Jindřich Bečvář
Algebra v 16. a 17. století

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. pp. 161–235.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401579

ALGEBRA V 16. A 17. STOLETÍ

JINDŘICH BEČVÁŘ

Úvod

Na přelomu 15. a 16. století došlo k významnému oživení matematického bádání. Jedním z prvních výsledků, které výrazně překročily úroveň antické matematiky, byl objev metod řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně; o něco dříve byla objevena perspektiva, dokázána divergence harmonické řady, podstatný pokrok přinášelo postupné šíření desítkové poziční soustavy a rozvoj symboliky.

Postupy vedoucí k nalezení kořenů algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně přinesly nadšení, ale i určité rozpaky a zklamání. V každém případě byly mocným podnětem pro další vývoj matematiky; vedly k uznání záporných a komplexních čísel, k intenzívnímu studiu řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů, k rozvoji abstrakce, k úvahám o rozšiřování číselných oborů, v 18. a 19. století pak k moderní algebře (základní věta algebry, zárodky teorie grup, teorie těles, Galoisova teorie atd.).

Algebraické rovnice

Algebraickou rovnicí stupně n rozumíme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ ,$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $(n \geq 1)$ jsou prvky nějakého tělesa a $a_0 \neq 0$. V tomto tělese (případně v nějakém větším) hledáme všechny prvky (tzv. *řešení* nebo *kořeny* dané rovnice), po jejichž dosazení za x rovnice přejde v rovnost. Dnes již víme, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ má v tělese komplexních čísel právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Je-li možno vyjádřit tyto kořeny vzorcem, ve kterém jsou užity jen koeficienty dané rovnice a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování, pak hovoříme o *vyjádření kořenů v radikálech*; poznamenejme, že slovo *radikál* je tradiční termín, který znamenal odmocninu. Kořeny obecné rovnice prvního až čtvrtého stupně je možno takovýmito vzorci vyjádřit.

Lineární rovnice $ax + b = 0$, kde $a \neq 0$, má řešení

$$x = -\frac{b}{a} \ .$$

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, má řešení

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

Složitějšími vzorci je možno vyjádřit i kořeny algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně. Pro rovnice vyšších stupňů však takovéto vzorce neexistují; to však bylo dokázáno až v první třetině 19. století.

Pohled do historie

Úlohy související s algebraickými rovnicemi byly řešeny již v nejstarších civilizacích; nelze však ještě v exaktním slova smyslu mluvit o rovnicích. Přesněji můžeme říci, že se lidé tehdy potýkali se slovními úlohami, které dnes obvykle řešíme algebraickými rovnicemi. Tehdy je však lidé řešili pomocí slovně popsaných postupů, jakýchsi algoritmů. V nejstarších dobách chyběla matematická symbolika, existovalo však již slovní označení pro *neznámou*. Řešeny byly jen úlohy s konkrétními čísly, neexistovalo nic podobného koeficientům. Pro takovéto úlohy však již byl vytvořen obecný algoritmus, kterým bylo možno řešit všechny úlohy téhož typu. Navíc se velmi dlouho pracovalo jen s kladnými čísly (přirozenými, resp. racionálními). Tato skutečnost podstatně komplikovala situaci; místo jediného algoritmu jich bylo třeba znát několik. Až do 16. století byly např. rozlišovány tři typy úloh, které je v dnešní symbolice možno vyjádřit následujícími kvadratickými rovnicemi s kladnými koeficienty p, q :

$$x^2 + px = q \;, \qquad x^2 + q = px \;, \qquad x^2 = px + q \;.$$

Úlohy, které vedou na lineární rovnice, se objevují už ve starém Egyptě, v Mezopotámii a staré Číně. Operace dělení, která je nejobtížnější ze čtyř základních aritmetických operací, však dělala dlouhá staletí a tisíciletí lidem potíže. Proto byly lineární úlohy řešeny nejčastěji různými modifikacemi tzv. *metody chybného předpokladu.*

Podstatu této metody pro rovnici $ax = b$ stručně přiblížíme. Za neznámou x se nejprve dosadí vhodné číslo x_1; porovnáním součinu $ax_1 = b_1$ s číslem b pak zjistíme, čím musíme číslo x_1 vynásobit, aby místo čísla b_1 vyšlo číslo b. Prokazatelně se zde objevila idea přímé úměrnosti. Efektivnost metody podstatně závisela na zadání úlohy a na konkrétním odhadu čísla x_1. Uveďme jednoduchý metodický příklad v duchu úloh ze starého Egypta.

Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15 kusů. Kolik kusů je v celé hromadě?

Úloha vede na rovnici $x + \frac{1}{4}x = 15$.

Položíme-li $x_1 = 4$, aby se dobře vypočetla jedna čtvrtina, dostaneme místo čísla 15 číslo 5. Je tedy třeba vzít třikrát tolik. Proto má hledaná hromada $3 \cdot x_1 = 3 \cdot 4 = 12$ kusů.

U složitějších úloh bylo třeba touto metodou postupovat velmi obezřetně, aby se řešitel nedostal do větších problémů s dělením. Uveďme pro zajímavost jednu úlohu ze staré egyptské matematiky (33. úloha *Rhindova papyru*).

Celá hromada, její dvě třetiny, její polovina a její sedmina dohromady dávají 37 kusů. Kolik kusů je v celé hromadě.

Úloha vede na rovnici $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$.

Položíme-li $x_1 = 42$ (společný jmenovatel), dostaneme číslo 97. Výsledkem je číslo $(42 \cdot 37) : 97 = 16\frac{2}{97}$; v egyptském vyjádření, kdy byly kromě zlomku $\frac{2}{3}$ užívány jen tzv. *kmenné zlomky*, tj. zlomky s čitatelem 1, bylo výsledkem číslo

$$16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} .$$

Povšimněme si, že klasickým postupem bychom dospěli k číslu

$$x = 37 : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) ,$$

kde dělitel je poměrně komplikovaně vyjádřené číslo. Staří Egypťané takováto čísla na jediný zlomek nepřeváděli.

Úlohy, které vedou na kvadratické rovnice, byly řešeny ve staré Mezopotámii již v 18. – 16. století př. Kr. Celý postup řešení byl opět vyjadřován slovně; odpovídá však tzv. *převedení na úplný čtverec*, které známe již ze základní školy. Často se vyskytovaly úlohy, které můžeme v dnešní symbolice vyjádřit soustavou rovnic

$$x + y = a , \qquad xy = b .$$

Slovní popis řešení této úlohy odpovídá následujícímu symbolickému řešení, ve kterém je zavedena nová neznámá z.

$$x = \frac{a}{2} + z , \qquad y = \frac{a}{2} - z ,$$

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b ,$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = b ,$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} ,$$

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} , \qquad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} .$$

Ve starém Řecku byly problémy vedoucí na kvadratické rovnice formulovány a řešeny v rámci tzv. *řecké geometrické algebry.* Tyto problémy měly spíše teoretický charakter, souvisely s tzv. metodami *přikládání ploch.*[1]

Arabská matematika v oblasti kvadratických rovnic do značné míry využila postupy mezopotámské a řecké matematiky. Na konkrétní úloze byl slovně popsán obecný algoritmus řešení takovéto úlohy a obrázkem bylo podáno geometrické zdůvodnění. Všechny tyto metody jsou přesně vystiženy výše uvedeným známým vzorcem pro $x_{1,2}$.

[1] Viz J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky*, Historie matematiky I, JČMF, Brno 1994, str. 20–101.

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádžúsí (780?–850?) provedl v knize *Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wal-muqábala* (*Krátká kniha o počtu algebry a almukabaly*) klasifikaci úloh vedoucích na lineární a kvadratické rovnice. Pracoval pouze s kladnými čísly, proto rozlišil rovnice následujících šesti typů a demonstroval je na konkrétních příkladech.

Čtverce se rovnají kořenům, např. (v dnešní symbolice)

$$x^2 = 5x \,, \qquad \frac{1}{3}x^2 = 4x \,.$$

Čtverce se rovnají číslu, např.

$$x^2 = 3 \,, \qquad 5x^2 = 80 \,, \qquad \frac{1}{2}x^2 = 18 \,.$$

Kořeny se rovnají číslu, např.

$$x = 3 \,, \qquad 4x = 20 \,, \qquad \frac{1}{2}x = 10 \,.$$

Čtverce a kořeny se rovnají číslu, např.

$$x^2 + 10x = 39 \,, \qquad 2x^2 + 10x = 48 \,, \qquad \frac{1}{2}x^2 + 5x = 28 \,.$$

Čtverce a číslo se rovnají kořenům, např.

$$x^2 + 21 = 10x \,.$$

Kořeny a číslo se rovnají čtverci, např.

$$3x + 4 = x^2 \,.$$

Složitější úlohy bylo třeba převést na některý z výše uvedených typů rovnic; k tomuto účelu popsal Al-Chwárizmí dvě operace. První, *al-džabr*, podle které byla později nazvána *algebra*, znamenala převedení odečítaného členu na druhou stranu rovnice, tj. vlastně přičtení stejného členu k oběma stranám rovnice. Druhá, *al-muqábala*, představovala slučování členů stejného typu (tj. se stejnou mocninou x).

Řešení jednotlivých typů rovnic bylo popsáno algoritmicky. Např. rovnici

$$x^2 + 10x = 39$$

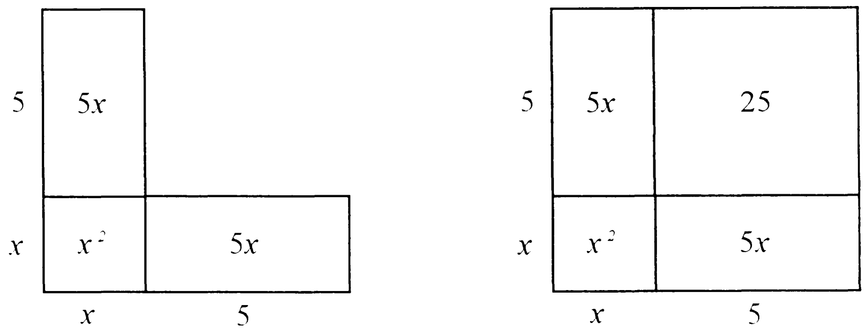
je třeba upravit na tvar

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \,, \qquad \text{tj.} \qquad (x+5)^2 = 8^2 \,,$$

odtud

$$x + 5 = 8 \,, \qquad \text{neboli} \qquad x = 3 \,.$$

Záporné řešení ($x = -13$) nebylo uvažováno, neboť záporná čísla ještě nebyla uznávána. Předchozí algebraický postup byl demonstrován (a současně zdůvodněn) následujícím obrázkem:



Matematici v Mezopotámii, v Řecku i v islámských zemích se různými metodami pokoušeli řešit i problémy vedoucí na kubické rovnice. Vyřešili však jen některé speciální případy. V Mezopotámii používali pro řešení takovýchto úloh s úspěchem tabulky.

Jedna z úloh, která se objevila v mezopotámských klínopisných textech, se dá (v dnešní symbolice) vyjádřit soustavou rovnic

$$xyz + xy = \frac{7}{6}\,, \qquad y = \frac{2}{3}x\,, \qquad z = 12x\,.$$

Snadnou, ale vtipnou úpravou dojdeme k rovnici

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252\,;$$

nahlédnutím do tabulek součtů druhých a třetích mocnin (hodnoty $n^3 + n^2$ pro $n = 1, 2, \dots$) zjistíme, že $12x = 6$, tj. $x = \frac{1}{2}$.

V řecké matematice se setkáváme s problémy vedoucími na kubické rovnice pouze v případech úlohy na zdvojení krychle a úlohy na rozdělení koule na dva vrchlíky, jejichž objemy mají předem daný poměr (Archimédes (287–212)). Řečtí matematici užívali k řešení těchto problémů geometrické metody; hledané veličiny byly konstruovány zejména pomocí kuželoseček. Archimédova úloha podstatnou měrou inspirovala islámské matematiky 9. až 11. století k hlubšímu bádání v oblasti kubických rovnic. Velkou pozornost geometrickým řešením kubických rovnic pomocí kuželoseček věnoval hlavně perský matematik, astronom, filozof a básník Omar Chajjám (1048–1123).

Na objev obecné algebraické metody pro řešení kubických rovnic bylo nutno počkat až do začátku novověku.

Niccolò Fontana zvaný Tartaglia

Františkánský mnich Luca Pacioli (1445–1514?), který vyučoval matematiku v Římě, Perugii, Neapoli, Florencii, Bologni a Benátkách, roku 1487 sepsal a o sedm let později v Benátkách vydal italsky psanou knihu *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*[2] (*Souhrn znalostí z aritmetiky, geometrie, poměrů a úměr*); byla to jedna z prvních tištěných matematických knih. Shrnovala mnoho z toho, co bylo v té době známo z aritmetiky, algebry, kupeckých počtů a účetnictví, geometrie a trigonometrie, podávala klasifikaci kvadratických rovnic podle arabských vzorů, podstatně přispěla k rozvoji symboliky i k postupnému uznávání záporných čísel. Pacioli v této knize podal mimo jiné pravidla pro násobení kladných a záporných čísel; uvádí se, že k této prezentaci záporných čísel podstatně přispělo rozvíjející se účetnictví, kdy bylo třeba pečlivě rozlišovat příjmy a výdaje, hotovost a dluhy. Kniha končí pesimistickou poznámkou, že kubické rovnice typů

$$x^3 + mx = n \qquad \text{a} \qquad x^3 + n = mx$$

(v dnešní symbolice) ani kvadraturu kruhu ještě řešit neumíme.[3]

Metody pro řešení kubických rovnic byly postupně rozpracovány v první polovině 16. století. Jsou s nimi spjata jména tří italských matematiků. Byli to Scipione dal Ferro,[4] Niccolò Fontana zvaný Tartaglia a Gerolamo Cardano.[5] S velmi zajímavou historií tohoto objevu se nyní stručně seznámíme.

Scipione dal Ferro a Tartaglia

Scipione dal Ferro se narodil 6. února 1465 v Bologni v rodině papírníka. Vystudoval univerzitu v Bologni, která tehdy patřila k největším a nejvýznamnějším v Evropě. V letech 1496 až 1525 na této univerzitě působil jako profesor matematiky. Jeho dílo se bohužel nezachovalo, podle svědectví současníků však byl vynikajícím matematikem; mezi jeho žáky patřil i německý malíř Albrecht Dürer (1471–1528). Scipione dal Ferro zemřel v Bologni roku 1526 (mezi 29. říjnem a 16. listopadem).

Někdy na počátku 16. století, nevíme přesně kdy, ovládal Scipione dal Ferro metodu řešení kubické rovnice typu $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$. Nevíme, jak k ní dospěl. Možná ji sám objevil, není však vyloučeno, že ji nalezl v nějakém starším matematickém rukopise. Rovněž nevíme, zda uměl řešit i kubické rovnice dalších typů. O těchto otázkách vedli historikové matematiky dlouhé spory; přesto není tento problém dodnes uspokojivě vyřešen.[6]

---

[2] Znovu byla vydána v Benátkách roku 1523.

[3] *Summa* ..., Veneziae 1494, str. 150.

[4] Též Scipio Ferro, Scipio Ferreus, Scipione del Ferro.

[5] Též Girolamo Cardano, Hieronymus Cardanus, Geronimo Cardan.

[6] Např. H. G. Zeuthen (1839–1920) se domníval, že překážkou pro vyřešení dalších typů kubických rovnic byl tzv. *casus irreducibilis*. E. Bortolotti (1866–1947) zastával naopak názor, že Scipione dal Ferro uměl řešit všechny typy kubických rovnic. V dalším textu uvidíme, že se jednotlivé typy kubických rovnic kvalitativně liší.

Gerolamo Cardano

Scipione dal Ferro metodu řešení kubické rovnice nezveřejnil. Seznámil s ní prý na smrtelné posteli svého žáka, kterým byl Anton Maria Fiore[7] z Benátek.

Tajení některých matematických výsledků bylo v té době běžné. Tehdejší matematici je využívali při odborných disputacích, soutěžích a matematických „turnajích". Předkládali si navzájem problémy a úlohy k řešení; ti, kteří nejlépe obstáli, se proslavili, byli zváni k přednáškám na univerzity, případně na nich získali profesorská místa.

Výraznou osobností vědeckého světa 16. století byl Niccolò Fontana, zvaný Tartaglia. Narodil se na přelomu 15. a 16. století v Bresci, vyšel ze skrovných poměrů. V dětství měl těžký úraz hrtanu od úderu mečem, poraněn byl při francouzském útoku na město. Snad proto v řeči zadrhával (přezdívka Tartaglia znamená „Koktal" nebo „Koktavec"). Byl samouk, výrazně nadaný, měl velmi silnou vůli. Zabýval se zejména matematikou a mechanikou, sepsal několik knih a prací. Jeho kniha *La nova scientia*, která vyšla roku 1537 v Benátkách, je věnována balistice. Tartaglia je autorem prvního překladu Eukleidových *Základů* do italštiny (vyšel v Benátkách roku 1543 pod názvem *Euclide Megarense ... di latino in volgar tradotto, con una ampla espositione dello istesso tradottore*), překládal do latiny a italštiny i některá díla Archimédova. Jeho šestidílná kniha *General trattato di numeri et misure*, která vyšla v letech 1556–1560 v Benátkách, je kursem teoretické i aplikované matematiky; je věnována aritmetice, algebře, geometrii a fyzice, mimo jiné zde najdeme tzv. Pascalův trojúhelník. Tartaglia zemřel v Benátkách 17. prosince 1557.

Dne 12. března 1535 se měl Tartaglia utkat v „matematickém souboji" s A. M. Fiore. Ještě před střetnutím se prý dozvěděl, že Fiore zná metodu řešení kubické rovnice typu $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$. Po velikém úsilí se mu ještě před soutěží podařilo tuto metodu objevit. Na soutěž připravili jeden druhému třicet úloh. Tartaglia prý vyřešil za dvě hodiny všechny a Fiore ani jedinou. Druhý den po soutěži nalezl Tartaglia i metodu řešení kubické rovnice typu $x^3 = ax + b$, kde $a, b > 0$. Tak alespoň vypovídá o událostech Tartaglia. I když je líčení jeho úspěchu patrně silně zveličené, faktem zůstává, že Tartaglia uspěl a byl zván k přednáškám do Verony, Benátek, Piacenzy, Brescii atd.

Gerolamo Cardano

Gerolamo Cardano se narodil 24. září 1501 v Pavii; byl nemanželským synem všestranně nadaného a vzdělaného milánského lékaře a právníka, který pečlivě dbal na výchovu a vzdělání svého syna. Již v dětství prý Cardano míval vidiny a ve snu viděl budoucnost; měl pocit, že je v něm něco silného, něco více než vůle (*daimonion*). Podstatně se lišil od svých vrstevníků, byl všestranně schopný, nadaný a vzdělaný, znal jazyky, filozofii, astrologii, matematiku, uměl vést dialog a disputace, již ve dvanácti letech studoval Eukleida.

Cardano měl v dětství špatné zdraví; předpovídali mu, že se dožije nejvýše pětačtyřiceti let; proto šel studovat medicínu na univerzitu v Pavii. Studia

[7] Též Antonio Maria Fiore, Anthonio Mariae Florido.

dokončil v Padově, roku 1525 se stal doktorem medicíny. Nedlouho po ukončení studií se oženil s patnáctiletou dívkou; měli tři děti.

Cardanův otec zemřel roku 1524; krátce předtím se oženil s Cardanovou matkou, aby upravil synův občanský stav.

Cardano si otevřel lékařskou praxi v Sacco u Padovy. Nevyvinula se však dobře, pacienti umírali. Roku 1529 se snažil vstoupit do milánského kolegia lékařů, byl však odmítnut, prý pro svůj nemanželský původ. O pět let později však získal v Miláně místo učitele matematiky, o něco později byl přijat jako praktický lékař bez práva zasedat v kolegiu. Jeho členem se stal až roku 1539. Téhož roku vydal v Miláně knihu *Practica arithmeticae et mensurandi singularis.*

Nejvýznamnějším Cardanovým matematickým spisem je kniha *Ars magna* (*Veliké umění*), která byla poprvé vydána roku 1545 v Norimberku. Je věnována hlavně problematice řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně. Má čtyřicet kapitol, více než dvacet pojednává o kubických rovnicích; reprezentuje velmi slušnou matematickou kulturu své doby. Teoretické otázky, které byly touto knihou navozeny, měly velký význam pro rozvoj algebry i celé matematiky v 16. – 19. století.

V následujících letech byl Cardanův život poměrně pestrý. Vydal další práce (*De subtilitate rerum*, 1550; *De varietate rerum*, 1556; ...), knihu o astrologii, ve které zveřejnil sto horoskopů významných lidí a přátel, horoskop Krista a datum konce světa. Cestoval do Skotska přes Francii a nazpět přes Holandsko a německé země. Vyučoval v Pavii, kde byl udán a obviněn z neschopnosti. Roku 1570 strávil dva měsíce ve vězení a další tři měsíce v domácím vězení; příčiny jeho uvěznění nejsou vyjasněny, jako důvod je uváděna černá magie, dluhy, obvinění nepřátel, pronásledování inkvizicí, zveřejnění horoskopu Krista atd.

Roku 1570 vydal Cardano v Basileji velké třídílné dílo o algebře, geometrii a mechanice. Jedním jejím dílem byla nová verze knihy *Ars magna.*[8]

V posledních létech svého života působil Cardano v Římě, kde získal od papeže penzi. Někdy se uvádí, že tehdy spálil 120 svých knih, neboť se odlišovaly od církevních dogmat. Zemřel 21. září 1576 v Římě.

Cardano byl katolík, ve filozofii byl více méně pokračovatelem Aristotela a Platóna. Působil jako lékař, matematik, filozof, přírodovědec a astrolog. Přednášel medicínu a matematiku, léčil nemocné, sestavoval horoskopy. Byl velice sebevědomý. Ve své autobiografii *De vita propria* z roku 1576 píše, že za šest tisíc let bylo na zemi jen šest skutečných lékařů, mezi něž se řadí. Rovněž píše, že za svůj život zpracoval čtyřicet tisíc problémů a že problémů, kterých se ve svých pracích nějakým způsobem dotkl, je na dvě stě tisíc.

Jeho práce mají encyklopedický charakter. Sepsal pojednání o duši, o manželství, o výchově, o hazardních hrách, o astrologii. Studoval pohyb tělesa vrže-

[8] Cardanovy sebrané spisy *Opera omnia*, které byly vydány v Lyonu roku 1663, mají deset svazků. Ve čtvrtém je první verze *Ars magna, sive de regulis algebraicis* na str. 221–302, druhá verze *Ars magna arithmeticae* na str. 303–376.

ného šikmo vzhůru, odraz a lom světla, poměr hustoty vody a vzduchu, elektrické a magnetické jevy, zdůvodňoval nemožnost věčného pohybu atd. atd., jako první napsal knihu o syfilidě (nezachovala se). Hrál šachy a kostky, tato činnost ho inspirovala k úvahám o pravděpodobnosti; bývá citován v souvislosti se svými úvahami o rozdělení částky, která byla určena pro vítěze, nebyla-li soutěž dokončena.[9]

Odstavec o Cardanovi uzavřeme jedním z jeho zajímavých výroků: *Vím, že duše je nesmrtelná, ale nevím jak.*

Ars magna

Roku 1536 se Cardano dozvěděl, že Tartaglia a Fiore znají metodu řešení kubických rovnic. Protože byl přesvědčen, že mu ji nesdělí, věcí se nezabýval. O tři roky později však začal uvažovat o sepsání velké knihy o matematice, která by měla být jakousi encyklopedií aritmetiky a algebry. Chtěl v ní zveřejnit i metodu řešení kubických rovnic. V únoru 1539 proto napsal Tartagliovi; ten mu sice odpověděl, ale metodu řešení kubických rovnic neprozradil. V březnu přijel Tartaglia do Milána a s Cardanem se setkal. Cardano přísahal na evangelium, že dozví-li se, jak se kubické rovnice řeší, nikomu to neprozradí. Teprve potom Tartaglia sdělil Cardanovi návod, který měl formu básně (v duchu Dantovy *Božské komedie*).[10]

Quando che'l cubo con le cose appresso,
  Se agguaglia à qualche numero discreto
  Trouan dui altri, differenti in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
  Che'l lor produtto sempre sia eguale
  Al terzo cubo, delle cose neto.
El residuo poi suo generale
  Delli lor lati cubi, ben sottratti
  Varrà la tua cosa principale.

Výše uvedené řádky popisují řešení rovnice $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$. Klade se $x = u - v$, odtud $uv = (\frac{a}{3})^3$ a $x = u^3 - v^3$.

In el secondo, de codesti atti;
  Quando che'l cubo restasse lui solo,
  Tu osserverai quest' altri contratti,
Del numer farai due, tal part' à uolo,
  Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
  El terzo cubo della cose in stolo;
Delle qual poi, per commun precetto,
  Torrai li lati cubi, insieme gionti
  Et cotal somma, sarà il tuo concetto:

---

[9] Roku 1713 cituje tyto Cardanovy úvahy Jacob Bernoulli (1654–1705).

[10] J. L. Lagrange (1736–1813) napsal, že Tartaglia popsal své řešení ve špatných italských verších: *Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens* ... , Oeuvres, díl 7, str. 22.

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſ ſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Titulní list Cardanovy knihy *Ars magna*

El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' è quattro è trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi.
Nella Città dal mar' intorno centa.[11]

Cardano metodu řešení kubických rovnic z básně nepochopil. V dubnu 1539 proto žádal Tartagliu o podrobnější vysvětlení, v květnu znovu potvrdil svůj slib a věnoval Tartagliovi svoji novou knihu *Practica arithmeticae.* Začal zkoumat a zdokonalovat Tartagliovo řešení; v srpnu mu napsal, že narazil na podivnou věc, tzv. *casus irreducibilis.* Tartaglia s ním však přerušil kontakty; patrně si uvědomil, že Cardano již zná více než on.

Roku 1543 navštívil Cardano a jeho žák Ludovico Ferrari (1522–1565)[12] Bolognu. Setkali se s A. M. Fiore, který jim ukázal rukopis práce Scipiona dal Ferro, ve kterém byla popsána metoda řešení kubické rovnice. Cardano si uvědomil, že v Bologni neskrývají výsledek, na jehož utajení on přísahal na evangelium; necítil se tedy dále vázán touto přísahou. Roku 1545 podrobně popsal metody řešení kubických rovnic ve své knize *Ars magna*, kde též uvedl:

Scipione dal Ferro z Bologni asi před třiceti lety našel [metodu, která je vyložena] *v této kapitole* [a] *sdělil ji Antoniovi Maria Fiore z Benátek, který poté, co se utkal s Niccolò Tartagliou z Bresci, zjistil, že Niccolò ji také objevil; a on* [Niccolò] *mi ji sdělil, když jsem ho o to požádal, důkaz zatajil. Využívaje toho, hledal jsem důkaz a nalezl ho, ale s námahou, způsobem, který vyložím dále.*[13]

Přestože Cardano Tartagliův přínos uvedl, sklidil jeho hněv, neboť nedodržel svůj slib. Tartaglia vydal roku 1546 v Benátkách knihu *Quesiti et inventioni diverse* (*Problémy a různá řešení*), kde popsal své styky s Cardanem. Nazval ho nevzdělancem a prázdným ubožákem. Na Cardanovu obranu vystoupil vzápětí jeho žák Ferrari. Roku 1547–48 vydal spis *Cartelli di matematica disfida*[14] a vyzval Tartagliu na veřejnou disputaci; ta se uskutečnila v srpnu 1548 a skončila porážkou Tartaglii. Ferrari byl pak zván k veřejným přednáškám do Říma a Benátek. Bylo to i proto, že v Cardanově knize *Ars magna* byla zveřejněna jeho metoda řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně. Tartaglia ještě publikoval *Risposto an Lodovico Ferrari* (*Odpověď L. Ferrarimu*, I–IV, Benátky 1547, V–VI, Brescia 1548).

Dnes můžeme těžko soudit, jak se vše ve skutečnosti událo. Tartaglia, Cardano i Ferrari si do značné míry protiřečí, informace, které od nich máme, nemůžeme považovat za spolehlivé. To, co je výše popsáno, je tedy třeba brát

---

[11] Viz Tartaglia: *Quesiti...*, str. 266. Viz též M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, Leipzig 1913, str. 488–489.

[12] Cardano: *Vita Ludovici Ferrari Bononiensis*, Opera omnia IX, str. 568–569.

[13] *Ars magna*, Norimbergae, str. 29–30.

[14] V překladu asi *Výzvy k matematické disputaci.*

jen jako jednu z možných verzí. Zdá se velmi pravděpodobné, že Tartaglia, který ve svých spisech žádné výrazné nové myšlenky nepodal, nebyl objevitelem metody pro řešení kubických rovnic, ale seznámil se s ní z rukopisu Scipiona dal Ferro.

Odvození Cardanova vzorce

Obraťme se však nyní k vlastní metodě řešení kubických rovnic. Jedním z důležitých poznatků, který byl italským matematikům znám, bylo zjištění, jak řešení obecné kubické rovnice převést na řešení kubické rovnice bez kvadratického členu. V současném pojetí a symbolice převedeme rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

jednoduchou substitucí $x = y - \frac{a}{3}$ na rovnici

$$y^3 + py + q = 0 ,$$

kde koeficienty p, q jsou vyjádřeny pomocí koeficientů a, b, c:

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \qquad q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3.$$

Poznamenejme, že stejným způsobem odstraníme z algebraické rovnice n-tého stupně člen s $(n-1)$-ní mocninou neznámé.

Návod k řešení kubických rovnic, který znali Scipione dal Ferro, Antonio Maria Fiore a Tartaglia a který zveřejnil roku 1545 Gerolamo Cardano v knize *Ars magna*, můžeme v dnešním značení vyjádřit vzorcem. Přestože nebyl objeven Cardanem, je nazván jeho jménem. Kořen kubické rovnice

$$x^3 + px + q = 0$$

je dán tzv. *Cardanovým vzorcem*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} .$$

Odvození je poměrně jednoduché. Dosadíme-li $x = u + v$ do výchozí rovnice, dostaneme vztah

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 .$$

Položíme-li

$$3uv + p = 0 , \qquad \text{tj.} \qquad uv = -\frac{p}{3} ,$$

je

$$u^3 + v^3 + q = 0 .$$

Z posledních dvou rovností vyplývají vztahy

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} , \qquad u^3 + v^3 = -q .$$

Proto jsou u^3 a v^3 kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 ,$$

tj.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} , \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} .$$

Dosazením třetích odmocnin do rovnosti $x = u + v$ získáme výše uvedený Cardanův vzorec.

Je třeba znovu upozornit na to, že na počátku 16. století pracovali evropští matematici téměř výhradně s kladnými čísly. Koeficienty algebraických rovnic i jejich řešeními musela být tehdy jen kladná čísla. Proto byly rozlišovány tři typy kubických rovnic bez kvadratického členu:

$$\begin{array}{ll} \text{A.} & x^3 + ax = b , \\ \text{B.} & x^3 = ax + b , \\ \text{C.} & x^3 + b = ax , \end{array}$$

kde a, b jsou kladná čísla a hledané x je také kladné číslo. Italští matematici řešili každý ze tří výše uvedených typů kubických rovnic zvlášť; popis algoritmu prováděných číselných operací, který odpovídá dnešnímu vyjádření Cardanova vzorce, byl pro jednotlivé typy rovnic modifikován tak, aby pokud možno nedocházelo k operování se zápornými čísly. Tento algoritmus dával jedno řešení dané rovnice. V některých případech však selhával; bylo to v těch situacích, kdy bylo třeba odmocňovat záporná čísla.

Dnes, kdy už s komplexními čísly umíme pracovat, víme, že v Cardanově vzorci musíme hodnoty třetích odmocnin, tj. hodnoty u a v volit tak, aby platila rovnost $uv = -\frac{p}{3}$; dalšími dvěma kořeny kubické rovnice jsou čísla

$$\varepsilon u + \varepsilon^2 v , \qquad \varepsilon^2 u + \varepsilon v ,$$

kde ε je tzv. primitivní třetí odmocnina z jedné, tj. $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

O řešení kubických rovnic se můžeme podrobně dočíst např. v Kořínkově knize *Základy algebry* nebo ve Schwarzově knize *Základy náuky o riešení rovníc.*

Analytický rozbor

Uvažujme rovnici $x^3 + px + q = 0$, kde p, q jsou libovolná reálná čísla. V celé problematice se dobře zorientujeme, vyšetříme-li běžným způsobem průběh funkce

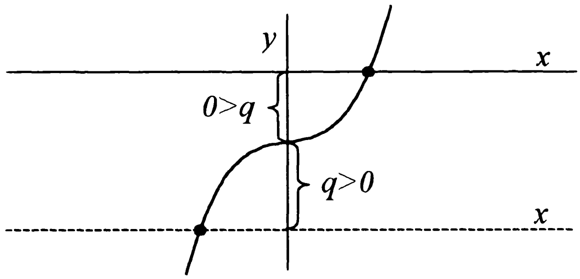
$$f(x) = x^3 + px + q .$$

Je

$$f'(x) = 3x^2 + p\,, \qquad f''(x) = 6x\,.$$

Odtud vyplývá:

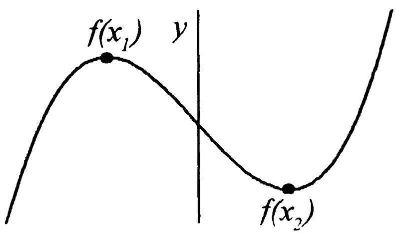
a) Jestliže je $p > 0$, je $f'(x) > 0$ pro každé x, funkce f nemá extrém, je rostoucí (viz obrázek). Uvažovaná rovnice má tedy jen jeden reálný kořen. Je-li navíc $q < 0$, jde o rovnici typu A a tento kořen je kladný. Je dán Cardanovým vzorcem, ve kterém je druhá odmocnina z kladného čísla. Tento případ byl italským matematikům srozumitelný. Případ $q > 0$ nevede na žádný z typů A, B, C; takováto rovnice má jeden záporný kořen.



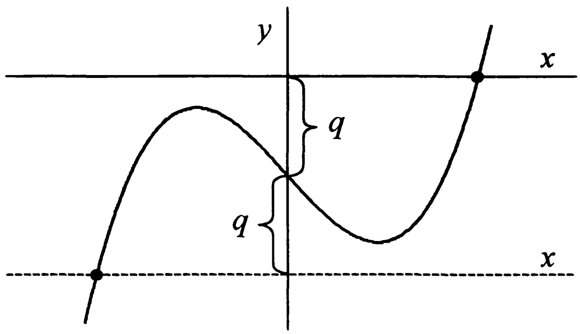
b) Jestliže je $p < 0$, pak má funkce f lokální maximum v bodě $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ a lokální minimum v bodě $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, tj. částí grafu funkce f je „vlnka" (viz následující obrázek). Snadno se vypočte, že

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)\,,$$

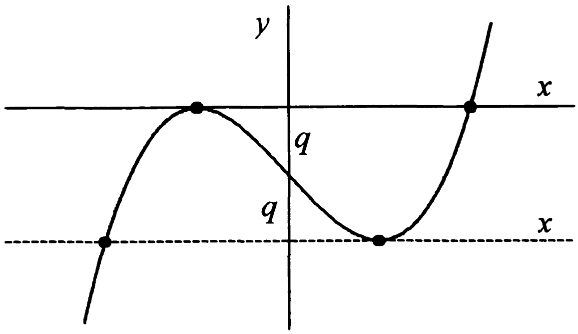
tj. součin hodnot lokálního maxima a lokálního minima funkce f je roven čtyřnásobku výrazu pod druhou odmocninou v Cardanově vzorci; tento výraz má tedy geometrický smysl. Je-li navíc $q < 0$, jde o rovnici typu B, je-li $q > 0$, jde o rovnici typu C.



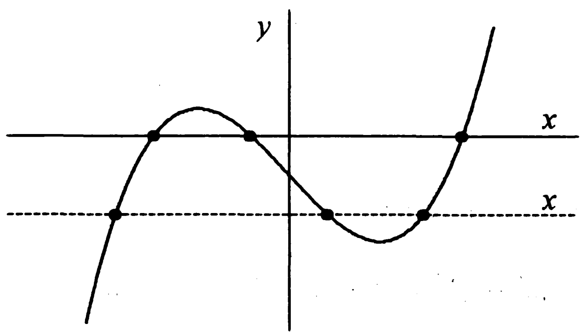
b1) Je-li $f(x_1)f(x_2) > 0$, pak maximum $f(x_1)$ i minimum $f(x_2)$ funkce f mají stejná znaménka, tj. osa x „neprotíná vlnku" (viz další obrázek). Uvažovaná rovnice má tedy jediný reálný kořen. Je-li $q < 0$, je tento kořen kladný; je dán Cardanovým vzorcem, ve kterém figuruje druhá odmocnina z kladného čísla. Je-li $q > 0$, je tento kořen záporný; tato rovnice pro matematiky 16. století neměla řešení.



b2) Je-li $f(x_1)f(x_2) = 0$, je maximum nebo minimum funkce f rovno nule, tj. osa x se shora nebo zdola „dotýká vlnky“. Uvažovaná rovnice má tedy dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný. Cardanův vzorec dává jednoduchý kořen uvažované rovnice. Je-li $q < 0$, je tento kořen kladný (dvojnásobný kořen je záporný, osa x se „vlnky“ dotýká shora). Je-li $q > 0$, je tento kořen záporný (dvojnásobný kořen je kladný, osa x se „vlnky“ dotýká zdola); Cardanův vzorec v tomto případě nedává existující kladné řešení.



b3) Jestliže je $f(x_1)f(x_2) < 0$, mají maximum a minimum funkce f různá znaménka, osa x „protíná vlnku“, tj. uvažovaná rovnice má tři reálné kořeny (viz obrázek).



V Cardanově vzorci je však pod druhou odmocninou záporné číslo, reálné kořeny jsou vyjádřeny pomocí čísel komplexních; imaginární části se při výpočtu nakonec zruší.

Tento případ, tzv. *casus irreducibilis*, byl pro italské matematiky nepochopitelný, ale velice inspirativní. Cardanův vzorec, který v řadě případů řešení kubické rovnice dával, najednou selhával. Casus irreducibilis tak vedl jednak k postupnému uznání záporných čísel, jednak ke studiu druhých odmocnin ze záporných čísel, tj. čísel komplexních. Teprve roku 1837 dokázal francouzský matematik Pierre Laurent Wantzel (1814–1848), že nastane-li casus irreducibilis, není možno vyjádřit reálné kořeny kubické rovnice algebraicky pouze v reálném oboru.

Pro zajímavost uveďme, že Cardano znal některé kubické rovnice, které mají tři kladné kořeny; šlo o rovnice

$$\begin{aligned} x^3 + 10x &= 6x^2 + 4 \qquad (\text{kořeny } 2,\ 2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}),\\ x^3 + 21x &= 9x^2 + 5 \qquad (\text{kořeny } 5,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}),\\ x^3 + 26x &= 12x^2 + 12 \qquad (\text{kořeny } 2,\ 5+\sqrt{19},\ 5-\sqrt{19}). \end{aligned}$$

Uvedl i příklady rovnic typu B, kdy nastane casus irreducibilis, a poznamenal, že jeho vzorec v takovýchto případech selhává. Šlo o rovnice

$$x^3 = 20x + 25\,, \qquad x^3 = 30x + 36\,,$$

které mají kořen 5, resp. 6;[15] obě vznikly patrně z identity

$$x^3 = x(x^2 - x) + x^2$$

kam se za „některá“ x dosadí 5, resp. 6.

Rovnice čtvrtého stupně

V 39. kapitole Cardanovy knihy *Ars magna* byla publikována i metoda pro řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně, kterou objevil Cardanův žák Ludovico Ferrari. Popíšeme stručně (opět v dnešním pojetí a v dnešní symbolice) i tuto metodu.

Mějme rovnici čtvrtého stupně bez kubického členu

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

a proveďme jednoduchou úpravu:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4}$$

[15] Další kořeny jsou $\frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{5})$, resp. $-3 \pm \sqrt{3}$.

Odtud snadno vyplyne rovnost

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2=\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2+t^2+2tx^2+at=2tx^2-bx+\left(t^2+at+\frac{a^2}{4}-c\right).$$

Nyní uvažujme, kdy bude výraz vpravo čtvercem. Snadno si uvědomíme, že kvadratický trojčlen Ax^2+Bx+C se dá upravit na tvar $A(x+\frac{B}{2A})^2$ právě tehdy, když je $4AC-B^2=0$.

Pro výše uvedený výraz má podmínka $4AC-B^2=0$ tvar

$$4\cdot 2t\cdot\left(t^2+at+\frac{a^2}{4}-c\right)-b^2=0.$$

To je však kubická rovnice s neznámou t, která má alespoň jeden reálný kořen t_0, který je dán Cardanovým vzorcem. Pro $t=t_0$ je tedy pravá strana výše uvedeného vztahu čtvercem. Odmocníme-li, získáme kvadratickou rovnici

$$x^2+\frac{a}{2}+t_0=\pm\sqrt{2t_0}\cdot\left(x-\frac{b}{4t_0}\right),$$

kterou již umíme vyřešit.

Ukažme ještě jeden způsob řešení rovnice čtvrtého stupně bez kubického členu; tento způsob uváděl např. Leonhard Euler (1707–1783). Uvažujme opět rovnici

$$x^4+ax^2+bx+c=0.$$

Položme (podobně jako při řešení kubické rovnice) $x=u+v+w$; dosazením do výchozí rovnice a nepříliš složitou úpravou dojdeme k rovnici

$$\begin{aligned}&\left(u^2+v^2+w^2\right)^2+4\left(uv+uw+vw\right)\left(u^2+v^2+w^2+\tfrac{a}{2}\right)+\\&\qquad+a\left(u^2+v^2+w^2\right)+\left(8uvw+b\right)\left(u+v+w\right)+\\&\qquad\qquad+4\left(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2\right)+c=0.\end{aligned}$$

Položme

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{a}{2},$$

$$uvw=-\frac{b}{8},\qquad \text{tj.}\qquad u^2v^2w^2=\frac{b^2}{64};$$

bude tedy

$$\left(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2\right)=\frac{a^2}{64}-\frac{c}{4}.$$

Čísla u^2, v^2, w^2 jsou tedy řešením kubické rovnice (je to tzv. ***kubická rezolventa***)

$$t^3+\frac{a}{2}t^2+\left(\frac{a^2}{64}-\frac{c}{4}\right)t-\frac{b^2}{64}=0.$$

Jsou-li t_1, t_2, t_3 kořeny této kubické rovnice, je

$$u = \sqrt{t_1}\,, \qquad v = \sqrt{t_2}\,, \qquad w = \sqrt{t_3}\,.$$

Odmocniny musí být voleny tak, aby platila rovnost $uvw = -\frac{b}{8}$. Řešeními výše uvedené rovnice čtvrtého stupně jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\,, \\ x_2 &= +\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\,, \\ x_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\,, \\ x_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\,. \end{aligned}$$

Další způsob řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně poznáme v odstavci o Descartových matematických výsledcích.

Rafael Bombelli

Další významný italský matematik Rafael Bombelli (1526/30–1572/3) snad pocházel z Bologni. Studoval na tamější univerzitě, působil jako inženýr, hydrolog a hydraulik; o jeho životě téměř nic nevíme.

Bombelli přeložil část Diofantovy *Aritmetiky*. Roku 1572 vydal v Bologni podnětný spis *L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica* (*Algebra, větší část aritmetiky*), ve kterém věnoval velkou pozornost řešení algebraických rovnic.[16] Bombelliho dílo bylo pro řadu matematiků velmi inspirativní, studovali ho S. Stevin (1548–1620), L. Euler, G. W. Leibniz (1646–1716) a další.

Bombelli prezentoval v první knize své *Algebry* zajímavý výpočet druhých a třetích odmocnin, který vedl k vyjádření odmocnin řetězovými zlomky. Uveďme (v dnešní symbolice) jeho postup. Protože je $1 < \sqrt{2} < 2$, položíme

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$$

a odtud snadno vypočteme, že

$$y = 1 + \sqrt{2}\,;$$

po dosazení za $\sqrt{2}$ dostaneme vztah

$$y = 2 + \frac{1}{y}\,.$$

[16] **Bombelliho *l'Algebra*, která měla tři knihy, vyšla podruhé v Bologni roku 1579. Čtvrtá a pátá kniha zůstala v rukopise; byla vydána až roku 1929, o vydání se zasloužil E. Bortolotti.**

Dosazujeme-li nyní postupně za y do výchozího vyjádření čísla $\sqrt{2}$, dostáváme

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}} = \dots$$

Ve druhé knize své *Algebry* podal Bombelli řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně více méně v duchu Cardanovy *Ars magna.* Podrobně však studoval *casus irreducibilis.* Naznačme postup jeho úvah. Pro rovnici

$$x^3 = 15x + 4\ ,$$

dává Cardanův vzorec řešení

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\ .$$

Bombelli chtěl ukázat smysl Cardanova vzorce i pro *casus irreducibilis* a proto se snažil počítat třetí odmocniny komplexních čísel. Předpokládal, že třetí odmocnina komplexního čísla je opět komplexní číslo; položil

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}\ .$$

Umocněním získal rovnost

$$2 + \sqrt{-121} = (p^3 - 3pq) + (3p^2 - q) \cdot \sqrt{-q}\ ,$$

která je zřejmě splněna v případě, že

$$2 = p^3 - 3pq\ , \qquad \sqrt{-121} = (3p^2 - q) \cdot \sqrt{-q}\ .$$

Navíc pak platí rovnost

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = p - \sqrt{-q}\ .$$

Dále je

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (p + \sqrt{-q}) \cdot (p - \sqrt{-q})$$

a po jednoduché úpravě vychází

$$\sqrt[3]{125} = p^2 + q\ , \qquad \text{odkud} \qquad q = 5 - p^2\ .$$

Dosadíme-li nyní q do výše odvozeného vztahu $2 = p^3 - 3pq$, dostaneme kubickou rovnici

$$4p^3 = 15p + 2\ ,$$

která má kořen $p = 2$ a odtud $q = 1$. Nyní je

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \qquad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

a řešení výchozí rovnice

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4\,.$$

Najít kořen výchozí kubické rovnice je však stejně obtížné jako najít kořen kubické rovnice, ke které jsme nakonec dospěli.

Bombelliho postup má tedy tu nevýhodu, že od jedné kubické rovnice, pro kterou nastává casus irreducibilis, docházíme k jiné, pro kterou rovněž nastává casus irreducibilis; pohybujeme se tedy vlastně v kruhu. Přesto je tato Bombelliho úvaha velmi zajímavá a podnětná, neboť ukazuje, jak řešení kubické rovnice souvisí s odmocňováním komplexních čísel.

Komplexní čísla

Při řešení algebraických rovnic se již v 16. století objevila komplexní čísla. Trvalo však ještě zhruba tři sta let, než došlo k jejich všeobecnému rozšíření, uznání a k pochopení jejich geometrické interpretace.

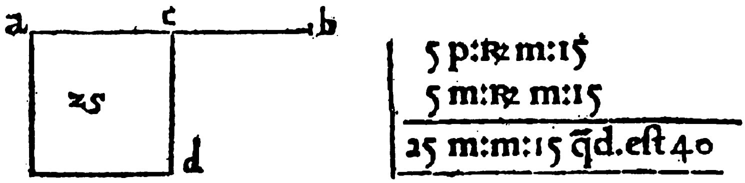
Komplexní čísla se poprvé objevila v Cardanově knize *Ars magna* v této úloze:

Je-li třeba rozdělit 10 *na dvě části, jejichž součin je* 30 *nebo* 40, *je jasné, že tento případ je nemožný. Budeme však postupovat takto: rozdělíme* 10 *napůl, polovina bude* 5; *to vynásobeno samo sebou dá* 25. *Potom odečteme od* 25 *požadovaný součin, řekněme* 40, *zůstane* m:15 [tj. -15]; *vezmeme-li z toho* $R_\times$ [tj. odmocninu] *a přidáme k* 5 *a odečteme od* 5, *vyjdou veličiny, které vynásobeny mezi sebou dají* 40. *Tyto veličiny budou* $5\,p{:}R_\times\, m{:}15$ *a* $5\,m{:}R_\times\, m{:}15$ [tj. $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$].[17]

Víme, že příklad vede na kvadratickou rovnici $x(10-x) = 40$. Cardano slovním postupem dochází k řešení $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$; číslo $\sqrt{-15}$ nazývá formálním číslem (*quantitas sophistica*). Řešení chápe do jisté míry geometricky. Uvažuje úsečku délky 10, kterou potřebuje rozdělit na dvě části, které považuje za strany obdélníka, jehož obsah má být 40; to zjevně není možné, neboť největší obsah ze všech takových obdélníků má čtverec o straně 5. To je už v VI. knize Eukleidových *Základů* (27. věta). Tuto úvahu a výpočet součinu čísel $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$ zaznamenal Cardano ve své knize *Ars magna*

[17] *Ars magna*, Norimbergae 1545, str. 65.

v této podobě:



Rafael Bombelli dospěl při počítání s komplexními čísly (také on je nazýval *sophistic*) podstatně dále než Cardano. Zjistil, že odmocněním záporného čísla nemůžeme dostat ani kladné ani záporné číslo; napsal tedy před odmocninu z absolutní hodnoty tohoto čísla *più di meno*, když ji přičítal, resp. *meno di meno*, když ji odečítal (jsou to slovní označení pro i a $-i$). Pro počítání s takovýmito čísly formuloval v první knize své *Algebry* následujících osm pravidel:

E prima trattarò del moltiplicare, ponendo la regola del più et meno:

più via più di meno fa più di meno
meno via più di meno fa meno di meno
più via meno di meno fa meno di meno
meno via meno di meno fa più di meno
più di meno via più di meno fa meno
più di meno via men di meno fa più
meno di meno via più di meno fa più
meno di meno via men di meno fa meno

Tato pravidla odpovídají dnešním zápisům

$$(+1)(+i) = +i\,, \quad (-1)(+i) = -i\,, \quad (+1)(-i) = -i\,, \quad (-1)(-i) = +i\,,$$
$$(+i)(+i) = -1\,, \quad (+i)(-i) = 1\,, \quad (-i)(+i) = 1\,, \quad (-i)(-i) = -1\,.$$

Bombelli s komplexními čísly úspěšně pracoval; v jeho knize najdeme např. následující rovnosti (v dnešní symbolice)

$$8i + (-5i) = 3i\,, \qquad \sqrt[3]{3 + i\sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{3 - i\sqrt{10}} = \sqrt[3]{19}\,, \qquad \sqrt[3]{52 + 47i} = 4 + i\,.$$

V předchozím paragrafu bylo ukázáno, jak se Bombelli pokoušel algebraicky počítat třetí odmocniny komplexních čísel. Zjistil přitom, že třetí odmocniny komplexně sdružených čísel jsou opět komplexně sdružená čísla.

Terminologie a symbolika

Práce s algebraickými rovnicemi a komplexními čísly byla komplikována nejen tím, že ještě nebylo běžné operovat se zápornými čísly, ale i tehdejší nedokonalou a velmi těžkopádnou symbolikou. Je třeba důrazně upozornit na skutečnost, že rozvoj a postupné zjednodušování symboliky bylo nutnou podmínkou rozvoje algebry a matematiky vůbec. *Slovní označení* pro neznámou (*termín* je příliš silné a moderní slovo) bylo používáno již např. v Egyptě a Mezopotámii. Ve středověku bylo v islámských zemích pro neznámou užíváno arabské slovo *šaj*, v Evropě byla neznámá veličina v době renesance a na začátku novověku nazývána latinsky *res*,[18] italsky *cosa*, německy *Coß* nebo *Dingk*, francouzsky *chose* nebo *premier*; všechny tyto termíny se dají přeložit jako *věc*, míněno „neznámá věc“ ve významu „neznámý počet“ či „neznámé číslo“. Slovní označení neznámé veličiny bývalo přenášeno i na disciplínu, která s neznámými veličinami pracuje a které dnes říkáme algebra (německy *Coss*, *cossische Kunst*, italsky *regola della cosa*, francouzsky *règle des premiers* apod.). Pro algebru však bylo tehdy užíváno i slovní označení *algebra a almukabala* pocházející z názvu jednoho ze dvou nejvýznamnějších spisů Al-Chwárizmího.

Matematická symbolika se začala výrazně rozvíjet ve druhé polovině 15. století v souvislosti s celospolečenskými změnami, které přinesla renesance.

Francouzský matematik a lékař Nicolas Chuquet (1445–1488), který působil v Lyonu, sepsal roku 1484 knihu *Le triparty en la science des nombres* (*Věda o číslech ve třech částech*), ve které vysvětluje indicko-arabský způsob zapisování čísel a aritmetické operace, pro které užívá francouzská slova *plus, moins, multiplier par, partyr par*; první dvě symbolicky značil $\tilde{p}$, $\tilde{m}$. Záporná čísla nazýval *ung moins*, pro jejich označení užíval symbolu $\tilde{m}$. Neznámou nazýval Chuquet *premier* nebo *nombre linear*, druhou, třetí a čtvrtou mocninu neznámé *champs, cubics, champs des champs*. Užíval poměrně ekonomickou symboliku, ve které se poprvé objevily exponenty; naše $5x$, $6x^2$, $10x^3$, resp. 9, tj. $9x^0$, a $9x^{-2}$ zapisoval

$$.5.^1\,, \qquad .6.^2\,, \qquad .10.^3\,, \qquad .9.^0\,, \qquad .9.^{2.m}\,.$$

Pro odmocniny používal symboly $R^2_{\times}$, $R^3_{\times}$ atd., např. odmocninu $\sqrt{14-\sqrt{180}}$ zapsal v tvaru

$$R^2_{\times}.\underline{14.\tilde{m}.R^2_{\times}.180.}$$

(podtržení znamená naši závorku). Operaci s neznámými $72x : 8x^3 = 9x^{-2}$ zapsal

$$.72.^1 \textit{ partyr par } .8.^3 \textit{ egaulx } .9.^{2.m}\,,$$

rovnice $4x = -2$, $\sqrt{4x^2+4x}+2x+1 = 100$ a $12+3x^2 = 30x$ zapsal v tvaru

$$.4.^1 \textit{ egaulx a } \tilde{m}.2.^0\,,$$

[18] Např. Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci (1170–1240) užívá tohoto termínu ve své knize *Liber abaci* (*Kniha o abaku*) z roku 1202 (přepracována roku 1228); neznámou označuje i slovem *radix* a *pars*, druhou, třetí a čtvrtou mocninu neznámé slovy *quadratus* nebo *census*, *cubus*, *census de censu* nebo *censuum census* apod. Fibonacciho kniha v Evropě podstatnou měrou přispěla k šíření indicko-arabského způsobu zapisování čísel v desítkové soustavě. Připomeňme, že Fibonacci pracoval jako první v Evropě (po Diofantovi) se zápornými čísly; interpretoval je jako dluh. Záporná čísla však byla brána na milost velmi pomalu.

$$R^2_\times\ \underline{.4.^2\ \tilde{p}\ .4.^1}\ \tilde{p}\ .2.^1\ \tilde{p}\ .1.\quad \textit{egaulx a}\ .100.\ ,$$

$$.12.\ \textit{plus}\ .3.^2\ \textit{egaulx a}\ .30.^1\ .$$

(poprvé se zde objevuje záporné číslo ponechané na jedné straně rovnítka). Chuquet v určitém okamžiku připustí i záporný kořen rovnice. Rovnici nazývá *equipolence des nombres*.[19]

Chuquetova kniha *Le triparty en la science des nombres* vyšla tiskem až roku 1880, vývoj matematiky v 16. století příliš neovlivnila; rukopis patrně mnoho matematiků nečetlo.

Luca Pacioli, který ve své knize *Summa de arithmetica* ... podstatně přispěl k rozšíření indicko-arabských číslic v Evropě, nazýval roku 1494 algebru *regula della cosa* a *arte maggiore* (*pravidlo věci* a *veliké umění*). Užíval tzv. *caratteri algebraici* (tj. algebraické symboly). Neznámou nazýval *cosa* a označoval ji *co.*, druhou mocninu neznámé *censo* podle latinského *census*, *čtverec*, a označoval ji *ce.*, třetí mocninu neznámé *cubo* z latinského *cubus*, v označení *cu.*; pro označení vyšších mocnin použil multiplikativního postupu, mocniny s prvočíselným exponentem vytvářel jinak. Čtvrtou mocninu nazýval *censo de censo* nebo *censo censo* a značil *ce. ce.*, pátou mocninu *primo relato*, $p.^0r.^0$, šestou mocninu *censo de cubo*, *ce. cu.*, sedmou mocninu *secondo relato*, $2.^0r.^0$, osmou mocninu *censo de censo de censo*, *ce. ce. ce.*, devátou mocninu *cubo de cubo*, *cu. cu.*, desátou mocninu *censo de primo relato*, *ce.* $p.^0r.^0$, jedenáctou mocninu *tertio relato*, $3.^0r.^0$ atd.; absolutní člen v rovnici nazýval *numero*, *číslo*, a značil n^0.

Pokud bylo třeba užít další neznámou, nazýval ji Pacioli *quantità* a značil qp^a (dříve byla nazývána též *cosa seconda*), její druhou mocninu *ce.de* qp^a atd. Pro aritmetické operace používal termíny *più*, *meno* (latinsky *plus* a *minus*, tj. *více* a *méně*) a symbolicky je značil je $\tilde{p}$, resp. $\tilde{m}$; rovnost značil zkratkou *ae.* ze slova *aequalis*. Užíval symboly i pro druhou, třetí a čtvrtou odmocninu a sice $R_\times$ nebo $R_\times 2$ z latinského *radix*, $R_\times 3$. $R_\times 4$ nebo $R_\times R_\times$. Např. odmocniny $\sqrt{40-\sqrt{320}}$, resp. $\sqrt[3]{31-\sqrt{16}}$ zapisoval

$$R_\times V\ 40\ \tilde{m}\ R_\times\ 320\ , \qquad \text{resp.} \qquad R_\times 3\ V 31\ \tilde{m}\ R_\times 16\ ;$$

písmeno V znamenalo, že se odmocnina bere ze všeho, co následuje (V, tj. vlastně U, je ze slova *universale*); jde tedy o jakousi závorku. Kvadratickou iracionalitu nazýval *surdo*.

Matematickou symboliku podstatnou měrou ovlivnila i německá škola *cossistů* (*kosistů*). Tito matematici, či spíše počtáři, byli orientováni zejména k otázkám praktického života, ke kupecké aritmetice, účetnictví, zeměměřictví, navigaci apod. Zkoumali různé početní postupy a algoritmy pro aritmetické operace, postupně rozvíjeli symboliku, vyučovali a psali učebnice pro potřeby obchodníků, úředníků a správního aparátu. Většinou se o těchto matematicích hovoří jako o mistrech počtářství (*Rechenmeister*).

[19] Ujal se však termín *équation* z latinského *equatio*.

60. Haben auch je eine von kürtz wegen mit einem character: genomen von anfang des worts oder namens: also verzeichnet

φ dragma oder numerus
ʀ radix
ʒ zensus
c cubus
ʒʒ zensdezens
ß sursolidum
ʒc zensicubus
bß bissursolidum
ʒʒʒ zenszensdezens
cc cubus de cubo

¶ Dragma oder numerus würt hie genomē gleich sam 1. ist kein zal sunder gibt andern zalen ir wesen
¶ Radix ist die seiten oder wurtzl eins quadrats.
¶ Zensus: die dritt in der ordnūg: ist allweg ein quadrat/entspringt auß multiplicirūg des radix in sich selbst. Darumb wañ radix 2 bedeüt/ist 4 sein zens.

dañ $\surd 4$ ist 2. $\surd 9$ ist 3. pringen in einer summa 5

Exempl von communicanten

$\surd 8$ zů $\surd 18$ item $\surd 20$ zů $\surd 45$ item $\surd 27$ zů $\surd 48$
fa: $\surd 50$ facit $\surd 125$. fa: $\surd 147$
$\surd 6\frac{2}{3}$ zů $\surd 41\frac{2}{3}$ it. $\surd 12\frac{1}{2}$ zů $\surd 40\frac{1}{2}$ it. $\surd 8$ zů $\surd 12\frac{1}{2}$
fa: $\surd 81\frac{2}{3}$ fa: $\surd 98$ fa: $\surd 40\frac{1}{2}$

Exempl von irracionaln

$\surd 5$ zů $\surd 7$ facit $\surd$ des collects $12 + \surd 140$
item $\surd 4$ zů $\surd 13$ facit $\surd$ des collects $17 + \surd 208$

Ukázky z Rudolffovy knihy *Behend unnd hubsch Rechnung* (symboly pro mocniny neznámé, kosistické znaky)

Johann Widmann z Chebu (1462–1498), který působil jako profesor matematiky na univerzitě v Lipsku, použil v knize *Behende und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* (*Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce*), která vyšla v Lipsku roku 1489, symboly + a – se brzy ujaly jako symboly pro sčítání a odčítání. Widmannova kniha vyšla znovu v letech 1508, 1519 a 1526.[20]

Christoff Rudolff z Javora (1500?–1545?), který působil ve Vídni jako soukromý učitel matematiky, vydal roku 1525 ve Strasburgu učebnici *Behend unnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden* (*Hbité a pěkné počítání pomocí umných pravidel algebry, obyčejně Coss nazývané*). V této knize jsou mocniny neznámé veličiny značeny gotickými písmeny (viz první ukázka na vedlejší stránce), symbolické označení odmocnin je podobné dnešnímu, ale bez horní vodorovné čáry (viz druhá ukázka na vedlejší stránce). Symbolům pro označení mocnin neznámé veličiny se začalo říkat *kosistická čísla*. Začátkem 16. století se kosistická symbolika ustálila.

Rudolff zapisoval rovnici $x^2 = 12x - 36$ v tvaru

$$Sit\ 1\mathfrak{z}\ aequatus\ 12\mathfrak{r}\ -\ 36\ .$$

Významným německým matematikem té doby byl Adam Ries (1492–1559), který napsal roku 1524 knihu *Behend Die Coss*, a Peter Apian (1495–1552), který roku 1527 vydal v Ingolstadtu knihu *Eyn neue unnd wohlgegründete underweysung aller Kauffmannß Rechnung*. Tyto knihy přispěly k šíření kosistických znaků a k rozvoji matematické symbnoliky vůbec.

Michael Stifel (1486/87–1567) vydal roku 1544 v Norimberku knihu *Arithmetica integra*, ve které neznámou a její druhou, třetí a čtvrtou mocninu nazývá *coss, zensus, cubus, zensizensus* a symbolicky je značí zkratkami těchto slov. V pozdější práci *De algorithmi numerorum cossicorum* navrhuje užívat pro neznámou jediné písmeno a mocniny tvořit jeho opakováním. Roku 1545 Stifel vydal knihu *Deutsche Arithmetica*[21] a roku 1553 doplnil a vydal Rudolffovu učebnici pod názvem *Die Coss Christoffs Rudolffs mit schönen Exempeln der Coß* (znovu vyšla roku 1615).

Terminologie a symbolika italských a německých matematiků se v 16. století navzájem ovlivňovala a postupně prolínala.

Gerolamo Cardano zapisuje roku 1545 výraz $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ v tvaru

$$R.V.\,7p : R\,14$$

a čísla $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$ v tvaru

$$5\,p : Rm : 15 \qquad \text{a} \qquad 5\,m : Rm : 15\ ;$$

[20] Před r. 1489 se symboly + a – objevily pouze v několika matematických rukopisech.

[21] Neznámou zde značí *sum*, její druhou mocninu *sum sum*, třetí mocninu *sum sum sum* atd.

rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 posi-
tiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam par-
tem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium nu
meri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, acci
pe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab
altero minues tantundem, habebis Bino-
mium ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:
10, horum accipe ℞^u cub^u & minue illam

cub⁹ p:6 reb⁹ æqlis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v:cu.℞ 108 p:10
m:℞ v:cu.℞ 108 m:10

Ukázka z Cardanovy knihy *Ars magna*
(řešení rovnice $x^3 + 6x = 20$)

1. Egualeà 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
2 2
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2.p.di m.11.⅃ R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2 p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Ukázka z Bombelliho knihy *L'Algebra*
(řešení rovnice $x^3 = 15x + 4$)

při násobení je zapisuje pod sebe a součin pod ně a hovoří o součinech křížem (viz obrázek v předchozím paragrafu):

$$5p : Rm : 15$$
$$5m : Rm : 15$$
$$25m : m : 15\ \overline{q}d\ est\ 40$$

Rovnici $x^3 + 6x = 20$ zapisoval Cardano v tvaru

$$cub\ p : 6\ reb\ ae\overline{q}lis\ 20$$

a její řešení $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ v tvaru

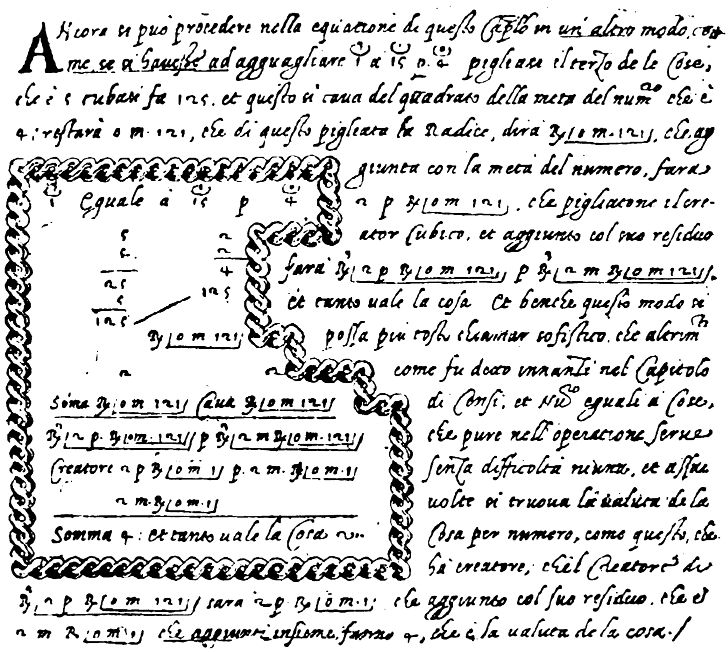
$$R_{\times}.v.cu.R_{\times}108p : 10 \,|\, m\, R_{\times}.v.cu.R_{\times}.108m : 10\ ,$$

kde $R_{\times}.v.cu.$ značí třetí odmocninu, $R_{\times}$ druhou odmocninu, p: a m: je plus a minus a svislá čára značí místo, kam až sahá třetí odmocnina. Viz ukázka na vedlejší stránce.

Rafael Bombelli zapisoval roku 1572 výraz $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ v tvaru

$$R.c. \lfloor\ 2\ p.\ di\ m.11\ \rfloor\ ,$$

kde $R.c.$ je třetí odmocnina, $\lfloor$ a $\rfloor$ jsou závorky, *p. di m.* je *più di meno*, tj. $+i$. V rukopise své knihy značí Bombelli závorky podtrháváním (viz níže uvedená ukázka); v tištěné verzi z těchto podtržení zůstaly symboly $\lfloor$ a $\rfloor$.



Ukázka z rukopisu Bombelliho knihy *L'Algebra*
(řešení rovnice $x^3 = 15x + 4$)

François Viète

François Viète

François Viète[22] (1540–1603) byl významný francouzský matematik, právník a politik. Narodil se v malém městečku Fontenay-le-Comte v provincii Poitiers. Nejprve navštěvoval v rodném městě školu, kterou vedli františkáni, od roku 1558 studoval práva na univerzitě v Poitiers, roku 1560 se stal bakalářem a licenciátem. Jako advokát začal potom působit ve svém rodném městě.

Roku 1564 se Viète stal tajemníkem Antoinetty d'Aubeterre a Jeana de Parthenay, pomáhal též s výchovou a vzděláváním jejich dcery Cathérine. Své přednášky o základech geografie a astronomie z té doby zachytil ve spise *Principes de cosmographie* (publikováno až roku 1637) a výklad teorie pohybu planet podle Ptolemaiova systému ve spise *Harmonicon coeleste* (zůstalo v rukopise). Snil o tom, že vylepší Ptolemaiův systém; zabýval se proto trigonometrií, která byla nezbytná pro veškeré astronomické výpočty. Koperníkův systém odmítal pro jeho nepřesnosti.

Antoinetta d'Aubeterre přesídlila roku 1568 po svatbě své dcery do La Rochelle; Viète zde přišel do styku s vůdčími osobnostmi kalvínů, mimo jiné s Jindřichem Navarským, který se později stal králem Jindřichem IV. (1553–1610). Viète byl katolík, v náboženských otázkách byl však velmi tolerantní.

Roku 1570 ukončil spis *Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus*, který obsahoval výklad rovinné a sférické trigonometrie, tabulky hodnot funkcí sinus, tangens a sekans (s krokem 1′). Prokázal obrovské početní schopnosti; hodnoty zmíněných goniometrických funkcí počítal pomocí pravidelného $3 \cdot 2^{11}$-úhelníka vepsaného do kruhu a $3 \cdot 2^{12}$-úhelníka opsaného kruhu. (První dva svazky Viètova spisu *Canon mathematicus* vyšly až roku 1579 v Paříži; protože však obsahovaly velké množství tiskových chyb, snažil se Viète všechny exempláře zničit. Zbylé dva svazky nebyly vydány nikdy.)

Roku 1571 se Viète přestěhoval do Paříže, kde nejprve pracoval jako advokát. Seznámit se zde s významnými matematiky, zejména s profesorem pařížské univerzity Pierrem de la Ramé (Petrus Ramus, 1515–1572), který tragicky zahynul v souvislosti s událostmi bartolomějské noci. Začal vydávat drobnější práce a rozesílat je známým matematikům.

Roku 1573 přešel do státní služby, stal se poradcem parlamentu (členem vyššího soudu) v Rennes v Bretani. Od roku 1580 pracoval jako poradce Jindřicha III. Valoa (1551–1589), roku 1584 byl po jakýchsi intrikách propuštěn.

V následujících letech Viète studoval díla klasiků (Eukleides, Archimédes, Apollonios, Diofantos) i své bezprostřední předchůdce (Tartaglia, Cardano, Bombelli, Stevin atd.).

Od roku 1589 byl opět ve státní službě u Jindřicha III. V té době se výrazně proslavil, neboť rozluštil šifrované dopisy králových nepřátel;[23] šlo o politické spiknutí, ve kterém hrál závažnou roli španělský dvůr. Po smrti Jindřicha III.

[22] Též Franciscus Vieta.

[23] Viz D. Kahn: *The code breakers*, New York, 1968, str. 116–118.

roku 1589 se Viète stal osobním poradcem Jindřicha IV., se kterým se již řadu let znal.

Roku 1591 vydal v Tours své nejvýznamnější dílo *In artem analyticem isagoge* (*Úvod do analytického umění*), které mělo být součástí většího díla o algebře.

Ve spisech *Effectionum geometricarum canonica recensio* (Tours, mezi roky 1591 a 1593) a *Supplementum geometriae* (Tours 1593) se zabýval geometrickými řešeními algebraických rovnic. Mimo jiné ukázal, že řešení kvadratických rovnic je možno sestrojovat pravítkem a kružítkem.

Roku 1593 publikoval v Tours knihu *Zeteticorum libri quinque*, v níž vysvětlil a vyřešil řadu úloh; některé pocházely z Diofantovy *Aritmetiky*.

Ve stejném roce vydal v Tours spis *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus*, ve kterém se zabýval klasickými úlohami zdvojení krychle a trisekce úhlu, konstrukcí pravidelného sedmiúhelníka, vyšetřoval křivku kvadratrix, Hippokratovy měsíčky, které připouštějí kvadraturu, snažil se konstruovat tečny k Archimédově spirále apod. V tomto spise se objevilo vyjádření hodnoty π ve tvaru nekonečného součinu; jde o první nekonečný součin vůbec.

K roku 1593 se váže krásná historka s holandským vyslancem, který navštívil krále a podivoval se, že Francie nemá žádné matematiky. Vyslanec se oháněl dopisem holandského matematika Adriaena van Roomena (Adrianus Romanus, 1561–1615), který obsahoval úlohu na řešení algebraické rovnice 45. stupně a byl rozesílán tehdejším významným matematikům; v Roomenově adresáři však nebyl žádný francouzský matematik. Viète, který se na královu výzvu dostavil, nalezl ihned jeden kořen Roomenovy rovnice; druhý den pak určil dalších 22 kořenů. Našel tak všechny kladné kořeny dané rovnice. Své řešení problému publikoval roku 1595 v Paříži v práci *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum*. Roku 1601 se Viète setkal s van Roomenem v Paříži.

Roku 1600 vydal Viète v Paříži práci *De numerosa potestatum purarum, atque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus*, ve které rozpracoval základní postupy pro výpočet odmocnin a metodu přibližného řešení rovnic. Ve stejném roce sepsal kritické spisy k zavedení gregoriánského kalendáře.

François Viète zemřel v Paříži 13. prosince 1603.

Některé Viètovy práce byly publikovány již za jeho života; další práce vydali jeho žáci, skotský matematik Alexander Anderson (1582–1619) a srbský matematik Marino Ghetaldi (1566–1627), některé zůstaly v rukopisech. Roku 1615 vydal Anderson dvě Viètovy práce pod názvem *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*; jsou věnovány problematice algebraických rovnic.

Viètovo matematické dílo vydal roku 1646 v Leidenu pod názvem *Francisci Vietae Opera Mathematica* holandský matematik Frans van Schooten (1615?–1660),[24] profesor univerzity v Leidenu; toto vydání však neobsahuje *Canon mathematicus*. Reprint vyšel roku 1970.

[24] Též Franciscus van Schooten mladší; jeho otec, který měl stejné jméno, žil v letech 1581–1646.

Viètovo nové pojetí matematiky a jeho symbolika

Zásadní význam Viètova díla spočívá v jeho novém přístupu k algebře a k matematické symbolice. Viète je považován za jednoho ze zakladatelů algebry, někdy se o něm hovoří jako o *otci algebry*. Dal algebře nový směr, na který bylo vzápětí velmi plodně navázáno při budování analytické geometrie a při rozvoji infinitesimálního počtu. Algebra začala být naukou o obecných typech výrazů a rovnic; to, co bylo dokázáno obecně, se potom dalo využít v konkrétních případech. Pozornost začala být věnována hlavně strukturám výrazů, úloh a rovnic, nikoli jejich speciálním číselným vyjádřením.

Umění, které tu vykládám, je nové nebo alespoň bylo natolik pokaženo časem a znetvořeno vlivem barbarů, že jsem považoval za potřebné dát mu úplně nový tvar .... Všichni matematici věděli, že pod jejich algebrou a almukabalou byly ukryty skvělé poklady, ale neuměli je najít; úlohy, které považovali za nejtěžší, se dají zcela snadno řešit desítkami pomocí našeho umění, které je proto nejspolehlivější cestou pro matematická bádání.[25]

Podle Viètova pojetí je algebra *královskou cestou* ke geometrii, ke geometrickým a trigonometrickým aplikacím, metodou k získávání nových výsledků. Nazýval ji *ars analytica* (*analytické umění*). Pečlivě rozlišoval obecný symbolický počet, tzv. vidovou logistiku (*logistica speciosa*), a číselnou logistiku, konkrétní číselný počet (*logistica numerosa*, resp. *logistica numeralis*).

Viètova *logistica speciosa* je souborem aritmetických operací a početních postupů; operuje s veličinami geometrického charakteru, které jsou označovány písmeny a které mají „rozměr" (délka, obsah, objem, obsah-obsah, obsah-objem, objem-objem atd.); dostal tak celou hierarchii skalárů různých druhů (*species* – vid, druh; odtud *logistica speciosa*). Viète tak navázal na řeckou geometrickou algebru, oživil i tzv. *zákon homogenity*: sčítat a odčítat je možno jen veličiny stejného rozměru (délku s délkou, obsah s obsahem, objem s objemem atd.), násobením vznikají veličiny vyššího rozměru (délka vynásobená obsahem je objem, obsah vynásobený objemem je obsah-objem atd.), dělením vznikají veličiny nižšího rozměru (objem dělený délkou je obsah, obsah-obsah dělený objemem je délka apod.). Viètova *logistica speciosa* operuje s abstraktními symboly, je to symbolický počet.

Viète důsledně dbal na dodržování zákona homogenity; byla to však částečně brzda dalšího vývoje a proto byl brzy odstraněn. Přestože vyvinul celou hierarchii skalárů, měl do jisté míry pochybnosti o jejich smyslu i o smyslu rovnic vyšších stupňů. Postrádal totiž přirozenou geometrickou interpretaci; vždyť v životě se setkáváme nejvýše se třetí dimenzí.

Viètova *logistica numerosa* představovala operování s konkrétně zadanými číselnými veličinami a jejich vztahy; na ni se aplikovala teoreticky založená *logistica speciosa.*

[25] ***Introduction à l'art analytique***, Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche 1(1868), str. 227.

Æque in homogeneis,
Latitudo in longitudinem facit Planum.
Latitudo in Planum facit Solidum.
Latitudo in Solidum facit Plano planum.
Latitudo in Plano-planum facit Plano-ſolidum.
Latitudo in Plano-ſolidum facit Solido-ſolidum.
& permutatim.
Planum in Planum facit Plano-planum.
Planum in Solidum facit Plano-ſolidum.
Planum in Plano-planum facit Solido-ſolidum.
& permutatim.
Solidum in Solidum facit Solido-ſolidum.
Solidum in Plano-planum facit Plano-plano-ſolidum.
Solidum in Plano-ſolidum facit Plano-ſolido-ſolidum.
Solidum in Solido-ſolidum facit Solido-ſolido-ſolidum.
& permutatim, eoque deinceps ordine.

Denominationes ortorum ex adplicatione à ſcandentibus proportionaliter ex genere ad genus gradatim magnitudinibus iſto prorſus modo ſe habent:
Quadratum adplicatum Lateri reſtituit Latus.
Cubus adplicatus Lateri reſtituit Quadratum.
Quadrato-quadratum adplicatum Lateri reſtituit Cubum.
Quadrato-cubus adplicatus Lateri reſtituit Quadrato-quadratum.
Cubo-cubus adplicatus Lateri reſtituit Quadrato-cubum.
& permutatim, id eſt Cubus adplicatus Quadrato reſtituit Latus. Quadrato-quadratum Cubo latus &c. Rurſus,
Quadrato-quadratum adplicatum Quadrato reſtituit Quadratum.
Quadrato-cubus adplicatus Quadrato reſtituit Cubum
Cubo-cubus adplicatus Quadrato reſtituit Quadrato quadratum,
& permutatim. Rurſus.
Cubo-cubus adplicatus Cubo reſtituit Quadrato quadratum.
Quadrato-cubo-cubus adplicatus Cubo reſtituit Quadrato-cubũ.
Cubo-cubo-cubus adplicatus Cubo reſtituit Cubo cubum.
& permutatim, eoque deinceps ordine.

Ukázky z Viètovy knihy *In artem analyticem isagoge*
(násobení známých veličin)
(dělení neznámých veličin)

Prakticky po celé 16. století se pracovalo pouze s konkrétně zadanými úlohami či rovnicemi. Viète začal jako první matematik označovat pomocí písmen i veličiny známé, zavedl *koeficienty* a *parametry*.[26] Vtipným způsobem rozlišil ve své symbolice veličiny *známé* a *neznámé*. Neznámé veličiny, kterých je zpravidla „méně“, označoval samohláskami A, E, I, O, U, Y; známé veličiny, kterých je zpravidla „více“, označoval souhláskami: $B, C, D, \ldots$. Viète zavedl i termín *koeficient*; ve výrazu

$$(A+B)^2 + D(A+B) \ ,$$

kde A je neznámá a B, D známé veličiny, nazval veličinu D *délkovým koeficientem* (*longitudo coefficiens*).

Viète užíval symboly $+$, $-$, zlomkovou čáru, místo závorek dělal čáru nad celým výrazem; tato čára spolu s volně načrtnutým písmenkem r (z latinského *radix*) vedla k dnešnímu symbolu odmocniny. Místo znaku pro násobení používal Viète slůvko *in*, místo znaku rovnosti psal *aequatur* apod. Pro rozměry neznámých veličin užíval Viète tuto stupnici: *latus* (resp. *radix*) *quadratum, cubus, quadrato-quadratum, quadrato-cubus, cubo-cubus, quadrato-quadrato-cubus, quadrato-cubo-cubus, cubo-cubo-cubus* atd. První, druhou a třetí mocninu neznámé značil tedy

$$A \ , \quad A \ quadratum \ , \quad A \ cubus \ ,$$

devátá mocnina neznámé byla psána

$$A \ cubo\text{-}cubo\text{-}cubus \ .$$

Pro rozměry známých veličin užíval Viète tuto stupnici: *latitudo* nebo *longitudo, planum, solidum, plano-planum, plano-solidum, solido-solidum, plano-plano-solidum, plano-solido-solidum, solido-solido-solidum* atd. První, druhou a třetí mocninu známých veličin (tj. koeficientů nebo parametrů) značil

$$B \ , \quad B \ plano \ , \quad B \ solido \ ,$$

vyšší mocniny opět utvářel pomocí nižších, např. šestou či devátou mocninu koeficientu B zapisoval

$$B \ solido\text{-}solidum \ , \qquad \text{resp.} \qquad B \ solido\text{-}solido\text{-}solidum \ .$$

Pro zajímavost uveďme několik příkladů Viètovy symboliky.
Rovnici $bx^2 + dx = z$ zapisoval Viète v tvaru

$$B \ in \ A \ quadratum, \ plùs \ D \ plano \ in \ A, \ aequari \ Z \ solido \ ,$$

rovnici $bx^n - x^{m+n} = z$ v tvaru

$$B \ parabola \ in \ A \ gradum - A \ potestate \ aequatur \ Z \ homogenae$$

---

[26] Vzpomeňme si, že se na základní škole začalo hovořit o algebře v tom okamžiku, kdy se začalo „počítat s písmeny“; i proto je Vète nazýván *otcem algebry*.

a rovnici $x^3 + 3b^2x = 2z^3$ v tvaru

$$A\ cubus + B\ plano\ 3\ in\ A\ aequari\ Z\ solido\ 2$$

(povšimněme si, že je vždy zachován zákon homogenity) a Cardanův vzorec pro tuto rovnici v tvaru

$$\sqrt{C\ \sqrt{B\ plano\text{-}plano\text{-}plani + Z\ solido\text{-}solido} + Z\ solido} -$$

$$- \sqrt{C\ \sqrt{B\ plano\text{-}plano\text{-}plani + Z\ solido\text{-}solido} - Z\ solido}\ .$$

Zatímco v obecném symbolickém počtu (*logistica speciosa*) nám Vièteova symbolika připadá nesmírně toporná a nepřehledná, při numerickém počítání (*logistica numerosa*) je celkem přijatelná. Pro mocniny neznámé užívá Viète symboly N, Q, C (od slov *numerus, quadratum, cubus*).
Např. rovnici $x^3 - 3x = 1$ zapisuje v tvaru

$$1C - 3N\ aequatur\ 1$$

a rovnici $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$ v tvaru

$$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N\ aequatur\ 120\ .$$

Je třeba poznamenat, že Vièteovo značení není vždy důsledné, během let se vyvíjelo. Srovnáme-li však několik současných učebnic po stránce terminologie a symboliky, nalezneme rovněž řadu odlišností; dokonce i tehdy, jde-li o učebnice téhož autora.

Poznamenejme ještě, že písmena užívali ve starověku např. Eukleides a Archimédes, v patnáctém a šestnáctém století např. Pacioli, Cardano a Bombelli. Viète však dospěl podstatně dále, neboť jeho symbolika nebyla zaměřena k řešení jednotlivých konkrétních úloh, ale byla vybudována a využívána k hledání obecných zákonitostí, vytvářela nový kalkul. Přestože nedoznala velkého rozšíření (užíval ji však např. P. Fermat (1601–1665)), byla výraznou inspirací a mocným podnětem pro další pokrok.

Vièteovy matematické výsledky

François Viète podal ve svém díle mimo jiné úplný výklad problematiky řešení algebraických rovnic prvních čtyř stupňů. Pracoval jen s kladnými racionálními čísly, neuznával záporná ani komplexní čísla, k základní větě algebry proto nemohl dojít. Jeho práce nebyly příliš rozšířené a známé, přesto podstatně ovlivnily další vývoj matematiky, zejména algebry.

V práci *De emendatione aequationum* podal Viète novou metodu řešení kubické rovnice. Uvažoval rovnici

$$x^3 + 3ax = 2b\ ,$$

koeficienty uvažoval z metodických důvodů ve speciálním tvaru, a zavedl novou neznámou u substitucí $a = u^2 + xu$. Po dosazení došel ke kvadratické rovnici

$$\left(u^3\right)^2 + 2bu^3 = a^3$$

s neznámou u^3. Odtud získal hodnotu neznámé u,

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{a^3 + b^2} - b} \ ,$$

a z výše uvedeného vztahu $a = u^2 + xu$ vypočítal neznámou x.

Pokud bychom zavedli druhou pomocnou neznámou v substitucí $a = v^2 - xv$, pak bychom po dosazení došli ke kvadratické rovnici

$$\left(v^3\right)^2 - 2bv^3 = a^3$$

s neznámou v^3. Odtud bychom získali neznámou v,

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{a^3 + b^2} + b} \ .$$

Nyní snadno zjistíme, že $x = v - u$; dostáváme tak

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{a^3 + b^2} + b} - \sqrt[3]{\sqrt{a^3 + b^2} - b} \ ,$$

což je Cardanův vzorec.

Viète dal do souvislosti řešení kubické rovnice v případě, kdy nastane casus irreducibilis, s problémem trisekce úhlu. Stačí si připomenout vzorec

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos\varphi$$

a uvědomit si, že problémem trisekce je určit ze známé hodnoty $\cos 3\varphi = b$ hodnotu $\cos\varphi = x$, tj. výše uvedený vzorec odpovídá kubické rovnici

$$b = 4x^3 - 3x \ .$$

Viètovo jméno je spjato se vzorci, které svazují kořeny algebraické rovnice a její koeficienty. Např. pro kvadratickou rovnici

$$x^2 + px + q = 0$$

s kořeny x_1, x_2 je

$$x_1 + x_2 = -p \ , \qquad x_1 x_2 = q \ ,$$

CAPUT XIV.

Collectio quarta.

THEOREMA I.

Si $\overline{B+D}$ in A − A quad., æquetur B in D: A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.

3N − 1Q, æquatur 2. fit 1 N 1, vel 2.

THEOREMA II.

Si A cubus $\overline{-B-D-G}$ in A quad. $\overline{+B\text{ in }D+B\text{ in }G+D\text{ in }G}$ in A, æquetur B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1C − 6Q + 11N, æquatur 6. Fit 1 N 1, 2, vel 3.

THEOREMA III.

Si $\overline{B\text{ in }D\text{ in }G+B\text{ in }D\text{ in }H+B\text{ in }G\text{ in }H+D\text{ in }G\text{ in }H}$ in A $\overline{-B\text{ in }D-B\text{ in }G-B\text{ in }H-D\text{ in }G-D\text{ in }H-G\text{ in }H}$ in A quad. $\overline{+B+D+G+H}$ in A cubum − A quad.quad., æquetur B in D in G in H: A explicabilis est de qualibet illarum quatuor B, D, G H.

50N − 35Q + 10C − 1QQ, æquatur 24. fit 1N 1, 2, 3, vel 4.

THEOREMA IV.

Si A quadrato-cubus $\overline{-B-D-G-H-K}$ in A quad.quad. $\overline{+B\text{ in }D+B\text{ in }G+B\text{ in }H+B\text{ in }K+D\text{ in }G+D\text{ in }H+D\text{ in }K+G\text{ in }H+G\text{ in }K+H\text{ in }K}$ in A cubum $\overline{-B\text{ in }D\text{ in }G-B\text{ in }D\text{ in }H-B\text{ in }D\text{ in }K-B\text{ in }G\text{ in }H-B\text{ in }G\text{ in }K-B\text{ in }H\text{ in }K-D\text{ in }G\text{ in }H-D\text{ in }G\text{ in }K-D\text{ in }H\text{ in }K-G\text{ in }H\text{ in }K}$ in A quad. $\overline{+B\text{ in }D\text{ in }G\text{ in }H+B\text{ in }D\text{ in }G\text{ in }K+B\text{ in }D\text{ in }H\text{ in }K+B\text{ in }G\text{ in }H\text{ in }K+D\text{ in }G\text{ in }H\text{ in }K}$ in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC − 15QQ + 85C − 225Q + 274N, æquatur 120. Fit 1 N 1, 2, 3, 4, vel 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

FINIS.

Ukázka z Viètovy knihy *De emendatione aequationum*
(Viètovy vzorce)

pro kubickou rovnici

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s kořeny x_1, x_2, x_3 je

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p\,, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q\,, \qquad x_1x_2x_3 = -r\,.$$

Viète tyto vztahy formuluje v závěru své práce *De emendatione aequationum* pro rovnice druhého až pátého stupně. Ve Viètově symbolice má tento výsledek pro kubickou rovnici tento tvar:

$$\textit{Si A cubus } \overline{-B - D - G} \textit{ in A quad. } \overline{+B \textit{ in } D + B \textit{ in } G + D \textit{ in } G} \textit{ in } A\,,$$
aequetur B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

V dnešní symbolice by bylo možno tento výsledek zapsat takto: jestliže

$$x^3 + (-b - d - g)x^2 + (bd + bg + dg)x = bdg\,,$$

potom x je rovno libovolné ze tří veličin b, d, g.

Pro kvadratickou rovnici byly tyto vztahy známé italským matematikům již v první polovině 16. století, Cardano znal rovněž vztah kořenů kubické rovnice a koeficientu u druhé mocniny neznámé.

Z dalších Viètových výsledků připomeňme jeho vzorec, který udává číslo $\frac{2}{\pi}$ pomocí nekonečného součinu. Tento výsledek podstatně inspiroval např. Eulera.

F. Viète uvažoval pravidelné n-úhelníky vepsané do kruhu o poloměru r, kde $n = 4, 8, 16, 32, \ldots$. Ukázal, že pro obsahy S_n těchto n-úhelníků platí vztah

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \cos\frac{\pi}{n}$$

(výpočet není obtížný, obsah S_n se snadno vyjádří jako n-násobek obsahu rovnoramenného trojúhelníka s rameny délky r, která svírají úhel $\frac{2\pi}{n}$). Nyní je

$$\frac{S_4}{S_8} \cdot \frac{S_8}{S_{16}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{2^k}}{S_{2^{k+1}}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^k}\,,$$

tj.

$$\frac{S_4}{S_{2^{k+1}}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^k}\,.$$

Představíme-li si, že do uvažovaného kruhu vepisujeme pravidelné mnohoúhelníky se stále se zvětšujícím počtem stran (tj. k jde k nekonečnu), pak levá strana předchozí rovnosti se blíží k hodnotě

$$\frac{2r \cdot r}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Odtud

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \ldots\,.$$

Použijeme-li známý vzorec pro kosinus polovičního úhlu, dostaneme vztah

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots .$$

Poznamenejme, že Viète již před rokem 1579 vypočetl hodnotu čísla π na devět desetinných míst. Při výpočtu však vyšel z pravidelného šestiúhelníka.[27]

Zastavme se ještě u rovnice

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12\,300x^{39}+\cdots+95\,634x^5-3\,795x^3+45x=a\ ,$$

kde

$$a=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}\ ,$$

kterou předložil matematikům roku 1593 A. van Roomen; zároveň uvedl speciální případ své rovnice: pro

$$a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

je řešením

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\ .$$

Viète si uvědomil, že rovnice odpovídá vzorci, který udává hodnotu $\sin\varphi$ pomocí hodnoty $\sin\frac{\varphi}{45}$ a že tedy je možno najít řešení pomocí tabulek. Určil 23 kladných řešení tvaru

$$\sin\left(\frac{\varphi}{45}+k\cdot\frac{2\pi}{45}\right)\ .$$

Viètova metoda přibližného řešení rovnic

Ve Viètově práci *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione*, která byla napsána roku 1591 a publikována v Paříži roku 1600, je vyložena zajímavá metoda přibližného řešení algebraických rovnic. Byla používána během celého 17. století, později byla postupně nahrazována tzv. Newtonovou metodou, která byla podstatně jednodušší.

Kořen algebraické rovnice hledá Viète v tvaru

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n\ ,$$

[27] Roku 1593 vypočetl A. van Roomen hodnotu π na 15 míst, roku 1610 Ludolf van Ceulen (1540–1610) na pětatřicet desetinných míst. Podrobněji viz např. J. Veselý: *π aneb 3,141592...*, Učitel matematiky 3(1995), č. 3(15), 1–10, č. 4(16), 1–13.

kde x_n, x_{n-1} atd. jsou po řadě jednotky, desítky, ... hledaného kořenu, index n (tj. počet řádů hledaného kořenu) je třeba na začátku zjistit podle konkrétního zadání rovnice. Poznamenejme ještě, že Viète vždy hledá pouze kladný kořen uvažované rovnice.

Svoji metodu objasňuje na jednoduchém příkladu, hledá kořen kvadratické rovnice $x^2 + cx = a$. Činí to výhradně z metodických důvodů, neboť kořeny kvadratické rovnice je možno snadno vypočítat přímo. V následujícím odstavci budeme jeho metodu reprodukovat.

Kořen rovnice $x^2 + cx = a$ předpokládejme v tvaru $x = x_1 + x_2 + x_3$, kde x_1, x_2, x_3 jsou stovky, desítky a jednotky. Po dosazení získáme vztah

$$x_1^2 + cx_1 + (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 + [2(x_1 + x_2) + c]x_3 + x_3^2 = a \ .$$

Odhadem určíme x_1 (na stovky) ze vztahu $x_1^2 = a$ (na levé straně zanedbáme všechny členy až na jeden). Dále vypočteme

$$r_1 = a - x_1^2 - cx_1 \ .$$

Je tedy

$$(2x_1 + c)x_2 + x_2^2 + [2(x_1 + x_2) + c]x_3 + x_3^2 = r_1 \ .$$

Odhadem určíme x_2 (na desítky) ze vztahu

$$(2x_1 + c)x_2 = r_1$$

(na levé straně jsme opět zanedbali většinu členů). Dále vypočteme

$$r_2 = r_1 - (2x_1 + c)x_2 - x_2^2 \ .$$

Je tedy

$$[2(x_1 + x_2) + c]x_3 + x_3^2 = r_2 \ .$$

Odhadem nyní určíme x_3 ze vztahu

$$[2(x_1 + x_2) + c]x_3 = r_2 \ .$$

Na závěr prověříme, zda $x = x_1 + x_2 + x_3$ je „přibližným řešením“ dané rovnice; tento pojem však nebyl ve Viètově době ještě přesně specifikován.

Poznamenejme ještě, že Viètovou metodou můžeme kořeny algebraických rovnic aproximovat s libovolnou přesností, stačí předpokládat, že hledaný kořen x má patřičný počet desetinných míst.

Viète demonstruje svoji metodu přibližného řešení algebraické rovnice na konkrétním příkladu, řeší kvadratickou rovnici $x^2 + 7x = 60\,750$. Postupujme jeho metodou.

Odhadem určíme x_1 (na celé stovky) ze vztahu $x_1^2 = 60\,750$. Tedy $x_1 = 200$ (současně jsme zjistili, které řády hledaného řešení máme uvažovat).

Nyní $r_1 = 60\,750 - x_1^2 - 7x_1 = 60\,750 - 41\,400 = 19\,350$.

Odhadem určíme x_2 (na desítky) ze vztahu $(2x_1 + 7)x_2 = 407x_2 = 19\,350$. Tedy $x_2 = 40$.

Nyní $r_2 = 19\,350 - (2x_1 + 7)x_2 - x_2^2 = 19\,350 - 17\,880 = 1\,470$.

Odhadem určíme x_3 ze vztahu $[2(x_1 + x_2) + c]x_3 = 487x_3 = 1470$. Tedy $x_3 = 3$.

Odtud $x = 243$; dosazením zjistíme, že číslo 243 je dokonce kořenem dané rovnice.

Ukažme nyní Viètovu metodu hledání přibližné hodnoty kořene kubické rovnice

$$x^3 + px = q \;, \qquad \text{kde} \quad p, q > 0 \;.$$

Zřejmě je $x < \sqrt[3]{q}$, zjistili jsme tedy nejvyšší řád x_1 kořene x. Pišme $x = x_1 + a$, kde a je „zbytek“. Po dosazení je

$$x_1^3 + 3x_1^2 a + 3x_1 a^2 + a^3 + px_1 + pa = q \;,$$

tj.

$$\left(3x_1^2 + 3x_1 a + p\right) \cdot a + a^3 = r_1 = q - x_1^3 - px_1 \;.$$

Protože známe x_1, známe r_1. Zanedbáme a^3, v závorce položíme $a = 1$ a ze vztahu

$$\left(3x_1^2 + 3x_1 + p\right) \cdot a = r_1$$

odhadneme nejvyšší řád x_2 čísla a. Pišme $a = x_2 + b$, tj. $x = x_1 + x_2 + b$, kde b je „zbytek“. Po dosazení do původní rovnice, tj. ze vztahu

$$(x_1 + x_2 + b)^3 + p(x_1 + x_2 + b) = q \;,$$

snadno dojdeme k rovnosti

$$\left[3(x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 + x_2)b + p\right] \cdot b + b^3 = r_2 = q - (x_1 + x_2)^3 - p(x_1 + x_2) \;.$$

Protože známe x_1, x_2, známe r_2. Zanedbáme b^3, v závorce položíme $b = 1$ a ze vztahu

$$\left[3(x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 + x_2) + p\right] \cdot b = r_2$$

odhadneme nejvyšší řád čísla b atd.

Thomas Harriot, William Oughtred, Albert Girard

Za Viètovy pokračovatele bývají často označováni T. Harriot, W. Oughtred a A. Girard. Jejich dílo podstatně nové výsledky nepřineslo, další vývoj však ovlivnilo nepřímo. Přínos těchto tří matematiků zůstal ve stínu Descartovy *Géométrie*, která vyšla roku 1637.

Angličan Thomas Harriot se narodil roku 1560 v Oxfordu, kde též vystudoval. Byl matematikem, fyzikem, astronomem a geografem, v letech 1585–1586 prováděl kartografické práce ve Virginii, nynější severní Karolině (*A Briefe and True Report of the New Found Land of Virginia*, 1588). Jako první v Anglii, ve stejné době jako Galileo Galilei v Itálii, pozoroval dalekohledem Měsíc, planety, Jupiterovy měsíce, skvrny na Slunci; velký zájem měl o komety, nakreslil mapu Měsíce. Dopisoval si s Galileim a Keplerem, zkoumal lom světla a uvažoval o výkladu duhy. Při zpracovávání výsledků měření používal metody interpolace, zabýval se sférickou trigonometrií, našel vzorec pro výpočet obsahu sférického trojúhelníka. V jeho pracích se objevily úvahy o dvojkové soustavě. Zemřel 2. července 1621 v Londýně.

Roku 1631, deset let po Harriotově smrti, vyšla jeho kniha *Artis analyticae praxis ad aequationes algebricas resolvendas* (*Užití analytického umění k řešení algebraických rovnic*), ve které poměrně efektivně vyložil teorii řešení rovnic a podstatně zjednodušil Viètův výklad i symboliku.

Místo velkých písmen, která zavedl ve své symbolice Viète, užíval Harriot malá písmena; mocniny zapisoval jako součiny, pracoval se symboly $+$, $-$, $=$ (rovnítko zavedl roku 1557 anglický matematik R. Recorde (1510–1558)), místo slovního označení „menší", „větší" užíval znaky $<$, $>$. Často převáděl všechny členy rovnice na jednu stranu, termínem „kanonická rovnice" rozuměl rovnici se separovaným absolutním členem. Např. rovnice

$$x^3 - 3bx^2 + 3b^2x = 2b^3 \ , \qquad x^3 - 3b^2x = 2c^3$$

zapisoval v tvaru

$$aaa - 3 \cdot baa + 3 \cdot bba = +\, 2 \cdot bbb \ , \qquad aaa - 3 \cdot bba = +\, 2 \cdot ccc \ .$$

Harriot konstruoval polynomy jako součiny lineárních dvojčlenů; patrně cítil, že rovnice n-tého stupně má v řadě případů n kořenů. Uvažoval např. rovnici

$$(a-b)(a-c)(a+d) = 0 \ ,$$

kde a je neznámá a b, c, d jsou konkrétní čísla. Roznásobením získal vztah

$$aaa - baa + bca - caa - bda + daa - cda = -bcd \ ,$$

kde člen na pravé straně neobsahuje neznámou a. Uvažoval, že rovnost nastane pro $a = b$ a $a = c$; ignoroval však případ $a = -d$. To souviselo s jeho odmítáním záporných a komplexních kořenů. Proto neformuloval obecný vztah mezi koeficienty a kořeny rovnic a nedospěl k základní větě algebry.

William Oughtred byl anglický matematik a kněz. Narodil se 5. března 1574 v Etonu (Buckinghamshire) v Anglii, do školy chodil v Etonu. Od roku 1592 studoval teologii v Cambridgi, přitom se zajímal o exaktní vědy; v letech 1595–1608 zde vyučoval (jeho žáky byli např. J. Wallis a Ch. Wren). Později působil jako kazatel v Albury (Surrey), kde 30. června 1660 zemřel. Věnoval se hlavně trigonometrii a logaritmům, publikoval několik knih na tato témata (*The circles* *of proportion*, 1632, *Trigonometrie*, 1657). Oughtredovy rukopisy byly vydány v Oxfordu roku 1667 pod názvem *Opuscula mathematica hactenus inedita.*

William Oughtred vydal roku 1631 v Londýně knihu *Clavis mathematicae* (*Klíč matematiky*), kterou později sám přeložil do angličtiny (*The Key of mathematics*, Londýn 1647). Rozvíjel v ní některé Viètovy myšlenky, zjednodušil jeho symboliku; neznámou a její mocniny značil

$$A\ ,\quad Aq\ ,\quad Ac\ ,\quad Aqq\ ,\quad Aqc\ ,\quad Acc\ ,\quad \ldots\ .$$

Algebru nazýval *vidovou aritmetikou* nebo *logistikou*, budoval ji na aritmetických principech; nejprve ukázal vlastnosti aritmetických operací na konkrétních číselných příkladech a teprve potom formuloval odpovídající pravidla symbolicky, tj. pomocí písmen. Pro násobení užíval symbol $\times$. Oughtredův spis byl dlouho užíván na anglických univerzitách.

Albert Girard se narodil v Saint-Mihiel v Lotrinsku, většinu života však strávil v Holandsku. Studoval na univerzitě v Leidenu, byl žákem Simona Stevina. Pracoval jako vojenský inženýr; zabýval se aritmetikou, algebrou, rovinnou a sférickou trigonometrií (obsahy sférických trojúhelníků a dalších útvarů ohraničených oblouky kružnic); v jeho knize o trigonometrii z roku 1626 byly poprvé užity zkratky sin, cos, tan. Girard psal francouzsky, překládal do francouzštiny Diofanta a byl editorem díla Simona Stevina. Zemřel 8. prosince 1632 v Leidenu.

Roku 1629 vydal v Amsterodamu knihu *Invention nouvelle en l'algèbre* (*Nové objevy v algebře*).[28] Jeho pohled na algebraickou problematiku byl již podstatně modernější. Girard uznával záporná čísla, nulu i komplexní čísla, záporné kořeny rovnic nazýval *řešení s minusem* a geometricky je interpretoval jako „pohyb nazpět", imaginární kořeny nazýval *solutions impossibles* (tj. *nemožná řešení*) a chápal, že jejich uznání umožňuje formulovat obecnější tvrzení. Jako první vyslovil základní větu algebry: algebraická rovnice n-tého stupně má právě n kořenů.[29] Např. rovnice $x^4 - 4x + 3 = 0$ má kořeny $1, 1, -1 \pm i\sqrt{2}$.

Girard rozvíjel teorii symetrických funkcí kořenů algebraické rovnice, ukazoval mimo jiné jejich vztah ke koeficientům rovnice (tzv. Viètovy vzorce – Cardano je znal pro kvadratický a kubický případ, Viète pro rovnice s kladnými členy), zkoumal i součty mocnin kořenů. Pro algebraickou rovnici

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

s kořeny $x_1, x_2, \ldots x_n$ definoval

$$S_m = x_1^m + \cdots + x_n^m\ , \qquad m = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Zjistil následující vztahy mezi S_i a koeficienty rovnice:

$$S_1 = -a_1\ , \qquad S_2 = a_1^2 - 2a_2\ , \qquad S_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3\ ,$$

[28] Kniha byla znovu vydána v Leidenu roku 1894.

[29] Roku 1609 vyslovil podobné tvrzení německý matematik P. Rothe († 1617).

$$S_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4 \ .$$

Girard rovněž studoval casus irreducibilis a ukázal jeho souvislost s trisekcí úhlu. Uvažoval rovnici

$$x^3 - px - q = 0 \ , \qquad \text{kde} \qquad p, q > 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27} \ .$$

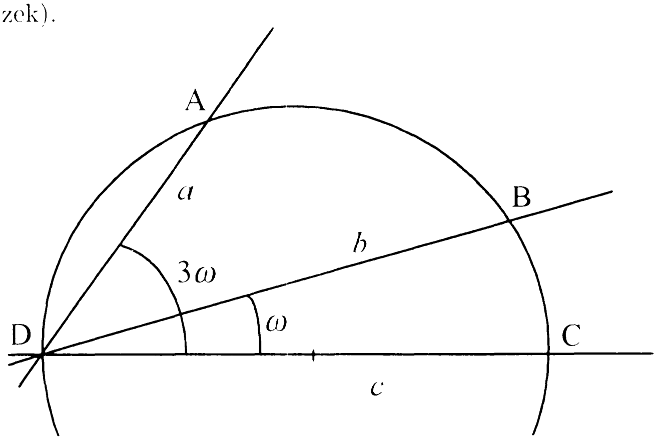
Z poslední nerovnosti plyne nerovnost

$$\frac{3q}{p} < 2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \ .$$

Označme

$$a = \frac{3q}{p} \ , \qquad c = 2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \ .$$

Uvažujme kružnici o průměru $DC = c$, její tětivu $DA = a$; úhel ADC označme 3ω (viz obrázek).



Uvažujme dále tětivu $DB = b$, která s průměrem DC svírá úhel ω. Nyní je

$$\cos 3\omega = \frac{a}{c} = 4\cos^3 \omega - 3\cos \omega \ .$$

Dosadíme-li za $\cos \omega = \frac{b}{c}$, dostaneme vztah

$$ac^2 = 4b^3 - 3bc^2 \ .$$

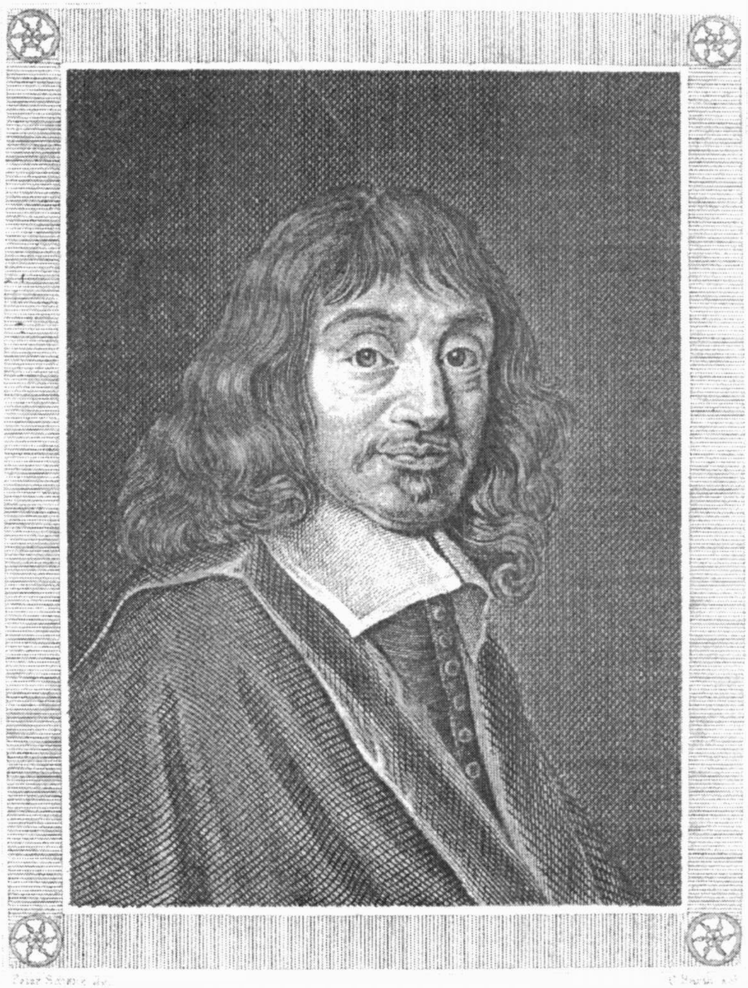
Dosadíme-li za a a c, dostaneme

$$b^3 - pb - q = 0 \ ,$$

tj. délka tětivy DB je kořenem kubické rovnice, od které jsme vyšli. Pokud bychom uměli algebraicky řešit casus irreducibilis, tj. najít kořen b, uměli bychom provést konstrukci trisekce úhlu.

Girard zasáhl i do symboliky. Rovnici $x^4 + 35x^2 + 24 = 10x^3 + 50x$ zapisoval v tvaru

$$1\ (4) + 35\ (2) + 24 = 10\ (3) + 50\ (1) \ .$$



René Descartes

René Descartes

René Descartes se narodil 31. března 1596 v La Haye mezi Tours a Poitiers, pocházel ze starého aristokratického rodu. V letech 1606–1614 studoval v jezuitské koleji La Flèche, studia dokončil na univezitě v Poitiers. Roku 1618 se stal na krátkou dobu dobrovolníkem holandského vojska prince Mořice Nassavského. Desátý listopad 1619 byl významným dnem Descartova života. Pochopil své životní poslání a snad došel k základním idejím své matematiky a filozofie.

V roce 1619 byl dobrovolníkem vojska kurfiřta Maxmiliána V. Bavorského, které 8. listopadu 1620 bojovalo na Bílé hoře u Prahy; nevíme však, zda se Descartes bitvy opravdu zúčastnil a zda v té době vůbec v Praze byl. Roku 1621 vojsko opustil a v následujících letech hodně cestoval. Jak později sám uváděl, využíval v mládí každé příležitosti, aby poznal dvory a armády. V srpnu 1619 se zúčastnil korunovace Ferdinanda II. (1578–1637) římským císařem, v létě 1623 volby papeže Urbana VIII., seznamoval se však i s vědci a mysliteli (Marin Mersenne (1588–1648), Simon Stevin, Snell van Roijen (W. Snellius, 1591–1626), Isaac Beeckmann (1588–1637) atd.). Několik let cestoval, prošel velký kus Evropy.

Koncem dvacátých let Descartes sepisoval *Regulae ad directionem ingenii* (*Pravidla pro vedení rozumu*), spis však zůstal nedokončen, publikován byl až roku 1701.

Roku 1629 natrvalo přesídlil do Holandska, kde byly příznivější podmínky pro vědecké bádání, filozofování i pro publikování prací. Chtěl mít klid na práci, proto tajil svá místa pobytu a často je měnil. Jeho životním heslem se stal verš z Ovidia:

Bene qui latuit, bene vixit. (*Dobře žil ten, kdo se dobře ukryl.*)

V Holandsku intenzívně pracoval, sepisoval svá díla, styk se světem mu zprostředkovala korespondence s Mersennem. Přátelil se s Konstantinem Huygensem (1596–1687), otcem fyzika a matematika Christiaana Huygense (1629–1695).

Roku 1633 připravoval Descartes do tisku knihu *Le monde ou Traité de la lumière* (*Svět aneb traktát o světle*); po procesu s Galileim se rozhodl tento spis nezveřejňovat a nikomu neukazovat, neboť byl postaven na heliocentrismu.

Roku 1637 vyšla v Leidenu slavná Descartova *Rozprava o metodě* (*Discours de la méthode*) jako úvod ke třem dalším jeho spisům *Dioptrika*, *Meteory* a *Geometrie* (*La dioptrique, Les météores et La géométrie*). V *Dioptrice* Descartes podal své učení o vidění a zobrazování v oku, zabýval se geometrickou optikou, zejména lomem světla. V *Meteorech* se snažil vysvětlit meteorologické jevy, v *Geometrii* podal mimo jiné základní myšlenku analytické geometrie a rozpracoval teorii algebraických rovnic.

Roku 1641 vyšla v Paříži Descartova kniha *Meditationes de prima philosophia* (*Úvahy o první filozofii*), ve které bylo znovu podáno Descartovo učení; jeho teorie poznání, fyzika a astronomie v souvislosti s metafyzikou, názory na uspořádání a vznik světa atd.

Des minimes de Paris

297

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion: Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Pp eſt

První stránka Descartovy *Géométrie*

Velký význam mělo pro Descarta přátelství s princeznou Alžbětou (1618–1680), dcerou falckého kurfiřta Fridricha (1596–1632), zimního krále. Alžběta byla všestranně nadaná, zabývala se filozofií, studovala matematiku a jazyky. Descartes s ní vyměnil mnoho dopisů o etice, přírodovědě, filozofii a psychologii. Připsal jí svou novou knihu *Principia philosophiae* (*Základy filozofie*), která vyšla roku 1644 v Amsterodamu.

Ve druhé polovině čtyřicátých let se Descartes zabýval anatomickými výzkumy živých těl, připravoval traktáty o popisu lidského těla a o utváření plodu.

Koncem roku 1649 vyšlo v Amsterodamu Descartovo pojednání *Les passions de l'ame* (*O zakoušeních duše*), ve kterém zpracoval otázky, o kterých si dopisoval s princeznou Alžbětou.

Na pozvání švédské královny Kristiny (1626–1689), dcery slavného a významného panovníka Gustava II. Adolfa (1594–1632), se Descartes na podzim roku 1649 vydal do Stockholmu. Kristina chtěla založit akademii věd a postavit Descarta do jejího čela. Descartes se však ve Stockholmu nachladil, dostal zápal plic a 11. února 1650 zemřel.

Descartovy spisy vyšly v jedenácti svazcích v letech 1824–1826 (Paříž, ed. V. Cousin) a ve dvanácti svazcích v letech 1897–1913 (Paříž, ed. Ch. Adam, P. Tannery), jeho korespondence v osmi svazcích v letech 1936–1963 (Paříž, ed. Ch. Adam, G. Milhaud).

Descartovo matematické dílo

Descartes byl matematikem, filozofem a přírodovědcem, dnes je nejvíce ceněn jeho přínos v matematice. Descartovy matematické myšlenky a výsledky jsou prezentovány zejména v jeho knize *Géométrie*,[30] v nedokončeném spise *Regulae ad directionem ingenii* a v korespondenci.

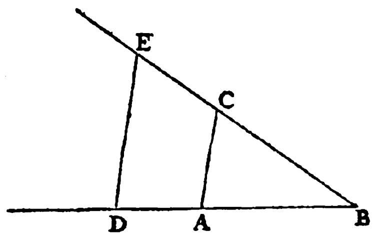
Významnou roli sehrál Descartes při rozšiřování číselných oborů. Často pracoval se zápornými čísly; ani pro něho však ještě nebyla zcela rovnocenná číslům kladným. Odvážně operoval i s komplexními čísly, která nazýval *imaginaire*. První písmeno tohoto slova užil roku 1777 Leonhard Euler k označení komplexní jednotky. Toto označení se však vytištěné objevilo až roku 1794.

René Descartes přišel s dalším výrazným zjednodušením symboliky. Známé veličiny začal značit písmeny $a, b, c, \ldots$, neznámé písmeny x, y, z. Pro zápis mocnin použil exponenty: $a^2, a^3, a^4, \ldots$; místo a^2 však často psal aa; snad proto, že v obou případech vystačil se dvěma znaky. Pro sčítání a odčítání užíval znaménka $+$ a $-$, místo rovnítka symbol podobný ležaté osmičce. Písmenem však označoval výhradně kladné číslo, tedy např. a představovalo číslo kladné, záporné číslo bylo třeba zapsat $-a$; nebylo-li jasné, zda jde o kladné či záporné číslo, použil Descartes místo symbolů $+, -$ několik teček a psal $\ldots a$. Často užíval tzv. *kanonický tvar rovnice*; všechny členy převedl na jednu stranu a na druhé nechal nulu.

[30] Během 17. století vyšla tato kniha několikrát: roku 1637 francouzsky, v letech 1649, 1659, 1683, 1695 latinsky.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

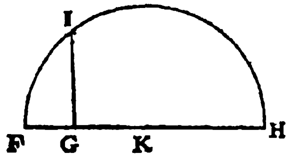


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commẽt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne

Druhá stránka Descartovy *Géométrie*

Descartes úspěšně odstranil Viètův zákon homogenity.

Pokud Viète uvažoval dvě délkové veličiny a, b, pak jejich součinem ab byla veličina plošná a podíl $\frac{a}{b}$ nebylo možno utvořit, neboť nemá žádný rozměr.

Descartes tento problém smetl se stolu velmi jednoduše. Zavedl jednotkovou délku e. Místo součinu ab vzal podíl $\frac{ab}{e}$ a místo podílu $\frac{a}{b}$ podíl $\frac{ae}{b}$ — všechny tři výrazy mají stejný „rozměr", jsou opět délkovými veličinami. Proto je možno bez obav počítat a „rozměry" veličin není třeba uvažovat. Descartovo zdůvodnění je geometrické (viz první obrázek na vedlejší stránce), vychází z podobnosti. Je-li AB jednotková úsečka, je součin úseček BD a BC roven úsečce BE, a podíl úseček BE a BD je roven úsečce BC. Podobně bere Descartes místo odmocniny $\sqrt{a}$ odmocninu $\sqrt{ae}$; jeho geometrické zdůvodnění (viz druhý obrázek na vedlejší stránce) využívá Eukleidovu větu o výšce. Je-li GF jednotková úsečka, pak odmocninou úsečky GH je úsečka GI.

Descartes výrazným způsobem přispěl k vývoji algebry. V jeho *Geometrii* najdeme i tzv. *základní větu algebry*: *každá rovnice může mít tolik různých kořenů, kolik je její stupeň.* Exaktní důkazy podal až Karl Friedrich Gauss (1777–1855).

Descartes ukazuje, jak rovnice vyšších stupňů vznikají postupným násobením rovnic nižších stupňů.

Vynásobením rovnic

$$x - 2 = 0 \qquad \text{a} \qquad x - 3 = 0$$

získává rovnici

$$x^2 - 5x + 6 = 0\ ,$$

dalším vynásobením rovnicí $x - 4 = 0$ dostává rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

a po dalším vynásobení rovnicí $x + 5 = 0$ dospěje k rovnici

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0\ ,$$

která má tři „pravdivé" kořeny $2, 3, 4$ a jeden „lživý" kořen 5 (záporný kořen -5). Následným postupným dělením se Descartes opět vrací k rovnici $x - 2 = 0$. Dochází tak k tvrzení, které dnes můžeme vyjádřit ekvivalencí:

Prvek a je kořenem polynomu p právě tehdy, když $x - a$ dělí polynom p.

Při takovýchto úvahách patrně dospěl k znaménkovému pravidlu, které nese jeho jméno: rovnice má tolik kladných kořenů, kolik je v posloupnosti jejích koeficientů znaménkových změn a tolik záporných kořenů, kolik je znaménkových „nezměn". Ve výše uvedené rovnici čtvrtého stupně jsou v posloupnosti

$$+1\ , \quad -4\ , \quad -19\ , \quad +106\ , \quad -120$$

tři znaménkové změny a jedna „nezměna“, což odpovídá třem kladným kořenům a jednomu zápornému. Situace však tak jednoduchá není. I Descartes věděl, že pravidlo neplatí obecně; existence komplexních kořenů je naruší. Upřesnění znaménkového pravidla bylo publikováno roku 1707 v Newtonově knize *Arithmetica universalis.*

Při práci s rovnicemi užíval Descartes řadu postupů, které odpovídají substitucím.

Descartovi je přisuzována i tzv. *metoda neurčitých koeficientů.* V jeho knize *Géométrie* je na jednom místě bez bližšího vysvětlení uvedeno, že se od rovnice

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$$

dá dojít k tzv. „redukované“ rovnici

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

(jde o tzv. *kubickou rezolventu*). F. van Schooten ve svých komentářích vysvětloval tento Descartův postup obratem, kterému se někdy říká *Descartův princip neurčitých koeficientů.*

Vyjdeme ze vztahu

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \ ,$$

kde a, b, c, d jsou tzv. neurčité koeficienty. Po roznásobení a porovnání koeficientů dojdeme k soustavě tří rovnic; po eliminaci neznámých získáme výše uvedenou rovnici šestého stupně — jde však o rovnici třetího stupně v y^2. Tuto rovnici umíme vyřešit, je $y^2 = 16$. Odtud vyplyne rozklad polynomu čtvrtého stupně na součin dvou polynomů stupně druhého:

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 7) \ ;$$

kořeny uvažované rovnice čtvrtého stupně jsou $2 \pm i$, $-2 \pm \sqrt{3} \cdot i$.

Na základě svých zkušeností s algebraickými rovnicemi byl Descartes přesvědčen, že klasické problémy zdvojení krychle a trisekce úhlu nejsou pravítkem a kružítkem řešitelné. Patrně si uvědomil, že tyto úlohy vedou na *ireducibilní* (nerozložitelné) algebraické rovnice třetího stupně, zatímco eukleidovské konstrukce pravítkem a kružítkem odpovídají postupnému řešení soustav lineárních a kvadratických rovnic. Neřešitelnost těchto problémů však exaktně dokázal francouzský matematik P. L. Wantzel roku 1837, tj. dvě stě let po vydání Descartovy *Géométrie.*

Descartes je zakladatelem analytické geometrie. Základní myšlenkou této disciplíny je vyjádření rovinných (nebo prostorových) geometrických útvarů (křivek, resp. ploch) algebraickými rovnicemi, které popisují vztahy souřadnic bodů těchto útvarů. Nelze říci, že by Descartes rozpracoval analytickou geometrii alespoň částečně v té podobě, jak je dnes známa ze základních kursů na středních nebo vysokých školách. Načrtnul však základní myšlenku využití souřadnic, ukázal souvislost mezi křivkami v rovině a algebraickými rovnicemi o dvou neznámých, vysvětlil, že zadání geometrické úlohy lze popsat délkami určitých úseček (souřadnicemi daných bodů), příslušné vztahy je možno vyjádřit algebraickými rovnicemi a že řešením těchto rovnic lze získat i řešení uvažované geometrické úlohy. V jeho *Geometrii* nenalezneme *kartézské souřadnice* (chybí druhá osa i kolmost), ani odvozování rovnic přímek či křivek (např. kuželoseček). Je však popsána, jak je pro Descarta typické, *metoda* vnášející aparát algebry do geometrie, tj. hlavní myšlenka analytické geometrie. Vedle využití algebry v geometrii ukazuje Descartes v partii o algebraických rovnicích i využití geometrie v algebře; rovnice řeší graficky, jejich kořeny získává jako průsečíky křivek.

Descartes neužíval druhou osu; zatímco závisle proměnná mohla nabývat i záporných hodnot, nezávisle proměnná byla vždy kladná.

Metoda souřadnic, tj. nanášení dvou proměnných veličin, které jsou spolu svázány jakýmsi vztahem, ve dvou různých směrech, se objevila už u Apollonia z Pergy (260? – 170?), využíval ji Pappos z Alexandrie (3. stol. n. l.), později např. Nicole Oresme (1323?–1382); souřadnice na sféře byly užívány již ve starověku. Analytická geometrie však podstatnou měrou využívá algebraické postupy, úpravy algebraických výrazů, práci s rovnicemi; rozvoj analytické geometrie byl podmíněn rozvojem algebry. Analytická geometrie vznikla až v okamžiku, kdy byla vytvořena efektivní algebraická symbolika a odstraněn zákon homogenity. A to je výraznou zásluhou René Descarta.

Poznamenejme, že k základním myšlenkám analytické geometrie dospěl ve stejné době jako Descartes též francouzský právník a matematik Pierre de Fermat. Jeho dílo *Ad locos planos et solidos isagoge* (*Úvod do studia rovinných a prostorových míst*) z roku 1679 šlo dokonce v analytické geometrii dále než Descartova *Géométrie*: najdeme zde kartézské souřadnice, rovnice přímek a kuželoseček atd. Nemělo však výraznější vliv. Jednak bylo zveřejněno později než Descartova *Géométrie*, jednak užívalo topornou symboliku Viètovu.

Descartes dospěl při rozvíjení těchto idejí ke značnému pokroku v chápání proměnné veličiny a funkční závislosti. Závisle proměnnou veličinou byla např. délka úsečky, která se rovnoběžně posouvala a její koncový bod vytvářel křivku, nezávisle proměnnou byla vzdálenost krajního bodu této úsečky od pevně zvoleného bodu, která určovala okamžitou polohu pohybující se úsečky.

Descartes také významným způsobem využil svoji zjednodušenou algebraickou symboliku. Díky odstranění zákona homogenity chápal rovnice jako vztahy mezi čísly; ta odpovídala délkám úseček. Užívání kanonického tvaru rovnic (např. $P(x) = 0$) postupně vedlo k tomu, že se na levou stranu můžeme dívat jako na funkční předpis. Funkce byla analytickým výrazem, kořeny rovnice byly průsečíky grafu uvažované funkce se základní osou. Navíc byl setřen geometrický rozdíl mezi rovnými a „křivými“ útvary; přímky a roviny odpovídají lineárním rovnicím, ostatní křivky a plochy rovnicím vyšších stupňů.

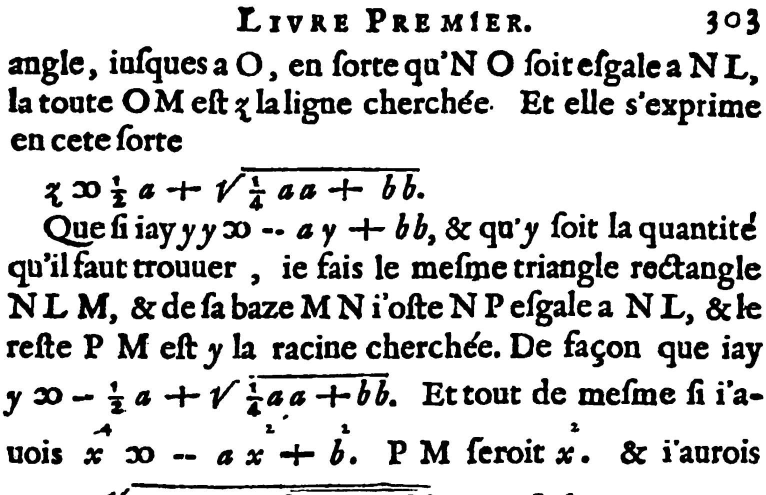
Znázornění funkcí v souřadnicové soustavě dávalo nejen dobrou představu, ale i cenné podněty k rozvoji infinitesimálního počtu. Chápání prostoru jako trojrozměrného kontinua později podstatnou měrou využila Newtonova fyzika.

Na závěr tohoto paragrafu stručně připomeňme další Descartovy matematické výsledky: algebraické metody nalezení tečen a normál algebraických křivek, studium křivek čtvrtého stupně (např. *Descartovy ovály*), kinematické vyjádření křivek mechanickými přístroji, koncepce mechanického přístroje, podle kterého bylo možno k daným veličinám a, b najít veličiny $x_1, \cdots, x_n$ takové, že

$$a : x_1 = x_1 : x_2 = \cdots = x_n : b ,$$

studium logaritmické spirály, infinitesimální metody výpočtu obsahu cykloidy, objev tzv. *Eulerova vzorce o mnohostěnech*, tj. rovnosti $s + v = h + 2$, která vyjadřuje vztah mezi počtem vrcholů v, hran h a stěn s konvexního mnohostěnu atd.

Descartovy myšlenky byly postupně rozvíjeny, jeho *Géométrie* měla velký vliv na další vývoj matematiky. Navazovali na ni např. John Wallis, Jan de Witt (1625–1672), v 18. století pak Guillaume de L'Hospital (1661–1704), I. Newton, L. Euler a další.


LIVRE PREMIER. 303

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute OM eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que ſi iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{- \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}}$: & ainſi des autres.

Ukázka Descartovy symboliky, část 7. stránky jeho *Géométrie*

John Wallis

John Wallis se narodil 23. listopadu 1616 v Ashfordu v Kentu, byl synem anglického kněze. Nejprve šel ve stopách svého otce; v Cambridgi získal všestranné klasické vzdělání, vystudoval teologii, byl vysvěcen a několik let působil jako kněz. Roku 1645 se oženil; přestěhoval se do Londýna, kde mu vyhovoval bohatší a podnětnější vědecký život. O dva roky později, kdy se mu dostal do rukou Oughtredův *Clavis mathematicae*, se začal intenzívně věnovat matematice; studoval potom hlavně klasické práce řeckých matematiků, dále díla Descarta, Keplera, Robervala, Torricelliho a Cavalieriho. Měl prý fenomenální paměť a byl výborný počtář; traduje se, že jednou v bezesné noci vypočetl zpaměti druhou odmocninu 53-místného čísla na 27 míst a ráno nadiktoval výsledek svého výpočtu.

Za anglické revoluce se Wallis proslavil rozluštěním tajných dopisů královských přívrženců,[31] které zachytili stoupenci Olivera Cromwella (1599–1658). Ten ho jmenoval roku 1649 profesorem geometrie v Oxfordu; na tomto místě Wallis zůstal i po restauraci království;[32] působil rovněž jako dvorní kaplan a krátce i jako univerzitní archivář. Byl rovněž aktérem několika sporů, zejména s Thomasem Hobbesem (1588–1679). Zemřel 28. října 1703 v Oxfordu.

John Wallis stál u zrodu londýnské Královské společnosti, jedné z nejstarších vědeckých společností, která byla oficiálně založena roku 1660; vznikla ze soukromých diskusních kroužků, které se scházely již ve čtyřicátých a padesátých letech. Roku 1662 byla tato společnost nazvána *Royal Society*, o tři roky později začala vydávat časopis *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. V počátečním období existence *Royal Society* byli mezi jejími členy Robert Hooke (1635–1703), Robert Boyle (1627–1691), Christoph Wren (1632–1723), William Browncker (1620–1684), William Neil (1637–1670), Heinrich Oldenburg (1615?–1677) a John Collins (1625–1683).

Wallis se zabýval infinitesimálním počtem, teorií čísel, aritmetikou a algebrou, studoval i různé číselné soustavy (dvojkovou, trojkovou, čtyřkovou, ...), věnoval se teorii rovnoběžek, kryptografii, položil základy interpolace. Přispěl k rozvoji matematické symboliky a terminologie (symbol ∞, termíny mantisa, interpolace, řetězový zlomek atd.). Spolu s Christiaanem Huygensem[33] byl Wallis nejvýznamnějším tvůrcem infinitesimálního počtu v období před Newtonem a Leibnizem, výrazně ovlivnil Isaaca Barrowa (1630–1677) a Isaaca Newtona. Do novější symboliky, kterou vytvořil ve svých pracích Newton, se mu však již nepodařilo proniknout. Poznamenejme ještě, že podle Wallisovy rady byl prý v Anglii odmítnut gregoriánský kalendář; důvodem byl patrně strach z posílení vlivu katolické církve.

Wallis napsal řadu knih a prací. Roku 1655 vyšly v jednom svazku dva jeho spisy, *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis* a *Arithmetica infinitorum*.

---

[31] Karel I. Stuart (1600–1649), anglický a skotský král od roku 1625, popraven roku 1649.

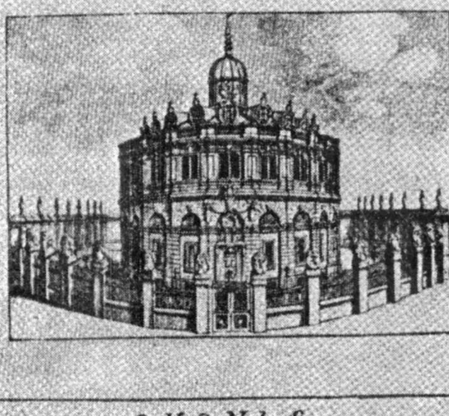
[32] Karel II. Stuart (1630–1685), syn Karla I., od roku 1660 anglický a skotský král.

[33] Ch. Huygens: *Horologium oscillatorium* (1673).

Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Professoris *SAVILIANI*,
in Celeberrima Academia OXONIENSI,
DE
ALGEBRA
Tractatus;
HISTORICUS & PRACTICUS.
Anno 1685 *Anglice editus*; *Nunc Auctus Latine*.

Cum variis
APPENDICIBUS;
Partim prius editis Anglice, Partim nunc primum editis.

Operum Mathematicorum Volumen alterum.



OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO MDCXCIII.

Titulní list Wallisovy knihy *De algebra tractatus*

První je věnován vyšetřováním kuželoseček jako křivek druhého řádu. Byl sepsán zejména pod vlivem Descartovy *Géométrie*, některé myšlenky této knihy podstatně rozvíjel, vykládal mimo jiné klasické Apolloniovy výsledky algebraickými prostředky. Wallis však ještě váhal s přijetím záporných hodnot souřadnic. Při sepisování knihy *Arithmetica infinitorum* chtěl původně vyjít z Cavalieriho knihy *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635), rozhodl se však místo geometrie využít „novou aritmetiku", tj. algebru. Jako první přetvořil algebru tak, aby zahrnovala i analýzu; zavedl nekonečné řady, nekonečné součiny, odvážně užíval imaginární čísla, záporné a lomené exponenty, počítal obsahy a objemy, zabýval se i kvadraturou kruhu. Najdeme zde rovněž vztah

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots},$$

který též bývá vyjádřen jako tzv. *Wallisův vzorec* v tvaru

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}.$$

Wallisova kniha *Arithmetica infinitorum* podstatně inspirovala I. Newtona, který ji studoval v letech 1655–1656.

Roku 1657 vydal Wallis knihu *Mathesis universalis, seu opus arithmeticum* (*Všeobecná matematika neboli úplný kurs aritmetiky*), o rok později vyšla Wallisova odborná korespondence o teorii čísel, zejména o Fermatových problémech. Ve spise *Tractatus duo ... de cycloide ... et de cissoide* z roku 1659 řešil Wallis mimo jiné Pascalovu úlohu o cykloidě. Dalšími Wallisovými spisy jsou např. *De angulo contactus et semicirculi tractatus* (1656, 1685), *De curvarum rectificatione et complanatione* (1659), *De centro gravitatis* (1669), *Mechanica, sive tractatus de motu tractatus geometricus* (tři svazky, 1669–71), *Institutio logicae* (1687), *De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis disceptatio geometrica*.

Wallisova kniha *Treatise of agebra, both historical and practical with some additional treatises* z roku 1685 začíná delším historickým úvodem, obsahuje velké množství materiálu. Wallis zde mimo jiné studuje řetězové zlomky, logaritmy, binomy, provádí numerické výpočty, sestrojuje kořeny kubické rovnice pomocí kubické paraboly, akceptuje záporné i komplexní kořeny rovnic a geometricky interpretuje imaginární čísla, kritizuje též Descartovo pravidlo znamének. V latinském vydání Wallisovy knihy *De algebra tractatus* z roku 1693 jsou navíc vyloženy algebraické výsledky Isaaca Newtona.

Wallis napsal i teologická díla, dále knihu o etymologii a gramatice (*Grammatica linguae Anglicanae*, 1653).

V letech 1693–1699 bylo v Oxfordu pod názvem *Opera mathematica* publikováno ve třech svazcích Wallisovo matematické dílo. V prvním svazku je mimo jiné *Arithmetica infinitorum* a *Mathesis universalis*, ve druhém je latinský překlad knihy *Treatise of Algebra*.

Wallisovy výsledky, které dnes řadíme do algebry, jsou prezentovány v jeho spise *Mathesis universalis* z roku 1657 a zejména v knize *Treatise of algebra* z roku 1685. V následujících odstavcích budeme stručně charakterizovat Wallisův pohled na matematiku, aritmetiku, algebru a číselné obory.

Wallis rozděloval matematiku na „čistou“ a „smíšenou“. Čistá studuje „abstraktní množství“ (aritmetika je věda o diskrétním, geometrie věda o spojitém). Smíšená matematika, jako je astronomie, mechanika, perspektiva, muzika, mořeplavba atd., studuje „konkrétní množství“, která jsou spjata s vlastnostmi předmětů. Navíc rozlišoval teoretickou a praktickou matematiku; praktická matematika, která se zabývá efektivitou výpočtů, způsoby měření, je podřízena matematice teoretické.

Wallis učinil podstatný krok k aritmetizaci algebry, pokračoval ve směru, který razili Harriot a zejména Oughtred. Odchýlil se od sepětí algebry s geometrií, se kterým přišel Descartes, domníval se, že základem celé matematiky se musí stát aritmetika.

... obecná algebra je aritmetická a nikoli geometrická; objasňuje se rychleji pomocí základů aritmetických a nikoli geometrických. I když se v geometrii mnohé nalezne a vysvětlí z algebraických základů, nevyplývá odtud, že algebra je geometrická, nebo že se opírá o geometrické základy, ... naopak, spíše je geometrie podřízena obecné aritmetice.[34]

Velkou pozornost věnoval Wallis pojetí čísel. Popišme stručně jeho představy v těchto směrech.

Číslo (přirozené) je počet jednotek. Větší číslo od menšího sice nelze odečítat (v oboru přirozených čísel), přesto je však třeba záporná čísla v matematice uvažovat a respektovat. Vzájemný vztah kladných a záporných čísel lze demonstrovat na příkladech: pohyby na opačné strany, teplota atd.[35] Stejně jako v geometrii, kde je možno dělit veličinu na libovolný počet částí, i číselná jednotka může být takto dělena. Iracionální čísla nelze vyjádřit pomocí „skutečných čísel“, nelze je vyjádřit periodickým desetinným zlomkem. S racionálními a iracionálními čísly je možno počítat stejně jako s čísly celými.

Přestože Wallis uznával záporná čísla a interpretoval je pomocí představ o pohybech na opačné strany, stále neměl jasnou představu o uspořádání číselné osy. Dokumentuje to tzv. *Wallisův paradox*: Protože je

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

je

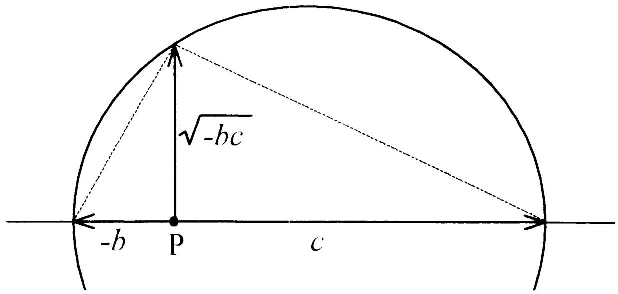
$$\cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} = 1 < \frac{1}{0} = \infty < \frac{1}{-1} = -1 < \frac{1}{-2} < \cdots.$$

Wallis podal jako první vhodnou interpretaci imaginárních čísel. Odmocninu ze záporného čísla představuje v tvaru $\sqrt{-b \cdot c}$, kde b, c jsou čísla kladná; čísla $-b, c$ jsou pro něho opačně orientované úsečky se společným počátečním bodem P. Podle Eukleidovy věty o výšce je nyní $\sqrt{-b \cdot c}$ úsečka s počátečním

[34] J. Wallis: *Opera mathematica*, Oxoniae, 1965, vol. I, 55–56.

[35] Roku 1657 Wallis o záporných číslech hovoří jako o číslech *zdánlivých*. Roku 1685 již kladná a záporná čísla nazývá *reálná*, termín *zdánlivá* užívá pro čísla imaginární.

bodem P, která je kolmá k úsečkám $-b, c$, její délka je střední geometrickou úměrnou, neboť $b : \sqrt{bc} = \sqrt{bc} : c$.



Wallisova interpretace komplexních čísel, která byla vlastně jen naznačena, však neměla ohlas.

V 18. století s komplexními čísly pracoval bez obav hlavně L. Euler, který pro $\sqrt{-1}$ zavedl symbol i z Descartova termínu *imaginaire*. Zdá se téměř jisté, že chápal komplexní číslo $x + yi$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi x, y; nikde to však výslovně nenapsal. Užíval polární souřadnice, komplexní čísla vyjadřoval i v goniometrickém tvaru. Eulerovy práce vedly k budování teorie funkcí komplexní proměnné; těmito otázkami se zabýval i Jean le Rond d'Alembert (1717–1783).

Koncem 18. století se již komplexní čísla hojně a s úspěchem užívala v matematické analýze (řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, výpočty integrálů apod.) i v různých aplikacích. Přesto stále nebylo jasné, jak se na komplexní čísla dívat, jak si je představit.

Norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818), který spolupracoval s Dánskou akademií věd, rozpracoval roku 1799 vektorový počet v rovině a podal geometrickou interpretaci komplexních čísel a jejich operací jako bodů či vektorů roviny. Zavedl imaginární osu kolmou k ose reálné, vektory roviny reprezentoval komplexními čísly a operace s vektory prováděl pomocí operací s komplexními čísly. Jeho práce *Om directiones analytiske betegning et forsög anwendt fornemelling til plane og sphaeriske polygoners oplösning* však zapadla, snad proto, že byla psána dánsky. Ve francouzském překladu byla vydána až po sto letech.

S obdobnou myšlenkou geometrické interpretace komplexních čísel přišel roku 1806 švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822). Interpretoval $\sqrt{-1}$ jako otočení roviny o $90°$; inspirován byl vztahem $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$.

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny dospěl na přelomu 18. a 19. století K. F. Gauss (1777–1855); jeho pohled na komplexní čísla byl prezentován v práci *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* z roku 1831. O deset let dříve podal podobný pohled na komplexní čísla Augustin Louis Cauchy (1789–1857) v knize *Cours d'analyse*. Od poloviny 19. století byl již běžně užíván termín *Gaussova rovina*.

Isaac Newton

Isaac Newton

Isaac Newton se narodil 25. prosince 1642[36] na malém venkovském statku Woolsthorpe v hrabství Lincolnshire asi 75 kilometrů severně od Cambridge. Narodil se předčasně, jako pohrobek, byl drobný a neduživý. Matka se brzy znovu provdala a opustila Woolsthorpe; o malého Newtona se starala hlavně babička.

Isaac Newton navštěvoval vesnickou školu, od 12 let pak *grammar school* v Granthamu. V roce 1656 matka podruhé ovdověla a vrátila se na Woolsthorpe; Isaaca si vzala k sobě, chtěla, aby spravoval rodinnou farmu. Ten se však místo o rodný statek zajímal o studium. V roce 1661 byl na radu strýce Jakuba Newtona poslán na studia na *Trinity College* v Cambridgi, kde byl zařazen mezi nemajetné studenty. Na univerzitě zjistil, že není ke studiu dostatečně připraven, proto se usilovně pustil do práce, zanedbával jídlo a stranil se spolužáků. Přitahovaly ho přírodní vědy, morální filozofie, hlavně však matematika; zapsány měl matematické přednášky Isaaca Barrowa, během studií na univerzitě se však sám seznámil s pracemi Eukleida, Apollonia, Vièty, Oughtreda, Fermata, Keplera, Descarta a Wallise.

V roce 1665 získal titul bakaláře. V té době vypukla v Anglii morová epidemie, *Trinity College* byla uzavřena. Newton opustil Cambridge a od podzimu 1665 do jara 1667 žil na rodném statku ve Woolsthorpu, intenzivně studoval a bádal. Bylo to pro něho nesmírně plodné období, právě v této době dospěl ke svým největším výsledkům. Rozpracoval základy diferenciálního a integrálního počtu (teorie fluxí a fluent), objevil gravitační zákon,[37] začal se intenzívně věnovat optice, zejména rozkladu světla hranolem a konstrukcím dalekohledů.

V dějinách vědy nejsou známy žádné jiné příklady velkých výkonů, které by se mohly srovnat s výkony Newtonovými z těchto dvou zlatých let.[38]

V roce 1667 se Newton vrátil do Cambridge, žádné své výsledky a objevy však nepublikoval. V březnu 1668 ukončil studium, stal se mistrem svobodných umění (*Master of Arts*). V této době pomáhal připravit k vydání přednášky Isaaca Barrowa, svého učitele matematiky; tyto přednášky z elementární geometrie a optiky byly vydány roku 1674. Traduje se, že Barrow výrazně ovlivnil rozvoj myšlení a matematických schopností mladého Newtona. Opak bude asi pravdou. Barrow přednášel pouze elementární kurs matematiky, zatímco Newton jako samouk se již zabýval vyšší matematikou; rovněž Newtonovy rané zájmy, analytická geometrie a matematická analýza, byly Barrowovi cizí. Často se též uvádí, že Barrow, když zjistil, že jeho žák je lepší než on, odešel z univerzity a svoji katedru Newtonovi předal; je to však patrně pouze legenda o ušlechtilosti ducha. Barrow roku 1669 univerzitu opravdu opustil, ale získal výhodnější a

---

[36] Podle gregoriánského kalendáře 5. ledna 1643.

[37] Anekdotu o jablku vyprávěli již Newtonovi současníci, později ji zpopularizoval Voltaire (1694–1778).

[38] [MLT], str. 41; viz D. J. Struik: *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha 1963, str. 107.

lépe placené místo v církevních službách. Newton byl zvolen jeho nástupcem, katedru matematiky držel od roku 1669 do roku 1701.[39]

Jmenování profesorem přineslo Newtonovi hmotné zajištění, současně mu však odebíralo čas na odbornou práci, neboť měl konat přednášky z geometrie, optiky, statiky a dalších matematických disciplín.

Během svého působení v Cambridgi Newton stále rozpracovával diferenciální a integrální počet, jeho aplikace v mechanice a astronomii, zkoumal vlastnosti řad a funkcí, věnoval se algebře, optice, zkoumal odraz, lom a rozklad světla. Objevil konstrukci zrcadlového dalekohledu (*reflektoru*), který nemá chromatickou vadu, kterou mají dalekohledy čočkové (*refraktory*). První zrcadlový dalekohled zhotovil již roku 1668 (jeho délka byla 15 cm, průměr zrcadla 5 cm, zvětšoval čtyřicetkrát), druhý dalekohled, větší a kvalitnější, sestavil roku 1671. Tento dalekohled byl zkoumán a velmi kladně oceněn londýnskou Královskou společností; roku 1672 se Newton stal jejím členem.

Přestože Newton své výsledky nepublikoval, jeho myšlenky se šířily; přispívaly k tomu jeho rukopisy, přednášky a korespondence. K publikování výsledků ho pobízel zejména Edmund Halley (1636–1742). Na jeho naléhání sepsal Newton své životní dílo, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematické základy přírodovědy*), a roku 1686 je předložil Královské společnosti. Tento spis obsahuje základy klasické mechaniky, základy diferenciálního a integrálního počtu a široce založené aplikace (odvození Keplerových zákonů z gravitačního zákona, pohyb Měsíce, planet, objasnění přílivu a odlivu atd.). O rok později bylo toto dílo vydáno tiskem. Druhé vydání bylo uveřejněno roku 1713, třetí roku 1726 (reprint třetího vydání vyšel v Ženevě v letech 1739–42), anglický překlad roku 1729.

Po ukončení *Principií* Newton psychicky onemocněl. Nic podstatně nového již nevytvořil.

V roce 1689, kdy byl králem Vilémem III. Oranžským (1650–1702) zřízen parlament, byl Newton univerzitou na dva roky delegován za poslance. V roce 1696 se stal dozorcem královské mincovny v Londýně, v této funkci provedl reformu ražby mincí. Do té doby totiž chyběly přesné normy pro ražbu peněz a proto bylo snadné mince falšovat a znehodnocovat. O tři roky později byl Newton jmenován královským mincmistrem a ředitelem mincovny, roku 1701 se vzdal profesury v Cambridgi a přesídlil do Londýna. V této době byl váženým členem Královské společnosti, v roce 1703 byl zvolen jejím předsedou. Tvrdí se, že společnosti vládl železnou rukou.

V roce 1699 byl Newton za své vědecké zásluhy jmenován zahraničním členem Pařížské akademie věd, v roce 1705 byl povýšen Annou Stuartovnou (1665–1714) za své vědecké zásluhy do šlechtického stavu.

Poslední léta svého života byl Newton zaměstnán prací v Královské společnosti, připravoval k vydání své práce, posuzoval práce mladších kolegů, věnoval se teologickým otázkám a hodně energie obětoval prioritním sporům (s Hookem

[39] Tzv. lucasiánská katedra; podle Henryho Lucase (1610?–1663), jehož soukromým nadáním katedra vznikla.

o objev gravitačního zákona, s Leibnizem o objev diferenciálního a integrálního počtu). Newtonův spor s Leibnizem byl živen ještě po celé století po Newtonově smrti; důsledkem sporů byl rozkol mezi kontinentální a britskou matematikou.[40]

Na jaře roku 1727 Newton vážně onemocněl, dne 2. března 1727 naposledy předsedal Královské společnosti; zemřel 20. března 1727.[41] Pochován byl ve Westminsterském opatství. Pět svazků *Isaaici Newtoni Opera qual exstant omnia* (ed. S. Horsley) vyšlo v Londýně v letech 1779–1785.

Na závěr tohoto paragrafu ocitujme Stephena W. Hawkinga (nar. 1942),[42] který ve své knížce *Stručná historie času*[43] píše o Newtonovi jako o člověku:

Isaac Newton asi nebyl příliš příjemným mužem. Jeho vztahy s ostatními vědci jsou nechvalně známé řadou bouřlivých rozepří, jimiž vyplnil značnou část svých pozdějších let. Po vydání Principií — nepochybně jedné z nejvýznamnějších knih ve fyzice — se rychle stal vlivnou postavou veřejného života. Byl jmenován prezidentem Královské společnosti a jako první vědec povýšen do šlechtického stavu.

Záhy se dostal do sporů s královským astronomem Johnem Flamsteedem, který dal předtím Newtonovi mnoho údajů potřebných k práci na Principiích, ale nyní mu odpíral poskytnout další informace. Newton se pokusil využít výsadního postavení v Královské observatoři a dosáhnout rychlého uveřejnění Flamsteedových výsledků. Dal dokonce podnět k jejich zajištění a předání Edmondu Halleymu, Flamsteedovu nepříteli, aby je připravil k publikaci. Flamsteed však předal záležitost soudu a ten svým rozhodnutím zabránil nedovolenému rozšiřování práce. To zase popudilo Newtona, který pak v dalších vydáních Principií systematicky vypouštěl všechny odkazy na Flamsteeda.

Ještě vážnější neshody vyvstaly mezi Newtonem a německým filozofem Gottfriedem Leibnizem. Oba totiž nezávisle na sobě rozvinuli nesmírně důležité odvětví matematiky zvané diferenciální a integrální počet, podpírající většinu moderní fyziky. Dnes se ví, že Newton na něm pracoval o celé roky před Leibnizem, jenomže k uveřejnění svých výsledků se odhodlal mnohem později. Následovaly dohady o prvenství, při nichž se Leibniz dopustil osudné chyby, když se obrátil na Královskou společnost, aby rozepři rozhodla. Newton jako její prezident sám jmenoval „nestrannou" komisi, a navíc snad byl i autorem závěrečné zprávy, kterou Královská společnost publikovala a v níž byl Leibniz nařčen z plagiátorství. Dokonce ještě po Leibnizově smrti prý Newton vyjádřil velké zadostiučinění z toho, že se mu podařilo „zlomit Leibnizovo srdce".

Během těchto svárů Newton opustil Cambridge a univerzitní svět. Angažoval se pak v protikatolickém hnutí v parlamentu a později získal výnosné místo v královské mincovně. Tam využíval svou nevyzpytatelnost a šíravost přijatelnějším způsobem, když vedl úspěšný boj s penězokazy a pár jich dokonce dostal na šibenici.

---

[40] Viz např. A. Rupert Hall: *The quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1980.

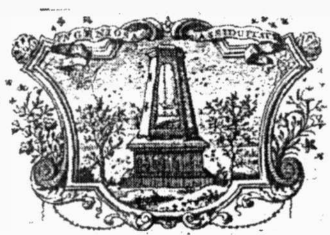
[41] Podle gregoriánského kalendáře zemřel 31. března 1727.

[42] Hawking získal roku 1979 v Cambridgi lucasiánskou profesuru matematiky, kterou v letech 1669–1701 zastával Newton.

[43] Mladá fronta 1991, str. 169–170.

ARITHMETICA
UNIVERSALIS;
SIVE DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA.

Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.
Cum Commentario
JOHANNIS CASTILLIONEI,
in almo Lycæo Trajectino Philosophiæ, Mathescos & Astronomiæ Professoris Ordinarii &c.
TOMUS PRIMUS.



AMSTELODAMI,
Apud MARCUM MICHAELEM REY.
MDCCLXI.

Titulní list Newtonovy knihy *Arithmetica universalis*

Arithmetica universalis

V letech 1673–1683 přednášel Newton v Cambridgi kurs algebry. Podle univerzitního nařízení měl své přednášky sepsat pro knihovnu. Roku 1674 Newton skutečně uložil rukopis svých lekcí v knihovně, již se však nestaral o jeho publikování. Tento rukopis byl vydán až roku 1707 v Amsterodamu zásluhou Newtonova nástupce W. Winstona (1667–1752). Více než třicet let tedy trvalo, než Newtonova *Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica* spatřila světlo světa. Tato kniha se pak na řadu let stala nejrozšířenější učebnicí aritmetiky a algebry; v latinské verzi vyšla v letech 1722 (Londýn), 1732 (Leiden), 1732 (Miláno), 1761 (Amsterodam), 1761 (Leiden), v anglickém překladu v letech 1720 (Londýn), 1728 (Londýn) a 1769 (Londýn), francouzsky roku 1802 (Paříž). Ovlivňovala tak podstatnou měrou vývoj i pojetí aritmetiky a algebry v osmnáctém století i na počátku století devatenáctého. Její vliv je znát např. na významných učebnicích *Eléments d'algèbre* z roku 1746, *Treatise of algebra* z roku 1748 a *Vollständige Einleitung zur Algebra* z roku 1770,[44] jejichž autory byli Alexis Claude Clairaut (1713–1768), Colin MacLaurin (1698–1746) a Leonhard Euler.

Newton postavil svou algebru na aritmetickém základu, podobně jako to učinili Oughtred a Wallis; více ji zaměřil na praktické aplikace. Aritmetiku chápal jako počítání s čísly, algebru jako počítání s obecnými veličinami, přičemž oba tyto „počty“ jsou založeny na stejných principech. I když se odchýlil od Descartova sepětí algebry a geometrie, přejal jeho moderní symboliku; užíval již rovnítko, ale druhou mocninu psal ještě jako xx, resp. aa.

Pracoval bez obav s reálnými čísly. Celá čísla (*integer*) chápal jako počet jednotek, racionální čísla (*fractus*) jako počet částí jednotek, iracionální čísla (*surdus*) jako nesouměřitelná s jednotkou (*cui unitas est incommensurabilis*). Záporná čísla chápal jako čísla menší než nula:

Quantitates vel Affirmativae sunt seu majores nihilo, vel Negativae seu nihilo minores.[45]

V 18. století se řada matematiků zabývala problematikou záporných čísel a obecněji aritmetikou celých (tj. kladných a záporných) čísel; tyto otázky byly dořešeny až v průběhu 19. století v souvislosti s pojetím komplexních čísel a jejich geometrickou interpretací.

První díl Newtonovy knihy *Arithmetica universalis*, sestává ze čtyř sekcí. První sekce začíná obecnými úvahami o vztahu algebry a aritmetiky a o charakteru aritmetických operací, v jednotlivých paragrafech je pojednáno o čtyřech základních aritmetických operacích (*De additione, De subductione, De multiplicatione, De divisione*), o odmocňování a počítání se zlomky a odmocninami (*De extractione radicum, De reductione fractionum et radicalium*).

Krátká druhá sekce (*De forma aequationis, De concinnanda aequatione solitaria*) je věnována algebraickým rovnicím, zejména hledání lineárních a kvadratických dělitelů polynomů, zjednodušování rovnic, eliminace neznámých apod.

---

[44] Již v letech 1768/69 vyšel ruský překlad pod názvem *Universal'naja arifmetika*.

[45] *Arithmetica universalis*, str. 3.

RADICUM ÆQUAT. 5

VI. *Æquationum vero radices ſæpe impoſſibiles eſſe æquum eſt, ne caſus problematum, qui ſæpe impoſſibiles ſunt, exhibeant poſſibiles.*

Ut ſi rectæ & circuli interſectio determinanda eſſet, & pro circuli radio & rectæ a centro ejus diſtantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio interſectionem definiens habetur, ſi pro litera deſignante diſtantiam rectæ a centro ponatur numerus minor radio, interſectio poſſibilis erit; ſin major, fiet impoſſibilis; & æquationis radices duæ quæ interſectiones duas determinant, debent eſſe perinde poſſibiles vel impoſſibiles ut rem ipſam vere exprimant. Atque ita ſi circulus CDEF, & ellipſis ACBF ſe mutuo ſecent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam poſitione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus e perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus ſecat ellipſim in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quod ſi circuli radius, manente centro ejus, minuatur donec, punctis E & F coaleſcentibus, circulus tandem tangat ellipſim, ex radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt, evadent æquales. Et ſi circulus adhuc minuatur ut ellipſim in puncto EF ne quidem tangat ſed ſecet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI, FK, jam facta impoſſibilia, exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impoſſibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales, deinde impoſſibiles evadere ſolent. Et inde fit quod radicum impoſſibilium numerus ſemper ſit par. TAB. VIII. Fig. 9.

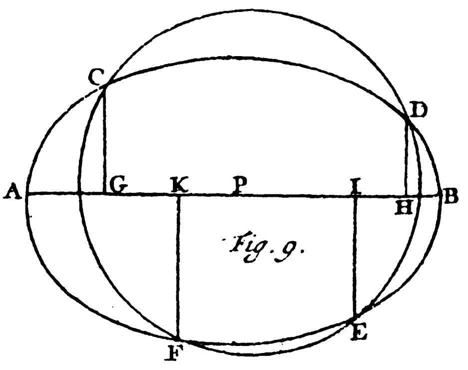


Fig. 9.

Ukázka z Newtonovy knihy *Arithmetica universalis*
(část páté stránky druhého dílu a příslušný obrázek)

Třetí a čtvrtá sekce presentuje řešení 16 aritmetických a 61 geometrických úloh (*Quaestiones arithmeticae, Quaestiones geometricae*); některé jsou převzaty od Descarta, Oughtreda a Wallise, některé jsou původní. Řešeny jsou problémy aritmetiky, geometrie, mechaniky, optiky a astronomie. Obě sekce mají úvodní paragrafy (*Quomodo quaestio aliqua ad aequationem redigatur*, *Quomodo quaestiones geometricae ad aequationem rediganțur*), obsahují řadu metodických pokynů a návodů, jak aritmetické a geometrické úlohy řešit pomocí algebraických rovnic. Newton postupuje od jednoduchého k složitějšímu, úlohy však formuluje obecně a odvozuje obecné vzorce a pak do nich dosazuje číselné hodnoty. Některé úlohy řeší více způsoby.

Aritmetické úlohy se týkají hledání neznámých čísel, určení místa setkání dvou kurýrů, stanovení poměrů směsí a slitin (v 10. úloze je řešen problém koruny krále Hierona), rázu pružných koulí, určení procent z renty apod. Najdeme tu i známou úlohu o pasoucích se býcích na louce, na které rovnoměrně přirůstá tráva (11. úloha).[46]

Geometrické úlohy se týkají řešení trojúhelníků (některé prvky je třeba vypočítat z jiných), analytické geometrie, 23. úloha je variací na Pappovu úlohu, 29. úloha je věnována dělení úhlů na několik stejných částí. Další úlohy se týkají odvození rovnic kuželoseček (dráha komety, průseky roviny a kužele, kuželosečky určené několika body a tečnami apod.), rovnice cissoidy, nalezení geometrických míst, Apolloniových úloh, rovnováhy několika závaží, která visí na niti, která klouže kolem jednoho či dvou bodů atd.

Druhý díl Newtonovy knihy *Arithmetica universalis* je věnován obecné teorii algebraických rovnic a geometrické konstrukci jejich kořenů.

V paragrafu *De natura radicum aequationis* Newton vysvětluje, co je to kořen rovnice, a ukazuje, že rovnice může mít více kořenů; udává příklady a objasňuje příčiny tohoto faktu – i konkrétní úlohy přece mohou mít více řešení. Vytváří rovnice s předem danými kořeny podobně jako Descartes a Harriot, tj. násobí rovnice $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0$ a $x+5=0$ a získává rovnici

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0 \ ,$$

která má kořeny $1, 2, 3, -5$; na příkladu tedy ukazuje, že rovnice stupně n má n kořenů.

Pracuje s kladnými (*affirmativae*), zápornými (*negativae*) i komplexními kořeny (*impossibiles*) a ukazuje, proč je komplexních kořenů sudý počet (viz text na vedlejší stránce). Uvažuje kružnici a přímku, která má od kružnice proměnnou vzdálenost a má tedy s kružnicí společné dva body, jeden bod nebo žádný bod. Rovnice, pomocí které počítáme společné body, má přitom dvě reálná řešení, jedno dvojnásobné reálné řešení nebo dvě imaginární řešení. Dvě reálná řešení se tedy „přibližují“ až splynou a změní se na dvě imaginární řešení.

Dále uvažuje elipsu a kružnici, které mají čtyři společné body (viz text a obrázek na vedlejší stránce). Předpokládejme, že máme rovnici, jejíž kořeny

[46] *Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum aeque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: quaeritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.*

vyjadřují vzdálenosti průsečíků C, D, E, F od přímky AB; tato rovnice bude mít čtyři reálné kořeny. Budeme-li nyní zmenšovat poloměr kružnice, budou se body E, F přibližovat, až splynou; při dalším zmenšení poloměru kružnice tento společný bod $E = F$ zmizí. Dva reálné kořeny odpovídající rovnice tedy nejprve splynou a pak se změní na dva kořeny imaginární.

Newton rovněž komentuje a upřesňuje Descartovo znaménkové pravidlo. Ukazuje, že toto pravidlo selhává v případě, kdy má rovnice komplexní kořeny, což věděl už Descartes. Nejprve ukazuje, že rovnice

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

má tři kladné kořeny a jeden záporný $(1, 2, 3, -5)$, jak odpovídá třem znaménkovým změnám a jedné nezměně. Dále uvažuje rovnici

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0 \ ,$$

kde p a q jsou kladná čísla, která má dvě znaménkové nezměny a jednu změnu a měla by tedy mít dva záporné kořeny a jeden kladný. Vynásobí-li tuto rovnici rovnicí $x - 2p = 0$, přibude jeden kladný kořen $2p$; vychází však rovnice

$$x^4 - px^3 + p^2x^2 - (6p^3 + q)x + 2pq = 0 \ ,$$

která má čtyři znaménkové změny a měla by tedy mít čtyři kladné kořeny. Newton uvádí, že dva komplexní kořeny se v prvním případě jevily jako záporné a ve druhém případě jako kladné.

Newton dále zformuloval pravidlo pro určení počtu komplexních kořenů algebraické rovnice. V moderní symbolice je možno toto jeho tvrzení vyjádřit takto: Rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

má alespoň tolik komplexních kořenů, kolik je znaménkových změn v posloupnosti

$$1 \ , \qquad \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a_1^2 - a_2 \ , \qquad \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot a_2^2 - a_1a_3 \ , \qquad \ldots \ ,$$

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n \ , \qquad a_n^2 \ .$$

V paragrafu *De transmutationibus aequationum* Newton zkoumá různé postupy, které vedou ke změně znamének všech kořenů rovnice, k jejich zvětšení či zmenšení o určité číslo, k eliminaci některého členu rovnice, k odstranění zlomků apod. Tyto postupy, které již byly popsány v dílech jeho předchůdců (hlavně Cardano, Viète, Descartes), odpovídají různým substitucím ($x = -y$, $x = y \pm a$, $x = ky$, $x = \frac{1}{y}$ apod.). Paragraf končí partií věnovanou Viètovým vzorcům pro rovnice druhého, třetího a čtvrtého stupně a vztahy mezi součty prvních, druhých, třetích a čtvrtých mocnin kořenů. V moderní symbolice je možno tyto vztahy, kterými se zabýval již Girard, zapsat takto:

Jestliže $S_1, S_2, S_3, \dots$ jsou součty prvních, druhých, třetích, ... mocnin kořenů rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ ,$$

potom je

$$S_1 + a_1 = 0 \ , \qquad S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \ , \qquad \dots \ ,$$

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \cdots + n a_n = 0 \ .$$

Důkaz těchto formulí byl publikován v MacLaurinově knize z roku 1748; důkaz podali i L. Euler a J. L. Lagrange. Takovéto výsledky patrně vedly až k hlavní větě o symetrických polynomech.[47]

Předchozí výsledky Newton použil v následujícím paragrafu *De limitibus aequationum*; provádí zde horní odhady absolutních hodnot reálných kořenů. Jsou-li všechny kořeny rovnice reálná čísla, platí pro každý kořen x nerovnost

$$|x| < \sqrt[2n]{S_{2n}} \ ;$$

s rostoucím n se navíc hodnota $\sqrt[2n]{S_{2n}}$ blíží k maximu absolutních hodnot kořenů uvažované rovnice.

Newton dále ukazuje, že pro největší kladný kořen x uvažované algebraické rovnice platí nerovnost

$$x < \sqrt[2n+1]{\frac{\sqrt{S_{2n} \cdot S_{2n+2}} + S_{2n+1}}{2}}$$

a pro záporný kořen, který je v absolutní hodnotě největší, platí nerovnost

$$-\sqrt[2n+1]{\frac{\sqrt{S_{2n} \cdot S_{2n+2}} - S_{2n+1}}{2}} < x \ .$$

V závěru tohoto paragrafu Newton používá derivací k odhadu hodnot kořenů algebraické rovnice $f(x) = 0$. Vycházejí-li při dosazení kladného čísla a do funkce f a do všech jejích nenulových derivací kladná čísla, potom číslo a omezuje kladné kořeny uvažované rovnice shora. Tento fakt Newton demonstruje na rovnici

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0 \ ;$$

zjišťuje, že požadovanou vlastnost má číslo $a = 2$.

---

[47] Každý symetrický polynom se dá jediným způsobem vyjádřit jako polynom v elementárních symetrických funkcích. Podobné tvrzení platí pro symetrické racionální funkce.

Podobným způsobem provádí odhad hodnot záporných kořenů; jednoduchou transformací převede úlohu na předcházející případ. Vychází od transformované rovnice

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 = 0$$

a zjišťuje, že požadovanou vlastnost má číslo $a = 3$. Kořeny rovnice

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$$

jsou tedy omezeny čísly -3 a 2.

V paragrafu *Aequationum reductio per divisores surdos* Newton rozkládá polynomy sudých stupňů na kvadratické polynomy. Prezentuje rovněž řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně. Výklad prokládá konkrétními příklady.

V závěrečné části knihy (*Appendix. Aequationum constructio linearis*) se Newton zabývá hledáním kořenů algebraických rovnic pomocí geometrických konstrukcí. Nedělá to z teoretických důvodů, aby dokázal existenci řešení určitých úloh, ale spíše pro praktické využití, tj. pro přibližné určení kořenů. Vyšetřuje geometrické konstrukce kořenů kubických rovnic pomocí kuželoseček, Nikomedovy konchoidy[48] a Dioklovy cissoidy.[49] Zabývá se mimo jiné trisekcí úhlu a určováním dvou středních geometrických úměrných, tj. k daným veličinám a, b nalézá veličiny x, y, pro které $a : x = x : y = y : b$.

Newton své přednášky, jejichž zápisem je jeho *Arithmetica universalis*, zaměřil více k teoretickým i praktickým aplikacím algebry. Některé své výsledky uvedl bez důkazů, jejich využití však ukázal na příkladech. Některá tvrzení, jejichž důkazy v Newtonově knize nejsou, byly dokázány až v 18. a 19. století. Někteří historikové matematiky se proto oprávněně domnívají, že Newton exaktní důkazy některých svých tvrzení neznal.

Přibližná metoda řešení rovnic

Newtonova metoda přibližného výpočtu reálného kořene algebraické rovnice pochází z období po roce 1665. Newton ji vyložil roku 1669 v práci *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, která však byla publikována až roku 1711. Mezitím byla jeho metoda zveřejněna v 94. kapitole Wallisovy knihy *Treatise of algebra*, která vyšla anglicky roku 1685 a latinsky roku 1693. V Newtonově knize *Arithmetica universalis* vyložena není.

---

[48] Nechť je dán bod P, tzv. *pól*, a přímka p, jejíž vzdálenost od pólu P je a; nechť je dána konstanta b. Konchoida je množina všech bodů X, pro které platí: přímka PX protíná přímku p v bodě Y, $|XY| = b$. Konchoidu popisuje rovnice $(x-a)^2(x^2+y^2) - b^2x^2 = 0$, resp. v polárních souřadnicích $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$.

[49] Nechť je dána kružnice k, nechť PA je její průměr, $|PA| = d$ a t je tečna v bodě A. Cissoida je množina všech bodů X, pro které platí: polopřímka PX protíná přímku t v bodě Y, kružnici k v bodě Z a $PX = YZ$. Cissoida má rovnici $y^2 = \frac{x^3}{d-x}$, resp. v polárních souřadnicích $\rho = d(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi)$.

Newton objasňuje svoji metodu přibližného určení kořene algebraické rovnice na konkrétní kubické rovnici; pak poznamenává, že pro rovnice vyšších stupňů se postupuje stejně.

Uvažuje kubickou rovnici

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

a hodnotu $x_1 = 2$, která se „příliš neliší“ od hledaného kořene (uvádí, že se neliší o více než jednu desetinu x_1). Klade

$$x = x_1 + p = 2 + p$$

a po dosazení do výchozí rovnice pro x dochází k rovnici pro p:

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

Tuto rovnici „linearizuje“, tj. zanedbá kubický a kvadratický člen (neboť p je malé); z rovnice

$$10p_1 - 1 = 0$$

určuje přibližnou hodnotu $p_1 = 0{,}1$ čísla p. Odtud $x_2 = 2{,}1$.

Dále klade

$$p = p_1 + q = 0{,}1 + q\ ,$$

dosadí do kubické rovnice pro p a dostává kubickou rovnici pro q:

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$$

Tuto rovnici opět linearizuje, tj. zanedbá kubický a kvadratický člen (neboť q je malé); z rovnice

$$11{,}23q_1 + 0{,}061 = 0$$

dostává přibližnou hodnotu

$$q_1 = -\frac{0{,}061}{11{,}23} \doteq -0{,}0054\ ;$$

dělení provádí na tolik míst, kolik jich „odděluje“ první cifru původního odhadu kořene, tj. 2, a první cifru počítaného podílu, tj. 0,005, tedy na dvě místa. Odtud $x_3 = 2{,}0946$.

Dále klade

$$q = q_1 + r = -0{,}0054 + r$$

a uvádí, že podobně je možno pokračovat dále.

Nakonec poznamenává, že je možno dosadit $q = -0{,}0054 + r$ do kvadratické rovnice

$$6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$$

a dospět ke kvadratické rovnici

$$6{,}3r^2 + 11{,}161\,96r + 0{,}000\,541\,708 = 0 \ ;$$

po zanedbání kvadratického členu dostává hodnotu

$$r_1 = -\ \frac{0{,}000\,541\,708}{11{,}161\,96} \doteq -\ 0{,}000\,048\,53 \ .$$

Dochází tak k přibližné hodnotě kořene výchozí rovnice $x \doteq 2{,}094\,551\,47$.

Poznamenejme, že Newton používá tuto metodu i v teoretických úvahách o funkcích dvou proměnných; je-li např.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0 \ ,$$

kde veličina x je „malá“, pak odvodí, že

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{1\,634a^3} + \dots \ .$$

Roku 1690 podal Joseph Raphson (1648–1715) v práci *Analysis aequationum universalis* prakticky stejnou metodu v tvaru, který byl později vyjádřen formou iterací; zvolíme hodnotu x_1 a postupně vypočítáváme hodnoty x_i, $i = 2, 3, \dots$, které se ke kořenu x algebraické rovnice $f(x) = 0$ přibližují:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \dots \ .$$

Snadno zjistíme smysl tohoto vztahu: v bodě x_{n+1} protne osu x tečna grafu funkce f uvažovaná v bodě $f(x_n)$. Proto se této metodě většinou říká *Newtonova metoda tečen.*

Newtonovu a Raphsonovu metodu později upřesňovali, rozvíjeli a zobecňovali zejména E. Halley (r. 1687 a r. 1694), L. Euler v korespondenci z roku 1744 a v práci *Institutiones calculi differentialis* z roku 1755, J. R. Mourraille (18. stol.) v práci *Traité de la résolution des équations en général* z roku 1768, dále J. L. Lagrange roku 1798, Joseph B. J. Fourier (1768–1830) v práci *Analyse des équations determinés* z roku 1831 a další. V osmnáctém století byla rozpracována řada dalších postupů, v devatenáctém století byly podány metody výpočtu reálných i komplexních kořenů.

LITERATURA

Následující přehled literatury uvádí prameny k dalšímu podrobnějšímu studiu historie algebry 16. a 17. století. Obsahuje některé základní monografie z historie matematiky, které této problematice věnují větší pozornost, knihy zaměřené přímo k historii algebry a některé časopisecké práce, které se týkají speciálních otázek vývoje algebry ve vymezeném období. Výběr byl sestaven též s ohledem na dostupnost pramenů; uvedeny jsou i česky psané knížky, které se týkají hlavních aktérů vývoje algebry v 16. a 17. století.

ITALŠTÍ MATEMATICI ŠESTNÁCTÉHO STOLETÍ

[CG] Cardano G., *The great art, or the rules of algebra*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1968, 267 stran, překlad T. R. Witmer.

[FT] Ferrari L., Tartaglia N., *Cartelli disfida matematica*, Ateneo di Brescia, Brescia, 1974, 193+202 stran, faksimile původních vydání z let 1547–1548, ed. A. Masotti.

[TN] Tartaglia N., *Quesiti et inventioni diverse*, Ateneo di Brescia, Brescia, 1959, 85+128 stran, faksimile vydání z roku 1554, ed. A. Masotti.

[BR1] Bombelli R., *L'Algebra*, Feltrinelli, Milano, 1966, k vydání připravili U. Forli a E. Bortolotti, viz též Opera (ed. E. Bortolotti) 4, 5, Bologna 1929.

[BR2] Bombelli R., *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libri IV e V comprendenti „La parte geometrica" inedita ...*, Zanichelli, Bologna, 1929, 303 stran, Pubblicata a cura di E. Bortolotti.

[OO] Ore O., *Cardano, the gambling scholar*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[FM] Fierz M., *Girolamo Cardano (1501–1576). Arzt, Naturphilosoph, Mathematiker, Astronom und Traumdeuter*, Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1977, anglicky vyšlo roku 1983.

[BA] Bellini A., *Girolamo Cardano e il suo tempo*, Hoepli, Milano, 1947.

[VG] Vacca G., *L'opera matematica di Girolamo Cardano nel quarto centenario del suo insegnamento in Milano*, Rendiconti, Seminario matematico e fisico di Milano **11** (1937), 22–40.

[MA1] Masotti A., *Sui cartelli di matematica disfida scambiati fra Ludovico Ferrari e Niccolò Tartaglia*, Rendiconti dell'Istituto lombardo di scienze e lettere **94** (1960), 31–41.

[MA2] Masotti A., *Studi su N. Tartaglia*, Brescia, 1962.

[B1] Bortolotti E., *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*, Bologna, 1928.

[B2] Bortolotti E., *L'Algebra nella scuola matematica bolognese nel sec. XVI*, Periodico di matematiche (4) **5** (1925), 147-184.

[B3] Bortolotti E., *Sulla scoperta della risoluzione algebrica delle equazioni del quarto grado*, Periodico di matematiche (4) **6** (1925), 217-230.

[B4] Bortolotti E., *La scuola matematica bolognese*, Zanichelli, Bologna, 1947.

[B5] Bortolotti E., *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*, Studi e memorie per la storia dell'Università di Bologna **9** (1926), 55–108.

[B6] Bortolotti E., *I cartelli de matematica disfida*, Studi e memorie per la storia dell'Università di Bologna **12** (1935), 3–79.

VIÈTE

[VF] Viéte F., *Einführung in die neue Algebra*, Werner Fritsch, München, 1973, 145 stran, Übersetzt und erläutert von K. Reich und H. Gericke unter Mitarbeit von L. Ringholz.

[RF] Ritter F., *François Viète, inventeur d'algèbre moderne, 1540–1603*, Revue occidentale philosophique, sociale et politique, Series 2, **10** (1895), 234–274, 354–415.

DESCARTES

[D1] Descartes R., *Rozprava o metódě. Pravidlá na vedenie rozumu*, SAV, Bratislava, 1954, 150 stran, překlad A. Vantuch a J. Špaňár.

[D2] Descartes R., *Rozprava o metodě*, Svoboda, Praha, 1992, 69 stran, překlad V. Szathmáryová-Vlčková, doslov a poznámky J. Patočka, 1. a 2. vydání vyšlo v Laichterově filosofické knihovně v Praze roku 1933 a 1947; první český překlad J. Gutha-Jarkovského je z roku 1882.

[D3] Descartes R., *Úvahy o první filozofii*, Svoboda, Praha, 1970, 149 stran, překlad Z. Gabriel; první český překlad J. Slavíka je z roku 1889.

[D4] Descartes R., *Principy filosofie*, Filosofický ústav AV ČR, Praha, 1998, 181 stran, překlad T. Marvan a P. Glombíček, jde o výbor doplněný dvěma Descartovými dopisy Alžbětě Falcké; viz též *Princípy filozofie*, Bratislava, Pravda, 1987, překlad J. Špaňár, 353 stran.

[D5] Descartes R., *Dopisy Alžbětě Falcké*, Petrov, Brno, 1997, 144 stran, překlad P. Horák.

[BJ] Bečvář J., *René Descartes, milovník rozumu*, Prometheus, Praha, 1998, edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek 3, 48 stran.

[BJa] Beneš Jaroslav, *René Descartes či Tomáš Akvinský?*, Praha, 1935.

[BJo] Beneš Josef, *Descartesova metoda ve vědách a ve filosofii*, ČAVU, Praha, 1936, 327 stran.

[MS] Major L., Sobotka M., *Světonázorový význam Descartovy přírodní filozofie*, UK, Praha, 1977.

[SJF] Scott J. F., *The Scientific Work of René Descartes (1596–1650)*, London, 1952, dotisk 1976.

[SG] Sebba G., *Bibliographia Cartesiana. A critical guide to the Descartes literature, 1800–1960*, The Hague, 1964.

[MG] Matvievskaja G. P., *Rene Dekart*, Nauka, Moskva, 1976.

WALLIS

[SJ] Scott J., *The mathematical work of John Wallis (1616–1703)*, Taylor & Francis, London, 1938, 11+240 str., reprint Chelsea, New York, 1981.

[PA] Prag A., *John Wallis, 1616–1703. Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B: Studien **1** (1929), 381–412.

NEWTON

[NI1] N'juton I., *Vseobščaja arifmetika ili kniga ob arifmetičeskich sinteze i analize*, AN SSSR, Moskva, 1948, 442 stran, obsahuje též článek A. P. Juškeviče *„O vseobščej arifmetike" I. N'jutona* a jeho poznámky k překladu (dohromady téměř 100 stran).

[NI2] Newton I., *The mathematical papers of Isaac Newton*, Cambridge, 1967.

[NS] Nový L., Smolka J., *Isaac Newton*, Orbis, Praha, 1969, edice Portréty, 195 stran.

[MLT] More L. T., *Isaac Newton: a biography, 1642–1727*, New York–London, 1934.

[AHD] Anthony H. D., *Sir Isaac Newton*, London–New York–Toronto, 1960.

[BT] Birch T., *The history of the Royal Society of London, for improving of natural knowledge, from its first rise, I–IV*, London, 1756–1757.

[VSI] Vavilov S. I., *Isaac N'juton. Naučnaja biografia i stat'i*, AN SSSR, Moskva, 1961, 294 stran.

[AVI] Arnold V. I., *Gjujgens i Barrou, N'juton i Guk*, Nauka, Moskva, 1989, 94 stran.

HISTORIE MATEMATIKY

[CM] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I–IV*, Teubner, Leipzig, 1880–1908, reprint New York, 1965.

[ZHG] Zeuthen H. G., *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, Teubner, Leipzig, 1903, ruský překlad *Istorija matematiki v XVI i XVII vekach*, Moskva, Leningrad 1938, 456 stran.

[WH] Wieleitner H., *Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Berlin–Leipzig, 1911–1921, 1923, ruský překlad *Istorija matematiki ot Dekarta do serediny XIX. stoletija*, Moskva 1960, 467 stran.

[JAP] Juškevič A. P. (red.), *Istorija matematiki I, II, III*, Nauka, Moskva, 1970, 1970, 1972, 351, 300, 495 stran.

[KM] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[WB] Waerden B. L. van der, *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 271 stran.

[SE] Scholz E. (Hrsg.), *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1990, 506 stran.

[NVA] Nikiforovskij V. A., *Iz istorii algebry XVI–XVII vv.*, Nauka, Moskva, 1979, 208 stran.

[FTR] Franci R., Toti Rigatelli L., *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano, 1979, 159 stran.

[MS] Maracchia S., *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'algebra*, Feltrinelli, Roma, 1979, 239 stran.

[EHD] Ebbinghaus H.-D. et al., *Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,..., 1983, 1988, 1992, 333 stran, anglický překlad 2. německého vydání *Numbers*, Springer-Verlag 1991.

[J] Juškevič A. P., *Chrestomatija po istorii matematiki I, II*, Prosveščenie, Moskva, 1976, 1977, 319, 224 stran.

[KAG] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989, 208 stran, přeložil J. Šedivý.

ALGEBRA

[KV] Kořínek V., *Základy algebry*, ČSAV, Praha, 1952, 2. vydání 1956, 520 stran.

[SŠ] Schwarz Š., *Základy náuky o riešení rovníc*, SAV, Bratislava, 1968, původně vyšlo r. 1958 v nakladatelství ČSAV v Praze, 345 stran, 1. vydání v Bratislavě r. 1967, 439 stran, 2. doplněné vydání r. 1968, 454 stran.

[PL] Procházka L. a kol., *Algebra*, Academia, Praha, 1990, 560 stran.