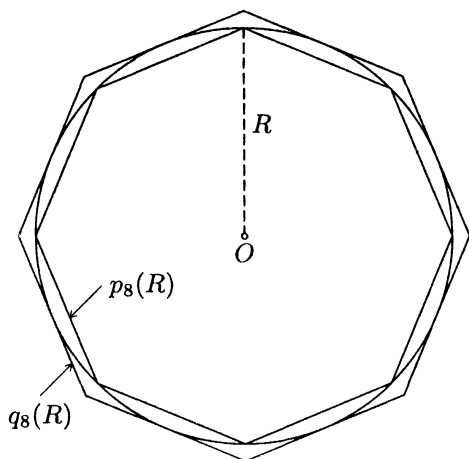
(údajně celoživotními) vytrvalými numerickými výpočty podle původního Archimédova postupu, jehož podstatu popíšeme v následujícím odstavci. V hlavní části článku pak ukážeme, že důmyslnými úvahami, které rozvinul další holandský matematik a fyzik *Christian Huygens* (1629–1695), aniž přitom překročil hranice elementární geometrie, lze Archimédův postup dále vylepšit a tím podstatně zkrátit délku výpočtů čísla π nutných k dosažení požadované přesnosti.

Dodejme, že od 18. století hledají matematikové přesnější hodnoty čísla π (které dnes známe již na desítky miliard desetinných míst) zcela jinými „negeometrickými“ prostředky, jež přinesla nová matematická disciplína zvaná *diferenciální a integrální počet*. Můžete se (nejen o tom) dočíst v knížce [1] a článkách [4], [6].

2. Archimédův postup – teorie. Co je vlastně *délka kružnice*? Odpovědět na tuto otázku s dostatečnou matematickou přesností není jednoduché. Novodobé *teoretické* pojetí délek křivých čar je založeno na myšlence, kterou poprvé vyjádřil Archimédés, když uvažoval, jak délku kružnice *prakticky* odhadnout:

Pokud do dané kružnice vepíšeme libovolný mnohoúhelník, pak jeho obvod bude menší než obvod kružnice; pokud naopak kolem kružnice mnohoúhelník opíšeme, bude jeho obvod větší než obvod kružnice.

Archimédés správně usoudil, že rozdíl mezi obvodem opsaného a vepsaného mnohoúhelníku bude tím menší, čím lépe se budou jejich hranice přibližovat dané kružnici, tedy čím kratší budou jejich jednotlivé strany. Výpočty těchto obvodů budou zřejmě nejjednodušší, omezíme-li se na *pravidelné mnohoúhelníky*. Označme proto $p_n(R)$ (resp. $q_n(R)$) obvod pravidelného n -úhelníku, který je vepsán (resp. opsán) kružnici o poloměru R .



$$p_n(R) < 2\pi R < q_n(R)$$

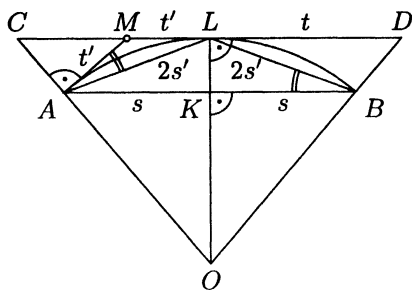
Obr. 1

Kdybychom byli dnes postaveni před úkol vypočítat $p_n(R)$, $q_n(R)$ pro různé hodnoty n , jistě bychom využili vzorce s goniometrickými funkcemi

$$p_n(R) = 2nR \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{a} \quad q_n(R) = 2nR \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (3)$$

Jak bychom si však poradili bez tabulek či kalkulátorů? Dokázali bychom (vybaveni pouze tužkou a papírem) dosti přesně vypočítat hodnoty $p_n(R)$, $q_n(R)$ pro některá n (různá od 3, 4, 6)? Kdyby tento „ztížený“ úkol bravurně nevyřešil Archimédés (způsobem, který nyní vyložíme), neměly by jeho úvahy o vepsaných a opsaných mnohoúhelnících v tehdejší době valný praktický význam. Pokud byste totiž chtěli hodnoty $p_n(R)$, $q_n(R)$ získávat měřením, museli byste pravidelné n -úhelníky rýsovat nadmíru přesně, abyste získali „hrubé“ odhady $3,1 < \pi < 3,2$.

Archimédés objevil, že ze známých hodnot obvodů $p_n(R)$ a $q_n(R)$ lze (pomocí aritmetických operací a operace určení *druhé odmocniny*) vypočítat obvody $p_{2n}(R)$ a $q_{2n}(R)$ (tedy obvody pravidelných mnohoúhelníků, které mají oproti původním mnohoúhelníkům dvojnásobný počet stran). Odvození příslušných vzorců (5) provedeme podle obr. 2, na kterém je bod O středem uvažované kružnice, její tětiva AB (o středu K a velikosti $2s$) je stranou vepsaného n -úhelníku, tětivy AL , BL (velikosti $2s'$) jsou sousedními stranami vepsaného $2n$ -úhelníku, tečná úsečka CD (o středu L a velikosti $2t$) je stranou opsaného n -úhelníku a konečně tečné úsečky AM , ML (délky t') jsou polovinami sousedních stran opsaného $2n$ -úhelníku (všechny zmíněné mnohoúhelníky jsou pravidelné).



Obr. 2

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $\triangle MAC \simeq \triangle OLC \simeq \triangle OKA$ s přihlédnutím k rovnosti $|AO| = |LO|$ plynou vztahy

$$\frac{t'}{t - t'} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|LO|}{|OC|} = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|AK|}{|CL|} = \frac{s}{t}.$$

Z rovnosti obou krajních zlomků snadno vypočteme t' pomocí s a t :

$$t' = \frac{st}{s+t}. \quad (4a)$$

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu jsou úhly ABL a LAM shodné, takže rovnoramenné trojúhelníky ABL a ALM jsou podobné, tudíž pro poměry jejich stran platí rovnost

$$\frac{2s'}{2s} = \frac{|AL|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AL|} = \frac{t'}{2s'},$$

odkud vyjádříme s' pomocí s a t' :

$$s' = \sqrt{\frac{st'}{2}}. \quad (4b)$$

Dosazením do zřejmých rovností

$$p_n(R) = 2ns, \quad q_n(R) = 2nt, \quad p_{2n}(R) = 4ns', \quad q_{2n}(R) = 4nt'$$

dostaneme již slíbené Archimédovy vzorce, které umožňují „aritmetický“ výpočet obvodů opsaného a vepsaného $2n$ -úhelníku pomocí obvodů opsaného a vepsaného n -úhelníku:

$$q_{2n}(R) = \frac{2p_n(R)q_n(R)}{p_n(R) + q_n(R)} \quad \text{a} \quad p_{2n}(R) = \sqrt{p_n(R)q_{2n}(R)} \quad (n \geq 3). \quad (5)$$

Získané vzorce jsou pozoruhodné tím, že mají tvar známých výrazů, kterým říkáme *harmonické* a *geometrické průměry*. Připomeňme, že harmonickým průměrem $H(a, b)$ a geometrickým průměrem $G(a, b)$ dvou kladných čísel a, b nazýváme hodnoty výrazů

$$H(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} \right)^{-1},$$

$$G(a, b) = \sqrt{ab}$$

a že v případě $a \neq b$ jsou tyto průměry spolu s aritmetickým průměrem čísel a, b uspořádány takto:

$$\min\{a, b\} < H(a, b) < G(a, b) < \frac{a+b}{2} < \max\{a, b\}. \quad (6)$$

Jaký početní význam vzorce (5) mají? Známe-li pro některé k hodnoty $p_k(R)$ a $q_k(R)$ (jak je tomu např. pro $k = 4$ či $k = 6$), můžeme podle

vzorců (5) postupně počítat hodnoty členů tzv. *Archimédovy rekurentní posloupnosti*

$$q_k(R), p_k(R), q_{2k}(R), p_{2k}(R), q_{4k}(R), p_{4k}(R), q_{8k}(R), p_{8k}(R), \dots \quad (7)$$

Pravidlo, podle kterého je posloupnost (7) sestavena, lze slovně vyjádřit takto:

Každý člen posloupnosti (7) (počínaje třetím) je střídavě harmonickým či geometrickým průměrem předcházejících dvou členů.

Vysvětlíme nyní, proč (přesné hodnoty) členů posloupnosti (7) poměrně rychle konvergují. Z nerovnosti $p_n(R) < q_n(R)$, rekurentních vzorců (5) a odhadů (6) plynou předně odhady

$$p_n(R) < q_{2n}(R) < \frac{p_n(R) + q_n(R)}{2} < q_n(R),$$

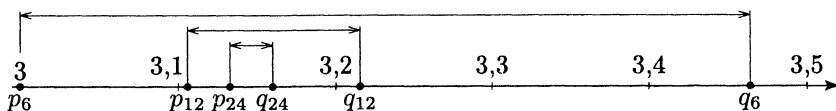
jež lze s odhadem $p_n(R) < p_{2n}(R) < q_{2n}(R)$ spojit do řetězce nerovností

$$p_n(R) < p_{2n}(R) < q_{2n}(R) < \frac{p_n(R) + q_n(R)}{2} < q_n(R). \quad (8)$$

Odtud potom plyne, že interval $\langle p_{2n}(R), q_{2n}(R) \rangle$ je vložen do intervalu $\langle p_n(R), q_n(R) \rangle$ a pro jejich délky platí

$$q_{2n}(R) - p_{2n}(R) < \frac{q_n(R) - p_n(R)}{2} \quad (n \geq 3).$$

(na obr. 3 vidíte na číselné ose první tři z těchto intervalů pro počáteční index $k = 6$ a poloměr $R = 1/2$). Poslední nerovnosti znamenají, že každá posloupnost (7) (bez ohledu na volbu počátečního indexu k) konverguje. Jak víme z geometrického významu veličin $p_n(R)$ a $q_n(R)$, limitou každé posloupnosti (7) je hledaná délka $2\pi R$.



Obr. 3

3. Archimédův postup – početní praxe. Zabývejme se nyní otázkou výpočtů členů Archimédovy rekurentní posloupnosti (7). V celém dalším textu budeme uvažovat obvody $p_n(R)$ a $q_n(R)$ pro hodnotu poloměru $R = 1/2$, neboť tehdy je délka kružnice $2\pi R$ rovna přímo číslu π . Pro

stručnost zápisů označíme $p_n = p_n(1/2)$, $q_n = q_n(1/2)$ a vzorce (5) přepíšeme do tvaru

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad \text{a} \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (n \geq 3). \quad (5')$$

Archimédův výpočet čísla π lze vystihnout následující větou.

Archimédés se zabýval určením hodnot členů posloupnosti čísel

$$q_6, p_6, q_{12}, p_{12}, q_{24}, p_{24}, q_{48}, p_{48}, q_{96}, p_{96} \quad (9)$$

a jako výsledek získal oboustranný odhad čísla π ve tvaru

$$3,14084 \dots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3,14285 \dots \quad (10)$$

Toto stručné hodnocení v nás patrně nevyvolá zvláštní obdiv k početnímu výkonu antického učenice, dokud si neuvědomíme, jaké prostředky výpočtů měl Archimédés k dispozici. Především mu chybělo to základní, bez čeho se dnes při manipulaci s číselnými údaji neobejdeme, totiž *zapisování čísel v poziční soustavě*. Naše obvyklá poziční soustava má za základ číslo 10; čísla zapsaná v desítkové soustavě můžeme podle dobře známých algoritmů písemně sčítat, odčítat, násobit a dělit na zadaný počet platných číslic, stačí mít jen trpělivost a pečlivě hlídat, abychom se v některém řádu nespletli. Někteří starší čtenáři si ze školy možná pamatují i algoritmus písemného výpočtu druhé odmocniny, potřebný při uplatnění druhého z rekurentních vzorců (5'). Archimédés mohl zapisovat (poněkud komplikovaným systémem) pouze čísla přirozená, ostatní (necelá) čísla musel vyjadřovat poměry přirozených čísel, tedy jako zlomky.

Ocenit musíme i exaktní způsob, jakým se Archimédés vypořádal s vlivem odchylek, které při přibližných výpočtech vznikají. Jeho cílem nebylo pouze získat „nějaké“ přiblížení hledaného čísla, ale stanovit konkrétní meze, ve kterých toto neznámé číslo zaručeně leží. Podle Archimédovy koncepce jsou pro číslo π takové „teoretické“ meze vyjádřeny nerovnostmi $p_n < \pi < q_n$; tyto meze jsou tím „sevrěnější“, čím je index n větší. Po přibližných výpočtech členů posloupnosti (9) budou tedy výslednými mezemi pro číslo π tyto dvě hodnoty: *dolní* odhad čísla p_{96} a *horní* odhad čísla q_{96} . Archimédés způsobem, který podrobněji popíšeme za chvíli, dosáhl odhadů

$$p_{96} > \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} \quad \text{a} \quad q_{96} < \frac{96 \cdot 153}{4673\frac{1}{2}}$$

(násobení v čitatelích jsme pouze naznačili a ve jmenovatelích jsme ponechali smíšená čísla, abychom zachovali autentičnost zlomků z Archimédovy práce). Protože takové zlomky případly Archimédovi pochopitelně nepraktické, nahradil je blízkými (ve správném „směru“) zlomky $223/71$ a $22/7$, které mají menší čitatele a jmenovatele. Můžeme jen spekulovat o tom, jak takové vhodné „náhradníky“ Archimédés objevil; jedno z možných vysvětlení, které uvedeme, spočívá na rozkladech reálných čísel do tzv. *řetězových zlomků* (viz [7]), jež hledáme pomocí Eukleidova algoritmu pro výpočet největšího společného dělitele dvou čísel:

$$\begin{aligned} p_{96} &> \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25\,344}{8\,069} = 3 + \frac{1\,137}{8\,069} = 3 + \frac{1}{\frac{8\,069}{1\,137}} = \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{110}{1\,137}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1\,137}{110}}} > \\ &> 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} = 3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{96} &< \frac{96 \cdot 153}{4\,673\frac{1}{2}} = \frac{29\,376}{9\,347} = 3 + \frac{1\,335}{9\,347} = 3 + \frac{1}{\frac{9\,347}{1\,335}} = \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{2}{\frac{1\,335}{2}}} < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}. \end{aligned}$$

Postupme v „antichronologickém“ sledování Archimédových výpočtů dále a vysvětleme, proč k získání dolního odhadu čísla p_{96} a horního odhadu čísla q_{96} potřeboval „oboustranné“ (tedy dolní i horní) odhady obou předchozích členů p_{48} a q_{48} . Vyplyne to samozřejmě z vlastností rekurentních vzorců (5'), které teď posoudíme pro obecné n . Protože harmonický průměr $H(a, b)$ je stejně jako geometrický průměr $G(a, b)$ v každé z kladných proměnných a, b rostoucí funkce, lze ze vzorců (5') získat odhady

$$\begin{aligned} D(q_{2n}) &= \frac{2D(p_n)D(q_n)}{D(p_n) + D(q_n)}, & H(q_{2n}) &= \frac{2H(p_n)H(q_n)}{H(p_n) + H(q_n)}, \\ D(p_{2n}) &= \sqrt{D(p_n)D(q_{2n})}, & H(p_{2n}) &= \sqrt{H(p_n)H(q_{2n})}, \end{aligned} \quad (11)$$

kde symbolem $D(r)$ (resp. $H(r)$) značíme libovolný kladný dolní (resp. horní) odhad kladného čísla r , tedy libovolná čísla s vlastností $0 < D(r) \leq r \leq H(r)$. Těchto zákonitostí si byl vědom i Archimédés (i když je pochopitelně nezapisoval podobnými symbolickými vzorci), takže pro členy p_{48} a q_{48} (stejně jako pro všechny předchozí členy rekurentní posloupnosti (9)) pečlivě stanovoval „jemné“ oboustranné odhady. I když do větších podrobností Archimédových výpočtů nepůjdeme (najdete je v článku [3]), upozorníme, že i vzorce (11) mají spíše teoretický ráz, neboť hodnoty pravých stran (11) (pro daná $D(p_n)$, $H(p_n)$, $D(q_n)$, $H(q_n)$) nejsme schopni většinou přesně vyčíslit, ale pouze odhadnout (požadovaným směrem).

Nezmínili jsme se dosud o významném stavebním prvku, bez kterého by Archimédés nemohl celou pyramidu výpočtů vůbec sestavit. Jsou jím výpočty druhých odmocnin, přesněji odhadování jejich hodnot pomocí vhodných zlomků. V první etapě výpočtů musel Archimédés odhadnout číslo $\sqrt{3}$, neboť obvody pravidelných šestiúhelníků jsou dány vzorci $p_6 = 3$, $q_6 = 2\sqrt{3}$ (připomínáme, že $R = 1/2$). Archimédés jistě chápal, že málo přesné odhady členu q_6 budou v průběhu výpočtů více a více přispívat ke ztrátě kvality výsledků, proto mistrovsky vybral „jemné“ a přitom poměrně jednoduché odhady

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780},$$

o jejichž přesnosti svědčí rovnost

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39\,780}.$$

Nikdy asi přesně nezjistíme, jakým postupem Archimédés našel tyto a podobné odhady odmocnin (potřebné v dalších etapách výpočtů):

$$\begin{aligned} 591\frac{1}{8} &< \sqrt{349\,450}, \\ 3\,013\frac{3}{4} &> \sqrt{9\,082\,321}, \quad 1\,172\frac{1}{8} < \sqrt{1\,373\,943\frac{9}{16}}, \\ 1\,838\frac{9}{11} &> \sqrt{3\,380\,929}, \quad 2\,339\frac{1}{4} < \sqrt{5\,472\,132\frac{1}{16}}, \\ 1\,009\frac{1}{6} &> \sqrt{1\,018\,405}, \quad 2\,017\frac{1}{4} > \sqrt{4\,069\,284\frac{1}{36}}. \end{aligned}$$

Ve výpočtech čísla π našel Archimédés řadu následovníků, kteří neúnavně rozšiřovali posloupnost (9) hledáním přibližných hodnot dalších

jejích členů. Prohlédněte si tabulku 1 přibližných hodnot čísel p_n , q_n pro několik prvních indexů tvaru $n = 3 \cdot 2^k$; čarou jsou podtrženy skupiny čísel, ve kterých se vypsané hodnoty shodují s hledaným číslem π .

n	p_n	q_n
3	2,598076211353	5,196152422706
6	<u>3,000000000000</u>	<u>3,464101615137</u>
12	<u>3,105828541230</u>	<u>3,215390309173</u>
24	<u>3,132628613281</u>	<u>3,159659942097</u>
48	<u>3,139350203046</u>	<u>3,146086215131</u>
96	<u>3,141031950890</u>	<u>3,142714599645</u>
192	<u>3,141452472285</u>	<u>3,141873049979</u>
384	<u>3,141557607911</u>	<u>3,141662747056</u>
⋮	⋮	⋮
$3 \cdot 2^{17}$	<u>3,141592653556</u>	<u>3,141592653656</u>

TABULKA 1

V posledním řádku tabulky jsme uvedli hodnoty, které roku 1593 vypočetl známý francouzský matematik *François Viète* (1540–1603). Již zmíněný Ludolph van Ceulen vyšel z počáteční hodnoty $k = 4$ (tedy z obvodů vepsaného a opsaného čtverce) a po 60 (sic!) užitích rekurentní dvojice vzorců (5') dospěl písemnými výpočty k následujícím odhadům (jež uveřejnila jeho žena až po van Ceulenově smrti v r. 1615):

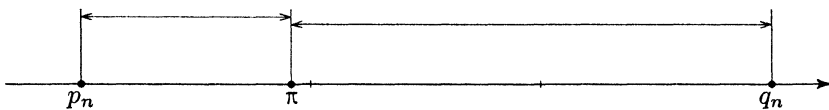
$$p_{2^{62}} > \underline{3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 39541}$$

$$q_{2^{62}} < \underline{3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 46831}.$$

Jaký to příklad nezměrné lidské vytrvalosti a píce!

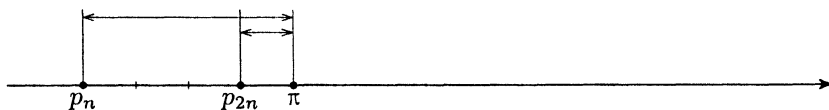
4. Snellovy hypotézy. Někteří z matematiků, kteří se v 16. a 17. století zabývali výpočtem čísla π , přemýšleli o otázce, do jaké míry by bylo možno upřesnit, ve kterých částech intervalů $\langle p_n, q_n \rangle$ hledané číslo π leží. Znali totiž v tomto směru první nadějný výsledek, který plyne z dokázaných nerovností (8):

Pro každé $n \geq 3$ je číslo π blíže číslu p_n než číslu q_n , leží tedy „v první polovině“ intervalu $\langle p_n, q_n \rangle$.



Obr. 4

Tvrzení je ilustrováno na obr. 4. Archimédovi následovníci mohli s poměrem délek těchto dvou dílů $(q_n - \pi) : (\pi - p_n)$ numericky experimentovat, neboť už znali přibližné hodnoty p_n a q_n pro desítky různých indexů n . Holanďan *Willebrord Snell* (1580–1626), kterého známe spíše z historie fyziky jako jednoho z objevitelů *zákona lomu světla*, vystavil podobným experimentům nejen poměr $(q_n - \pi) : (\pi - p_n)$, ale také poměr $(\pi - p_n) : (\pi - p_{2n})$. Tento nový poměr (délek úseků znázorněných na obr. 5) vlastně vyjadřuje, kolikrát se zkrátí rozdíl mezi obvodem kružnice a obvodem vepsaného pravidelného mnohoúhelníku, zdvojnásobíme-li počet jeho stran.



Obr. 5

Zaokrouhlené hodnoty obou zmíněných poměrů jsou vypsány v tabulce 2 a působí velice výmluvně. W. Snell proto nabył přesvědčení, že pro každé $n \geq 3$ platí nerovnosti

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \quad \text{a} \quad \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4,$$

které po „vyřešení vzhledem k neznámé π “ vedou k odhadům

$$\frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n < \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \quad (n \geq 3). \quad (12)$$

Tyto odhady Snell uveřejnil roku 1621 ve své knize *Cyclometricus*, ovšem bez přesvědčivých důkazů založených na dedukci, tedy jako „pouhé“

(závažné a velmi pravděpodobné) hypotézy.

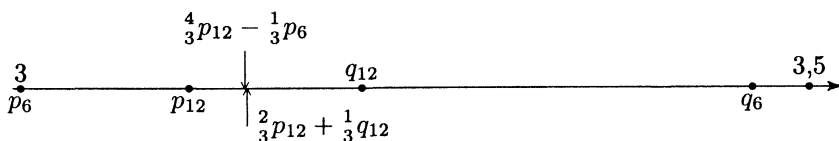
n	$(q_n - \pi)/(\pi - p_n)$	$(\pi - p_n)/(\pi - p_{2n})$
3	3,780124407	3,838592105
6	2,277723832	3,959070818
12	2,063455534	3,989731318
24	2,015529592	3,997430550
48	2,003862049	3,999357495
96	2,000964248	3,999839364
192	2,000240983	3,999959840
384	2,000060240	3,999989960
768	2,000015059	3,999997504
1536	2,000003775	3,999999415
3072	2,000000984	3,999999843

TABULKA 2

O platnosti odhadů (12) patrně nikdo ze zainteresovaných osob tehdejší doby nepochyboval. Od vydání Snellovy knihy však uplynulo 33 let, než Christian Huygens v práci *De circuli magnitudine inventa* z roku 1654 podal první „eukleidovský“ přesný, tudíž nezpochybnitelný důkaz nerovností (12). Než se s ním v následujícím oddíle seznámíme, ukažme, kolik času mohly oboustranné odhady (12) ušetřit Viětovi, van Ceulenovi i všem ostatním „ π -počtářům“ předchozích desetiletí a staletí. Hodnoty odhadů

$$D(\pi) = \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n \quad \text{a} \quad H(\pi) = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

jsou uvedeny v tabulce 3; porovnejte jejich jemnost s původními odhady $D(\pi) = p_n$ a $H(\pi) = q_n$ z tabulky 1. Působivé je též grafické porovnání obou druhů odhadů na obr. 6.



Obr. 6

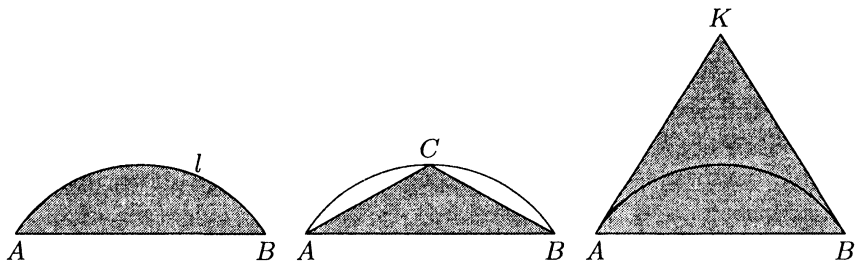
Dodejme ještě, že – díky odhadům (12) – k určení čísla π s přesností Ludolpha van Ceulena (tedy na 35 desetinných míst) stačí určit čísla p_n ,

q_n s touto přesností pro index $n = 2^{31}$, zatímco van Ceulen došel až k indexu $n = 2^{62}$. Možná by toto konstatování neznělo tak krutě, kdyby práce van Ceulena a Huygense oddělovaly stovky let, a nikoliv pouhá čtyři desetiletí 17. století.

n	$\frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n$	$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$
3	<u>3,1339745962155</u>	<u>3,4641016151377</u>
6	<u>3,1411047216403</u>	<u>3,1547005383792</u>
12	<u>3,1415619706315</u>	<u>3,1423491305446</u>
24	<u>3,1415907329687</u>	<u>3,1416390562199</u>
48	<u>3,1415925335050</u>	<u>3,1415955404083</u>
96	<u>3,1415926460837</u>	<u>3,1415928338087</u>
192	<u>3,1415926531206</u>	<u>3,1415926648502</u>
384	<u>3,1415926535604</u>	<u>3,1415926542935</u>
768	<u>3,1415926535879</u>	<u>3,1415926536337</u>
1536	<u>3,1415926535896</u>	<u>3,1415926535925</u>

TABULKA 3

4. Huygensovy důkazy. V tomto oddíle podrobně popíšeme postup, jakým Huygens dokázal nerovnosti (12). Abychom učinili výklad přehlednější, zformulujeme nejdříve klíčový poznatek, od něhož vede ke kýženému cíli (12) poměrně obvyklá cesta rutinních úvah školské planimetrie. Je jím vztah mezi obsahem kruhové úseče a obsahy dvou rovnoarmenných trojúhelníků, z nichž jeden je úsečí vepsán a druhý je úsečí opsán. Upřesníme to podle obr. 7, na němž vidíme tři exempláře téže kruhové výseče ohraničené úsečkou AB a obloukem $l = \widehat{AB}$ některé kružnice, kterému odpovídá středový úhel libovolné velikosti menší než 180° . Vrchol C vepsaného trojúhelníku ABC je střed oblouku l , vrchol K opsaného trojúhelníku ABK je průsečík tečen, které se dotýkají oblouku l v krajních bodech A a B .

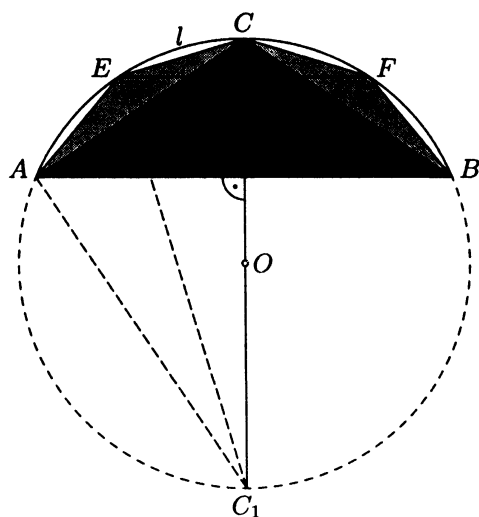


Obr. 7

Huygensovou důmyslnou metodou vysvětlíme, proč mezi obsahem S úseče a obsahy S_{ABC} a S_{ABK} obou trojúhelníků platí nerovnosti

$$\frac{4}{3}S_{ABC} < S < \frac{2}{3}S_{ABK}. \quad (13)$$

K důkazu levé nerovnosti (13) využijeme obr. 8, na kterém je oblouk l částí kružnice se středem O ; bod D značí střed tětiny AB a bod G střed rovnoběžné tětiny EF , jejíž krajní body E, F jsou středy oblouků AC, BC ; konečně bod C_1 značí bod souměrně sdružený s bodem C podle středu O .



Obr. 8

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\begin{aligned} |AB| &< |AC| + |BC| = |EF| + |EF| = 2|EF|, \\ |AC| &< |AE| + |CE| = 2|CE|. \end{aligned}$$

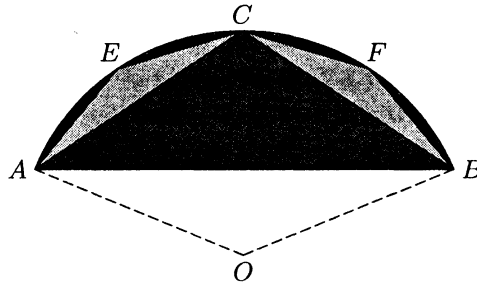
Umocníme-li druhou z těchto nerovností, pak s přihlédnutím k Eukleidově větě o odvěsně (pro pravoúhlé trojúhelníky CAC_1 a CEC_1) dostaneme

$$|CD| \cdot |CC_1| = |AC|^2 < 4|CE|^2 = 4|CG| \cdot |CC_1|,$$

odkud po krácení obdržíme nerovnost $|CD| < 4|CG|$. Ta spolu s dříve odvozenou nerovností $|AB| < 2|EF|$ umožňuje porovnat obsahy trojúhelníků ABC a EFC :

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2} < \frac{2|EF| \cdot 4|CG|}{2} = 8S_{EFC}. \quad (14)$$

Trojúhelník EFC je však shodný s každým z obou trojúhelníků ACE a CBF , které jsou vepsány do kruhových úsečí nad tětivy AC a CB stejným způsobem, jako je trojúhelník ABC vepsán do původní úseče nad tětivou AB . Proto můžeme ke každé ze dvou nových úsečí zopakovat celou konstrukci, tím získat čtyři nové úseče, k nim opět zopakovat konstrukci atd. (obr. 9). Výsledkem celé procedury bude rozklad původní úseče na spočetnou množinu trojúhelníků, složenou ze skupin $1, 2, 4, 8, \dots$ shodných trojúhelníků.



Obr. 9

Označíme-li $S_0 = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ACE} = S_{CBF}$ a obecně S_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných vepsaných trojúhelníků, pak podle (14) platí nejen $S_0 < 8S_1$, ale obecně $S_k < 8S_{k+1}$ pro každé $k \geq 0$. Obsah S původní výseče je roven součtu řady čísel

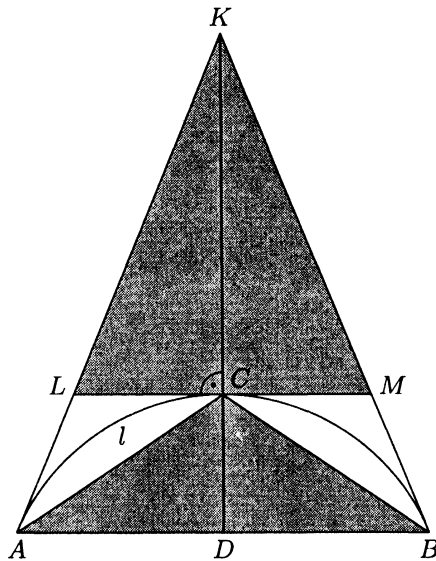
$$S = S_0 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3 + \dots + 2^k S_k + \dots,$$

ve které odhadneme všechny sčítance kromě prvního, a to právě podle odvozených nerovností $S_{k+1} > \frac{1}{8}S_k$:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + 2S_1 + 2^2 S_2 + 2^3 S_3 + \dots + 2^k S_k + \dots > \\ &> S_0 + 2 \cdot \frac{S_0}{8} + 2^2 \cdot \frac{S_1}{8} + 2^3 \cdot \frac{S_2}{8} + \dots + 2^k \cdot \frac{S_{k-1}}{8} + \dots = \\ &= S_0 + \frac{1}{4} \left(S_0 + 2S_1 + 2^2 S_2 + 2^3 S_3 + \dots + 2^k S_k + \dots \right) = S_0 + \frac{1}{4} \cdot S. \end{aligned}$$

Z nerovnosti $S > S_0 + \frac{1}{4}S$ plyne $S > \frac{4}{3}S_0$ a levá část (13) je tak dokázána.

K důkazu pravé nerovnosti (13) sestrojíme příčku LM opsaného trojúhelníku ABK , která je rovnoběžná se základnou AB a dotýká se oblouku AB ve vrcholu C vepsaného trojúhelníku ABC (obr. 10). Trojúhelník LMK nazveme *připsaným* k dané úseči nad tětivou AB .

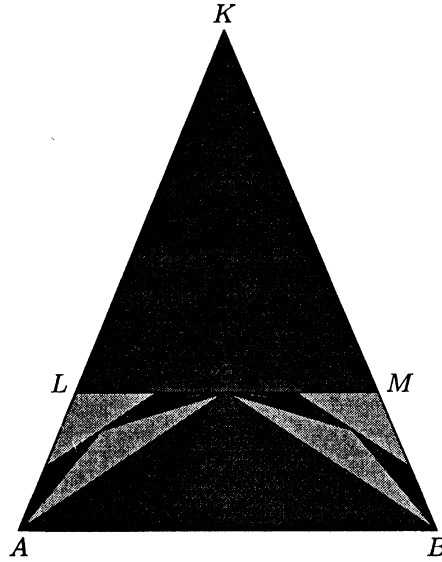


Obr. 10

Ze souměrnosti tečen LA a LC plyne rovnost $|AL| = |LC|$, z pravouhlého trojúhelníku KLC zase nerovnost $|KL| > |LC|$. Platí tudíž $|KL| > |AL|$, neboli $2|KL| > |AK|$, takže pro obsahy stejnohlých trojúhelníků ABK a LMK platí nerovnost $4S_{LMK} > S_{ABK}$. Z nerovnosti $|AL| < |LK|$ ovšem plyne i nerovnost $|CD| < |CK|$, neboli $|KD| > 2|CD|$, což je nerovnost pro výšky trojúhelníků ABK a ABC se společnou základnou AB . Pro jejich obsahy tudíž platí nerovnost $S_{ABK} > 2S_{ABC}$, která spolu s dříve odvozenou nerovností $4S_{LMK} > S_{ABK}$ vede k závěru, že obsahy trojúhelníků, které jsou na obr. 10 vybarveny, splňují vztah $4S_{LMK} > 2S_{ABC}$, neboli $S_{ABC} < 2S_{LMK}$. Které části opsaného trojúhelníku ABK zůstaly na obrázku nevybarveny? Jsou to dva shodné trojúhelníky ACL a CBM , jež jsou opsány kruhovým úsečím nad tětivy AC a CB stejným způsobem, jako je trojúhelník ABK opsán původní úsečí nad tětivou AB . Proto můžeme znovu a znovu opakovat konstrukci vepsaných a připsaných trojúhelníků; tak jako jsme již pro každé $k \geq 0$ označili S_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných vepsaných trojúhelníků ($S_0 = S_{ABC}$), označíme P_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných připsaných trojúhelníků ($P_0 = S_{LMK}$). Pro obsah S původní kruhové úseče a pro obsah S_{ABK} opsaného trojúhelníku platí podle obr. 11 rovnosti

$$\begin{aligned}
 S &= S_0 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3 + \dots + 2^k S_k + \dots, \\
 S_{ABK} - S &= P_0 + 2P_1 + 4P_2 + 8P_3 + \dots + 2^k P_k + \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

Každé dva sčítance pravých stran (15), které stojí „pod sebou“, můžeme porovnat. Jak jsme totiž dokázali, platí nejen nerovnost $S_{ABC} < 2S_{LMK}$, tedy $S_0 < 2P_0$, ale obecně $S_k < 2P_k$ pro každé $k \geq 0$. To znamená, že součet první řady v (15) je menší než dvojnásobek součtu druhé řady. Platí tedy nerovnost $S < 2(S_{ABK} - S)$, ze které již snadno plyne pravá část (13).



Obr. 11

Rozhodující část výkladu Huygensovy metody máme za sebou; ukažme nyní, že od dokázaných odhadů (13) se již poměrně rychle dostaneme k vytčenému cíli, totiž k nerovnostem (12). Vraťme se proto znovu k obr. 8 a využijme nejprve dolní odhad (13), ne však pro úseč nad tětívou AB , nýbrž pro úseč nad tětívou AC . (Zopakujme, že odhady (13) platí pro úseč s libovolným středovým úhlem menším než 180° .) Obsah S' úseče nad tětívou AC vyjádříme jako rozdíl mezi obsahem příslušné kruhové výseče (omezené úsečkami AO , CO délky R a obloukem AC) a obsahem trojúhelníku ACO :

$$S' = \frac{R \cdot |\widehat{AC}|}{2} - \frac{R \cdot |AD|}{2} = \frac{R \cdot (|\widehat{AC}| - |AD|)}{2}. \quad (16)$$

Do uvažované úseče nad tětívou AC je vepsán trojúhelník ACE , jehož obsah vyjádříme pomocí obsahu deltoidu $AECO$ (s úhlopříčkou EO délky R):

$$S_{ACE} = S_{AECO} - S_{ACO} = \frac{R \cdot |AC|}{2} - \frac{R \cdot |AD|}{2} = \frac{R \cdot (|AC| - |AD|)}{2}.$$

Dosažením obou vyjádření do dolního odhadu $\frac{4}{3}S_{ACE} < S'$ dojdeme po snadné úpravě k nerovnosti

$$|\widehat{AC}| > \frac{4}{3}|AC| - \frac{1}{3}|AD|,$$

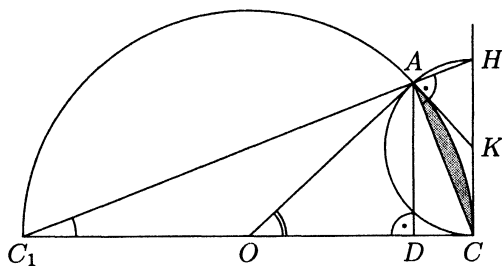
z níž po násobení dvěma dostaneme (díky symetrii podle osy CC_1) odhad

$$|\widehat{AB}| > \frac{4}{3}(|AC| + |CB|) - \frac{1}{3}|AB|.$$

Vybereme-li nyní za tětivu AB stranu pravidelného vepsaného n -úhelníku, budou AC , CB dvě sousední strany vepsaného $2n$ -úhelníku a oblouk AB bude n -tinou celé kružnice o poloměru R . Proto po násobení číslem n dostaneme z poslední nerovnosti odhad

$$2\pi R > \frac{4}{3}p_{2n}(R) - \frac{1}{3}p_n(R),$$

což je pro $R = 1/2$ levá část nerovnosti (12). K důkazu pravé části (12) využijeme horní odhad (13) pro úseč nad tětivou AC z obr. 12, ve kterém jsme kromě dříve uvažovaných bodů O , C_1 , D vyznačili též hlavní vrchol K trojúhelníku opsaného vybarvené úseči a bod H , který je průsečíkem polopřímek CK a C_1A .



Obr. 12

Podle Thaletovy věty je úhel CAC_1 (a tedy i úhel CAH) pravý, takže bod A leží na zakreslené polokružnici nad průměrem HC . Jejím středem je právě bod K , neboť opsaný trojúhelník ACK je rovnoramenný. Odtud plyne, že pro obsah deltoidu $AKCO$, který je dvojnásobkem obsahu pravoúhlého trojúhelníku KCO , platí vzorec $S_{AKCO} = |CO| \cdot |CK| = \frac{1}{2}R \cdot |HC|$. Obsah opsaného trojúhelníku ACK má tudíž vyjádření

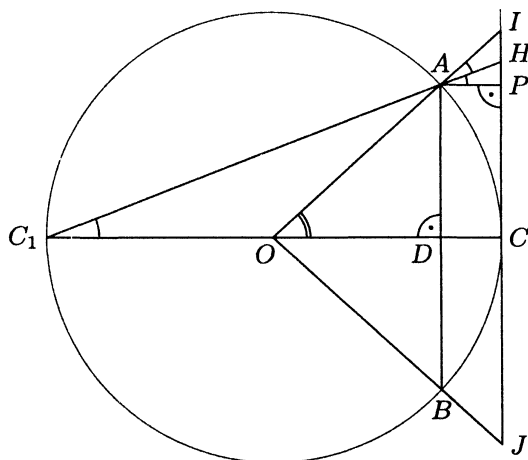
$$S_{ACK} = S_{AKCO} - S_{ACO} = \frac{R \cdot (|HC| - |AD|)}{2},$$

zatímco pro obsah S' uvažované úseče platí jako dříve vzorec (16). Po dosazení do odhadu $S' < \frac{2}{3}S_{ACK}$ tak po snadné úpravě dospějeme k nerovnosti

$$|\widehat{AC}| < \frac{1}{3}|AD| + \frac{2}{3}|HC|.$$

Vynásobíme-li poslední nerovnost dvěma a využijeme-li jako dříve symetrie podle osy CC_1 , dostaneme pro délku oblouku AB z obr. 13 horní odhad

$$|\widehat{AB}| < \frac{1}{3}|AB| + \frac{4}{3}|HC|. \quad (17)$$



Obr. 13

Do obrázku jsme ještě přikreslili průsečíky I, J polopřímek OA, OB s tečnou HC . Význam bodů I, J je jasný: bude-li výchozí tětíva AB stranou n -úhelníku vepsaného, bude tečná úsečka IJ stranou pravidelného opsaného n -úhelníku. Pravá část (12) proto bude důsledkem nerovnosti

$$|\widehat{AB}| < \frac{2}{3}|AB| + \frac{1}{3}|IJ|,$$

která vyplyne z dokázané nerovnosti (17), jakmile ukážeme, že platí

$$\frac{1}{3}|AB| + \frac{4}{3}|HC| < \frac{2}{3}|AB| + \frac{1}{3}|IJ|.$$

Provedeme to tak, že do obou stran poslední nerovnosti dosadíme vyjádření

$$|AB| = 2|PC|, \quad |HC| = |HP| + |PC| \quad \text{a} \quad |IJ| = 2(|IP| + |PC|),$$

kde P je pata kolmice z bodu A na přímku HC . Po dosazení a rutinní úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost $2|HP| < |IP|$, kterou můžeme (vzhledem k tomu, že bod H leží mezi body I a P) přepsat do tvaru $|HP| < |HI|$, ve kterém ji nyní dokážeme. Protože středový úhel COA je shodný se souhlasným úhlem PAI a příslušný obvodový úhel CC_1A je shodný se souhlasným úhlem PAH , vidíme z obr. 13, že úsečka AH leží na ose úhlu PAI . Jak víme, osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníku v poměru délek přilehlých stran, takže v pravouhlém trojúhelníku PAI platí $|HP| : |HI| = |AP| : |AI| < 1$. Tím je nerovnost $|HP| < |HI|$ ověřena a celý důkaz odhadů (12) ukončen.

5. Dörrieova metoda. Německý matematik *Heinrich Dörrie* napsal ve 30. létech dvacátého století tematicky bohatou knížku [2] o elementární matematice. Na čtyřech stránkách se v ní rovněž věnuje Archimédově metodě výpočtu čísla π : odvozuje rekurentní vzorce (5) a po letné zmínce o složitých geometrických úvahách, kterými Ch. Huygens dokázal Snellovy odhady (12), přichází s krátkým elegantním postupem vedoucím k odhadům

$$\frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n} < \pi < \sqrt[3]{p_n^2 q_n} \quad (n \geq 3). \quad (18)$$

Tento postup nyní vyložíme a pak odhady (12) a (18) navzájem porovnáme.

Z rekurentního vzorce $q_{2n} = H(p_n, q_n)$ s přihlédnutím k H-G nerovnosti $H(p_n, q_n) < G(p_n, q_n)$ získáme odhad $q_{2n}^2 = H^2(p_n, q_n) < G^2(p_n, q_n) = p_n q_n$. Po vynásobení rovností $p_{2n}^2 = p_n q_{2n}$ (viz (5)) dostaneme $p_{2n}^2 q_{2n}^2 < p_n q_{2n} \cdot p_n q_n$, neboli $p_{2n}^2 q_{2n} < p_n^2 q_n$. Hodnota výrazu $V(n) = p_n^2 q_n$ se tedy zmenší, změníme-li index n na dvojnásobný index $2n$, proto každý člen posloupnosti $(V(n))_{n=3}^\infty$ musí být větší než její limita pro $n \rightarrow \infty$, která zřejmě existuje a je rovna π^3 . Pro každé $n \geq 3$ tedy platí $p_n^2 q_n > \pi^3$, což po odmocnění dává horní odhad (18). Dolní odhad (18) zdůvodníme tak, že nejprve přepíšeme vztahy $p_{2n} = G(p_n, q_{2n})$ a $G(p_n, q_{2n}) > H(p_n, q_{2n})$ ve tvaru

$$\frac{2}{p_{2n}} = \frac{2}{G(p_n, q_{2n})} < \frac{2}{H(p_n, q_{2n})} = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_{2n}}$$

a k oběma stranám přičteme dvojnásobky převrácených stran rovnosti $q_{2n} = H(p_n, q_n)$:

$$\frac{2}{p_{2n}} + \frac{2}{q_{2n}} < \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_{2n}} \right) + \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right).$$

Odtud po odečtení zlomku $1/q_{2n}$ plyne, že pro hodnoty $W(n) = 2/p_n + 1/q_n$ platí $W(2n) < W(n)$ pro každé $n \geq 3$. Protože $W(n) \rightarrow 3/\pi$ pro $n \rightarrow \infty$, docházíme k závěru, že pro každé $n \geq 3$ platí $W(n) > 3/\pi$, tudíž

$$\pi > \frac{3}{W(n)} = \frac{3}{\frac{2}{p_n} + \frac{1}{q_n}} = \frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n}.$$

Tím je důkaz odhadů (18) Dörrieovou metodou hotov.

Možná jste si již při prvním pohledu na nerovnosti (18) uvědomili, že oba vystupující výrazy jsou známé druhy průměrů trojice čísel p_n, p_n, q_n . Připomeňme, že harmonický průměr a geometrický průměr kladných čísel a, b, c jsou – podobně jako pro dvě čísla (viz výše) – určeny vzorci

$$H(a, b, c) = \frac{3abc}{ab + bc + ac} = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}{3} \right)^{-1},$$

$$G(a, b, c) = \sqrt[3]{abc}$$

a že splňují (s výjimkou případu, kdy $a = b = c$) ostré nerovnosti

$$H(a, b, c) < G(a, b, c) < \frac{a + b + c}{3}.$$

Odhady (18) lze tedy v symbolech průměrů zapsat takto:

$$H(p_n, p_n, q_n) < \pi < G(p_n, p_n, q_n).$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ihned plyne první část následujícího tvrzení.

Horní odhad (18) je přesnější než horní odhad (12). Naopak dolní odhad (12) je přesnější než dolní odhad (18).

Druhou část předchozího tvrzení vyjadřuje nerovnost

$$\frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n > \frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n},$$

kterou nyní algebraicky dokážeme. Nejprve ji zapíšeme jako

$$4p_{2n} - \frac{p_n^2 + 11p_n q_n}{p_n + 2q_n} > 0 \quad (19)$$

a výraz z levé strany (19) vyjádříme pomocí proměnných $p = p_n$ a $\lambda > 1$, kde $\lambda = \sqrt{q_{2n}/p_n}$, takže $q_{2n} = \lambda^2 p$. Z rekurentní rovnosti $q_{2n} = H(p_n, q_n)$ vypočteme hodnotu q_n , a tak postupně zjistíme, že platí

$$q_n = \frac{p_n q_{2n}}{2p_n - q_{2n}} = \frac{\lambda^2 p}{2 - \lambda^2}, \quad p_n + 2q_n = \frac{(2 + \lambda^2)p}{2 - \lambda^2}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} = \lambda p,$$

$$p_n^2 + 11p_n q_n = \frac{2(1 + 5\lambda^2)p^2}{2 - \lambda^2}, \quad 4p_{2n} - \frac{p_n^2 + 11p_n q_n}{p_n + 2q_n} = \frac{2(\lambda - 1)^2(2\lambda - 1)p}{2 + \lambda^2}.$$

Tím je nerovnost (19) dokázána. Dodejme, že ve stejných proměnných platí

$$\frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n} - p_{2n} = \frac{3\lambda^2 p}{2 + \lambda^2} - \lambda p = \frac{\lambda(\lambda - 1)(2 - \lambda)p}{2 + \lambda^2} > 0,$$

$$q_{2n} - \left(\frac{2p_n}{3} + \frac{q_n}{3} \right) = \lambda^2 p - \left(\frac{2p}{3} + \frac{\lambda^2 p}{3(2 - \lambda^2)} \right) = \frac{(\lambda^2 - 1)(4 - 3\lambda^2)p}{3(2 - \lambda^2)} \geq 0$$

(nerovnosti $\lambda < 2$ a $3\lambda^2 \leq 4$ plynou z odhadu $\lambda^2 = q_{2n}/p_n \leq q_6/p_3 = 4/3$), takže posuzované dolní odhady čísla π jsou pro každé $n \geq 3$ uspořádány takto:

$$p_n < p_{2n} < \frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n} < \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n < \pi, \quad (20)$$

kdežto pořadí horních odhadů je pro každé $n \geq 3$ dáno nerovnostmi

$$\pi < \sqrt[3]{p_n^2 q_n} < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \leq \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} (= q_{2n}) < q_n \quad (21)$$

(rovnost v (21) nastane pouze pro $n = 3$).

Inspirováni Dörrieovou metodou, ukažme ještě na závěr tohoto oddílu, že i nejpřesnější z dolních odhadů (20) lze dokázat výlučně algebraicky z rekurentních vzorců (5). Z předchozího výkladu je jasné, že stačí dokázat nerovnost

$$\frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n < \frac{4}{3}p_{4n} - \frac{1}{3}p_{2n} \quad (n \geq 3).$$

Upravme ji ekvivalentně do tvaru

$$16p_{4n}^2 - (5p_{2n} - p_n)^2 > 0 \quad (22)$$

a pomocí dříve zavedených symbolů p a λ ($p_n = p$ a $q_{2n} = \lambda^2 p$) opět postupně počítejme:

$$\begin{aligned}
 p_{2n} &= \sqrt{p_n q_{2n}} = \lambda p, & 5p_{2n} - p_n &= (5\lambda - 1)p, \\
 q_{4n} &= \frac{2p_{2n} q_{2n}}{p_{2n} + q_{2n}} = \frac{2\lambda^2 p}{1 + \lambda}, & p_{4n}^2 &= p_{2n} q_{4n} = \frac{2\lambda^3 p^2}{1 + \lambda}, \\
 16p_{4n}^2 - (5p_{2n} - p_n)^2 &= \frac{32\lambda^3 p^2}{1 + \lambda} - (5\lambda - 1)^2 p^2 = \frac{(\lambda - 1)^2 (7\lambda - 1) p^2}{1 + \lambda} > 0
 \end{aligned}$$

(připomínáme, že $\lambda > 1$). Důkaz (22) je tak proveden.

6. Závěr – s trochou nadhledu. Jak jsme již naznačili v úvodu, díky diferenciálnímu a integrálnímu počtu mají matematikové od 17. století daleko efektivnější prostředky výpočtu čísla π , než jsou ty, které počítají s obvodem nebo obsahy mnohoúhelníků vepsaných a opsaných dané kružnici. Výpočetní metody diferenciálního počtu, které stručně nazýváme *kalkulus*, však umožňují i nově pohlédnout na zmíněnou geometrickou problematiku a projasnit nejrůznější vztahy, které jsme posuzovali v předchozích oddílech poměrně komplikovanými úvahami. Takový závěrečný nadhled teď nabízíme každému čtenáři, který je obeznámen se základy té oblasti kalkulu, jež se zabývá aproximacemi funkcí mnohočleny.

Obvody pravidelných n -úhelníků vepsaných a opsaných kružnici o poloměru R , které budeme jako dříve značit $p_n(R)$ a $q_n(R)$, můžeme odhadovat tak, že do vzorců (3) z úvodu článku, totiž

$$p_n(R) = 2nR \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{a} \quad q_n(R) = 2nR \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

dosadíme za hodnoty goniometrických funkcí jejich přiblížení pomocí Taylorových (Maclaurinových) mnohočlenů

$$\begin{aligned}
 \sin x &\doteq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \dots, \\
 \operatorname{tg} x &\doteq x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Zdůrazněme, že v pravých stranách přibližných rovností (23) stojí mnohočleny, jejichž stupeň jsme úmyslně neurčili; tečkami \dots v (23) i dalších vzorcích vyjadřujeme, že ve vypisování členů vyšších stupňů můžeme (dle potřeb konkrétní situace) pokračovat. S ohledem na rozsah i zaměření článku nebudeme diskutovat o zbytkových členech rovností (23) ani o konvergenci příslušných řad; řekněme pouze (dosti nepřesně), že

přiblížení (23) jsou tím přesnější, čím je hodnota x blíže číslu 0 a čím jsou vyšší stupně mnohočlenů, které k aproximaci vybereme.

Vzorce (23) pro hodnoty $x = \pi/n$ poskytují následující přibližná vyjádření zkoumaných čísel $p_n = p_n(1/2)$ a $q_n = q_n(1/2)$:

$$\begin{aligned} p_n &\doteq \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \frac{\pi^7}{5\,040n^6} + \frac{\pi^9}{362\,880n^8} - \dots, \\ q_n &\doteq \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \frac{17\pi^7}{315n^6} + \frac{62\pi^9}{2\,835n^8} + \dots. \end{aligned} \quad (24)$$

Všimněte si, že znaménka druhých členů v pravých stranách signalizují, že se skutečně jedná o dolní a horní odhady čísla π .

„Vyzbrojeni“ vzorci (24), ke kterým ještě připíšeme jejich verze pro hodnoty dvojnásobného indexu n

$$\begin{aligned} p_{2n} &\doteq \pi - \frac{\pi^3}{24n^2} + \frac{\pi^5}{1\,920n^4} - \frac{\pi^7}{322\,560n^6} + \frac{\pi^9}{92\,897\,280n^8} - \dots, \\ q_{2n} &\doteq \pi + \frac{\pi^3}{12n^2} + \frac{2\pi^5}{240n^4} + \frac{17\pi^7}{20\,160n^6} + \frac{62\pi^9}{725\,760n^8} + \dots, \end{aligned} \quad (24')$$

můžeme zkoumat (postupem zcela odlišným od úvah z předchozích oddílů), které výrazy sestavené z čísel p_n , q_n (případně i čísel p_{2n} , q_{2n}) přibližují číslo π lépe než tato čísla jednotlivě. Podrobně to vysvětlíme u výrazu $\alpha p_n + \beta q_n$. Jak vybrat koeficienty α , β , aby posloupnost hodnot tohoto výrazu pro $n \rightarrow \infty$ konvergovala k číslu π , a to co nejrychleji? Podle vzorců (24) dostáváme

$$\alpha p_n + \beta q_n \doteq \pi(\alpha + \beta) + \frac{(2\beta - \alpha)\pi^3}{6n^2} + \frac{(\alpha + 16\beta)\pi^5}{120n^4} + \dots,$$

takže především $\alpha p_n + \beta q_n \rightarrow \pi$, pokud $\alpha + \beta = 1$. Za tohoto předpokladu dále vidíme, že odchylka členů $\alpha p_n + \beta q_n$ od limity π bude řádu n^{-2} s výjimkou případu, kdy $2\beta - \alpha = 0$; tehdy bude řád odchylky n^{-4} . Ze soustavy rovnic

$$\alpha + \beta = 1, \quad 2\beta - \alpha = 0$$

nalezneme „optimální“ hodnoty koeficientů $\alpha = 2/3$ a $\beta = 1/3$; pro příslušný výraz $\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$ pak platí přiblížení, které uvádíme na prvním řádku následného přehledu (25).

Co je na předešlém výpočtu koeficientů α , β pozoruhodné? Přirozeným užitím kalkulu jsme velmi rychle našli přiblížení čísla π z pravé strany (12), ke kterému středověké matematiky mohly přivést pouze úmorné numerické experimenty nebo mimořádná geometrická intuice.

Obdobným postupem lze pomocí vzorců (24) a (24') vypočítat i koeficienty dalších lineárních kombinací, které optimálně (v uvedeném významu) přibližují číslo π :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n &\doteq \pi + \frac{\pi^5 n^{-4}}{20} + \dots, \\
 \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n &\doteq \pi - \frac{\pi^5 n^{-4}}{480} + \dots, \\
 \frac{4}{3}q_{2n} - \frac{1}{3}q_n &\doteq \pi - \frac{\pi^5 n^{-4}}{30} + \dots, \\
 \frac{16}{15}p_{2n} - \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{15}q_{2n} &\doteq \pi + \frac{\pi^7 n^{-6}}{6720} + \dots, \\
 \frac{64}{45}p_{4n} - \frac{4}{9}p_{2n} + \frac{1}{45}p_n &\doteq \pi + \frac{\pi^7 n^{-6}}{322560} + \dots, \\
 \frac{64}{63}p_{2n} - \frac{8}{45}p_n + \frac{52}{315}q_{2n} - \frac{1}{315}q_n &\doteq \pi - \frac{\pi^9 n^{-8}}{17920} + \dots.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Zdůrazněme, že koeficienty každé z uvedených kombinací jsou řešením soustavy (dvou až čtyř) lineárních rovnic, kterou dostaneme z požadavku, aby absolutní člen příslušného přiblížení byl roven číslu π a aby co nejvíce dalších členů mělo nulový koeficient.

Nalezneme ještě jedno optimální přiblížení čísla π , tentokrát lomeným výrazem. V souvislosti s dříve dokázanými odhady

$$\frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n} < \pi < \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$$

není bez zajímavosti určit koeficient α , při kterém posloupnost hodnot

$$h_n(\alpha) = \frac{p_n q_n}{\alpha p_n + (1 - \alpha) q_n} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

co nejrychleji konverguje k číslu π . Podle pravidel o násobení a dělení mocninných řad vypočítáme tři (nenulové) členy Taylorova rozvoje

$$h_n(\alpha) \doteq \pi + \frac{\pi^3(3\alpha - 1)n^{-2}}{6} + \frac{\pi^5(30\alpha^2 - 15\alpha + 1)n^{-4}}{120} + \dots$$

Odtud (přesněji řešením rovnice $3\alpha - 1 = 0$) usoudíme, že hledané α má právě „Dörrieovu“ hodnotu $1/3$. Pro ni platí přiblížení

$$h_n(1/3) = \frac{3p_n q_n}{p_n + 2q_n} \doteq \pi - \frac{\pi^5 n^{-4}}{180} + \dots,$$

které je užitečné porovnat s druhým přiblížením (25); srovnání obou (záporných) koeficientů u členů řádu n^{-4} je v souladu s nerovnostmi (20).

V samotném závěru upozorníme na podivuhodnou „startovní“ přesnost posledního přiblížení ze soupisu (25). Dosazením hodnot

$$p_6 = 3, q_6 \doteq 3,464\,101\,615, p_{12} \doteq 3,105\,828\,541, q_{12} \doteq 3,215\,390\,309,$$

které se od čísla π dosti značně liší, dostaneme

$$\frac{64}{63}p_{12} - \frac{8}{45}p_6 + \frac{52}{315}q_{12} - \frac{1}{315}q_6 \doteq 3,141\,591\,516.$$

Z obvodů pravidelných šestiúhelníků a dvanáctiúhelníků jsme tedy vypočetli číslo π s přesností na pět desetinných míst!

Literatura

- [1] Beckman P., *Historie čísla π* , Academia, Praha 1998.
- [2] Dörrie H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York 1965 (v německém originále: *Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur*, 5. vydání, Hirt, Breslau, 1944).
- [3] Miel G., *Of calculations past and present: The Archimedean algorithm*, American Mathematical Monthly, **90** (1983), 17–35.
- [4] Netuka I., Veselý J., *Nedávné poznatky o čísle π* , Pokroky fyziky, matematiky a astronomie, **43** (1998), (3) 217–236.
- [5] Vavilov V. *Ob odnoj formule Christiana Gjujgensa*, Kvant, 1985, 11.
- [6] Veselý J., *π aneb 3,141592653589793238462...*, Učitel matematiky **3** (1995), 1–10 a **4** (1995), 1–15.
- [7] Vít P., *Řetězové zlomky*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha, 1982.

Jaromír Šimša

Katedra matematiky PŘF MU Brno

e-mail: simsa@ipm.cz