$h\alpha + h[\alpha + h\alpha] = \pi$ erfüllt. Aus dieser letzteren folgt

$$\frac{F^{\backprime}\alpha}{F\alpha} + \frac{F^{\backprime}\left[\alpha + \operatorname{arccot}\dfrac{F^{\backprime}\alpha}{F\alpha}\right]}{F\left[\alpha + \operatorname{arccot}\dfrac{F^{\backprime}\alpha}{F\alpha}\right]} = 0. \tag{14}$$

Die Gleichung der Radonschen Kurve $\mathfrak{R}$ in Polarkoordinaten hat somit die Form (13); F ist eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion mit den Eigenschaften (11) und (14), wobei $C = 1$ zu wählen ist.

Umgekehrt kann ohne Schwierigkeiten gezeigt werden: Jede mit einer im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion F mit den obigen Eigenschaften im Sinne der Formel (9) gebildete Funktion h stellt eine 1-normierte und den Beziehungen (1), § 16, (7) $(n = 0)$ genügende Polarfunktion eines R-Trägers dar, und zwar ist dieser Träger vermöge einer Formel wie § 6, (29) definiert.

Wir fassen zusammen:

Satz. *Alle Radonschen Kurven mit R-Trägern sind in Polarkoordinaten genau durch die Gleichung* (13) *gegeben, wobei F eine im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierte Funktion mit den Eigenschaften* (11) *und* (14) *bezeichnet.*

C. THEORIE DER ALLGEMEINEN DISPERSIONEN

In diesem Kapitel wird eine konstruktive Theorie der sogenannten allgemeinen Dispersionen entwickelt. Dies sind im wesentlichen Lösungen der Kummerschen nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung [§ 11, (1)] im Fall oszillatorischer Differentialgleichungen (Q), (q).

§ 18. Einleitung

1. Dispersionen $\varkappa$-ter Art; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. Nach dem Satz von § 13, Nr. 11, befriedigen alle Zentraldispersionen 1. Art φ_ν einer oszillatorischen Differentialgleichung (q) im Intervall $j = (a, b)$ die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{X, t\} + q(X) \cdot X'^2(t) = q(t), \tag{qq}$$

und ferner, falls der Träger q (< 0) der Klasse C_2 angehört, befriedigen alle Zentraldispersionen 2., 3., 4. Art, ψ_ν, χ_ϱ, ω_ϱ, die mit dem ersten begleitenden Träger $\hat{q}_1$ von q gebildeten Differentialgleichungen $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1 q)$, $(q\hat{q}_1)$.

Unsere weiteren Untersuchungen zielen u. a. dahin, einen Überblick über *alle* regulären (d. h. der Ungleichung $X' \neq 0$ stets genügenden) Integrale X der nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung (qq), $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1 q)$, $(q\hat{q}_1)$ zu ermitteln.

Unter Dispersionen 1., 2., 3., 4. Art einer oszillatorischen Differentialgleichung (q) im Intervall $j = (a, b)$ verstehen wir gewisse auf Grund der Differentialgleichungen (q), ($\hat{q}_1$) konstruktiv im Intervall j definierte Funktionen einer Veränderlichen. Ihre Bedeutung für die betrachtete Transformationstheorie liegt darin, daß diese Funktionen genau alle regulären Integrale der genannten nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung darstellen.

Die Zentraldispersionen 1., 2., 3., 4. Art sind also spezielle Fälle der Dispersionen entsprechender Art.

Die Theorie der Dispersionen besteht im wesentlichen in der Beschreibung der Eigenschaften von Integralen der obigen nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung und der Beziehungen dieser Integrale zu dem Transformationsproblem im Fall von Transformationen der Differentialgleichungen (q), ($\hat{q}_1$) in sich selbst und ineinander.

Im folgenden werden wir die Theorie der Dispersionen in ein breiteres Problem einschließen.

2. Allgemeine Dispersionen. Gegeben seien zwei oszillatorische Differentialgleichungen (q), (Q) in den Intervallen $j = (a, b)$ bzw. $J = (A, B)$:

$$y'' = q(t)\, y, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)\, Y. \tag{Q}$$

Unter allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q) (in dieser Anordnung) verstehen wir gewisse auf Grund der Differentialgleichungen (q), (Q) konstruktiv im Intervall j definierte Funktionen einer Veränderlichen. Die Bedeutung dieser allgemeinen Dispersionen besteht darin, daß sie genau alle regulären Integrale X der nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung

$$-\{X, t\} + Q(X) \cdot X'^2(t) = q(t) \tag{Qq}$$

darstellen.

Offenbar erhält man aus (Qq) z. B. für $Q = q$ die Differentialgleichung (qq) und auf ähnliche Weise auch die übrigen Differentialgleichungen ($\hat{q}_1\hat{q}_1$), ($\hat{q}_1$q), (q$\hat{q}_1$).

Die Theorie der allgemeinen Dispersionen besteht im wesentlichen in der Beschreibung der Eigenschaften von Integralen der Differentialgleichung (Qq) und der Beziehungen dieser Integrale zum Transformationsproblem im Fall von Transformationen der Differentialgleichungen (Q), (q).

Es sei betont, daß die Annahme, die Differentialgleichungen (Q), (q) seien oszillatorisch, für diese Theorie von entscheidender Bedeutung ist.

§ 19. Lineare Abbildungen der Integralräume der Differentialgleichungen (q), (Q) aufeinander

1. Grundbegriffe. Wir betrachten zwei oszillatorische Differentialgleichungen (q), (Q) in den Intervallen $j = (a, b)$. bzw. $J = (A, B)$. r, R seien ihre Integralräume, (u, v), (U, V) beliebige Basen von r, R und w, W die Wronskischen Determinanten dieser Basen.

Jedes Integral $y \in r$ von (q) hat in bezug auf die Basis (u, v) bestimmte konstante Koordinaten c_1, c_2: $y = c_1 u + c_2 v$, und dasselbe gilt von jedem Integral $Y \in R$ von (Q): $Y = C_1 U + C_2 V$. Umgekehrt gehört zu jeder zweigliedrigen Folge von Konstanten c_1, c_2 bzw. C_1, C_2 genau ein Integral $y \in r$ von (q) bzw. genau ein Integral $Y \in R$ von (Q) mit den Koordinaten c_1, c_2 bzw. C_1, C_2.

Wir definieren nun eine lineare Abbildung p des Integralraumes r auf den Integralraum R so, daß wir jedem Integral $y \in r$ von (q),

$$y = \lambda u + \mu v,$$

das mit denselben Konstanten λ, μ gebildete Integral $Y \in R$ von (Q) zuordnen:

$$Y = \lambda U + \mu V.$$

Das Bild Y von y in der linearen Abbildung p bezeichnen wir mit py, also ist $Y = py$; gelegentlich schreiben wir auch $y \to Y(p)$, kürzer $y \to Y$. Die Basen (u, v), (U, V) nennen wir die *erste* bzw. *zweite* Basis der linearen Abbildung p. Offenbar gilt $u \to U$, $v \to V(p)$. Wir sagen, die lineare Abbildung p sei durch die Basen (u, v), (U, V) (in dieser Anordnung) bestimmt, und drücken dies auch so aus: $p = [u \to U, v \to V]$. Die Zahl $w : W$ heißt die *Charakteristik* der linearen Abbildung p; Bezeichnung: χp.

Die lineare Abbildung p ist auch durch eine beliebige erste Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ und die zweite Basis $(p\bar{u}, p\bar{v})$ bestimmt, also $p = [\bar{u} \to p\bar{u}, \bar{v} \to p\bar{v}]$. Die Wronskischen Determinanten der Basen $(\bar{u}, \bar{v})$, $(p\bar{u}, p\bar{v})$ unterscheiden sich von w, W durch dieselbe von Null verschiedene multiplikative Konstante, d. h., die Charakteristik der linearen Abbildung p hängt von der Wahl der Basen von p nicht ab.

In der linearen Abbildung p werden zwei voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung (q) auf ebensolche Integrale von (Q) abgebildet. Die Bilder von zwei voneinander abhängigen Integralen der Differentialgleichung (q) sind voneinander abhängig und unterscheiden sich durch dieselbe multiplikative Konstante wie ihre Urbilder.

Von zwei linearen Abbildungen des Integralraumes r auf den Integralraum R sagen wir, sie haben denselben oder den entgegengesetzten Charakter, je nachdem, ob ihre Charakteristiken dasselbe Vorzeichen haben oder nicht.

Es sei $c \neq 0$ eine beliebige Zahl. Die durch die Basen (u, v), (cU, cV) bestimmte lineare Abbildung bezeichnen wir mit cp, also: $cp = [u \to cU, v \to cV]$. Diese lineare Abbildung bildet jedes Integral $y \in r$ von (q) auf das Integral $c \cdot py \in R$, also auf ein von py abhängiges Integral von (Q) ab. Wir sagen, die lineare Abbildung cp sei linear abhängig, kürzer: abhängig von p; gelegentlich nennen wir sie eine *Abänderung* von p. Die Charakteristik von cp ist $(1 : c^2) \cdot (w : W)$, also $\chi cp = (1 : c^2)\, \chi p$. Folglich haben die linearen Abbildungen p und cp denselben Charakter. Die Nullstellen der Bilder jedes Integrals $y \in r$ von (q) in den linearen Abbildungen p und cp sind offenbar dieselben.

2. Neben der linearen Abbildung p wollen wir nun eine lineare Abbildung P des Integralraumes R von (Q) auf den Integralraum $\bar{R}$ einer weiteren Differentialgleichung $(\bar{Q})$ in einem Intervall $\bar{J} = (\bar{A}, \bar{B})$ betrachten.

Für die erste Basis von P dürfen wir (U, V) wählen; die zweite sei $(\bar{U}, \bar{V})$: $P = [U \to \bar{U}, V \to \bar{V}]$. Mit $\bar{W}$ bezeichnen wir die Wronskische Determinante von $(\bar{U}, \bar{V})$. Wir haben also $\chi P = W : \bar{W}$.

Wir zeigen:
Die zusammengesetzte Abbildung $\bar{P} = Pp$ des Integralraumes r auf den Integralraum $\bar{R}$ ist die lineare Abbildung $\bar{P} = [u \to \bar{U}, v \to \bar{V}]$. Ihre Charakteristik ist das Produkt von χP, χp, also

$$\chi Pp = \chi P \cdot \chi p. \tag{1}$$

In der Tat, es sei $y \in r$ ein beliebiges Integral von (q) und ferner $Y = py$, $\bar{Y} = PY$. Dann bestehen die mit geeigneten Konstanten λ, μ gebildeten Beziehungen

$$y = \lambda u + \mu v, \qquad Y = \lambda U + \mu V, \qquad \bar{Y} = \lambda \bar{U} + \mu \bar{V},$$

und daraus folgt der erste Teil unserer Behauptung. Die Charakteristik $\chi \bar{P}$ ist offenbar $w : \bar{W} = (w : W)\,(W : \bar{W})$, womit auch der zweite Teil bewiesen ist.

Die zu der linearen Abbildung p inverse Abbildung p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r ist die lineare Abbildung $p^{-1} = [U \to u, V \to v]$. Ihre Charakteristik ist der reziproke Wert von p, also

$$\chi p^{-1} = (\chi p)^{-1}. \tag{2}$$

In der Tat, die zu der linearen Abbildung p inverse Abbildung p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r ist so definiert, daß $p^{-1}p$ die identische Abbildung e des Integralraumes r auf sich darstellt: $p^{-1}p = \mathsf{e}$. Daraus folgt der erste Teil unserer Behauptung. Nun ist offenbar $\mathsf{e} = [u \to u, v \to v]$, $\chi \mathsf{e} = 1$. Folglich ist nach (1) (für $P = p^{-1}$) auch der zweite Teil richtig.

3. Die obigen Betrachtungen sind natürlich auch dann gültig, wenn einige von den Differentialgleichungen (q), (Q), $(\bar{Q})$ und folglich auch die entsprechenden Integralräume r, R, $\bar{R}$ zusammenfallen.

Betrachten wir insbesondere den Fall $\bar{Q} = Q = q$, $\bar{R} = R = r$. In diesem Fall handelt es sich um lineare Abbildungen des Integralraumes r der Differentialgleichung (q) auf sich. Eine solche lineare Abbildung p ist durch eine erste und zweite Basis (u, v), (U, V) der Differentialgleichung (q) in dem obigen Sinne bestimmt: $p = [u \to U, v \to V]$. Die aus zwei linearen Abbildungen $p = [u \to U, v \to V]$, $P = [U \to \bar{U}, V \to \bar{V}]$ des Integralraumes r auf sich zusammengesetzte Abbildung Pp ist die lineare Abbildung $Pp = [u \to \bar{U}, v \to \bar{V}]$ von r auf sich, und es gilt eine Formel wie (1). Die lineare Abbildung $p^{-1} = [U \to u, V \to v]$ ist die zu p inverse lineare Abbildung des Integralraumes r auf sich, und es besteht eine Formel wie (2). Ferner gilt $p^{-1}p = \mathsf{e}$, $\chi \mathsf{e} = 1$.

4. Bestimmung der linearen Abbildungen vermöge erster Phasen. Es sei $p = [u \to U, v \to V]$ eine lineare Abbildung des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q).

Wir wählen beliebige (erste) Phasen α, A der Basen (u, v), (U, V) der linearen Abbildung p. Dann ist nach § 5, (26)

$$\left.\begin{aligned} u &= \varepsilon \sqrt{|w|}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}}, & v &= \varepsilon \sqrt{|w|}\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}}, \\ U &= \mathsf{E} \sqrt{|W|}\,\frac{\sin\mathsf{A}}{\sqrt{|\dot{\mathsf{A}}|}}, & V &= \mathsf{E} \sqrt{|W|}\,\frac{\cos\mathsf{A}}{\sqrt{|\dot{\mathsf{A}}|}}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ε, E sind gleich $+1$ oder -1, je nachdem, ob die Phasen α, A bezüglich der Basen (u, v), (U, V) eigentlich sind oder nicht.

Die mit beliebigen Koordinaten $\lambda = \gamma \cos k_2$, $\mu = \gamma \sin k_2$ $(\gamma > 0, 0 \leqq k_2 < 2\pi)$ in bezug auf die Basen (u, v), (U, V) gebildeten Integrale $y = \lambda u + \mu v$ $(\in r)$, $Y = \lambda U + \mu V$ $(\in R)$ von (q), (Q) lassen sich folgendermaßen ausdrücken:

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad Y = \frac{\varepsilon E}{\sqrt{|\chi p|}} \cdot k_1 \frac{\sin(\mathsf{A} + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathsf{A}}|}} \qquad \left(k_1 = \varepsilon \sqrt{|w|}\, \gamma\right). \tag{4}$$

Wir sehen: Bei jeder Wahl der Phasen α, A der Basen (u, v), (U, V) von p ist die lineare Abbildung p durch die Formel $y \to Y$ gegeben; y, Y stellen je zwei mit beliebigen Konstanten k_1 $(\neq 0)$, $0 \leqq k_2 < 2\pi$ im Sinne der Formeln (4) definierte Integrale der Differentialgleichungen (q), (Q) dar.

Wir nennen eine zweigliedrige Folge (α, A) von Phasen der Basen (u, v), (U, V) der linearen Abbildung p eine *Phasenbasis* von p. Bei jeder Wahl der Phasenbasis (α, A) der linearen Abbildung p bestehen also für je zwei Integrale $y \in r$, $Y = py \in R$ die mit denselben Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formeln (4).

Aus den Formeln (3) erhalten wir die Beziehung

$$\operatorname{sgn} \chi p = \operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}}, \tag{5}$$

d. h., die Charakteristik χp ist positiv, wenn beide Phasen α, A wachsen oder abnehmen; sie ist negativ, wenn eine von diesen Phasen wächst und die andere abnimmt.

Wir haben gesehen (Nr. 1), daß die lineare Abbildung p auch durch eine beliebige erste Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ der Differentialgleichung (q) und die zweite Basis $(p\bar{u}, p\bar{v})$ bestimmt werden kann. Als erstes Glied einer Phasenbasis (α, A) der linearen Abbildung p kann daher eine beliebige Phase α der Differentialgleichung (q) gewählt werden; dann ist das zweite Glied A bis auf ganzzahlige Vielfache der Zahl π eindeutig bestimmt.

5. Wir wollen nun wieder neben der linearen Abbildung p eine lineare Abbildung P des Integralraumes R von (Q) auf den Integralraum $\bar{R}$ einer weiteren Differentialgleichung $(\bar{\mathrm{Q}})$ in einem Intervall $\bar{J} = (\bar{A}, \bar{B})$ betrachten.

Es sei (α, A) eine Phasenbasis von p und $(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{A}})$ diejenige von P. ε, E, $\bar{E}$ sollen für die Phasen α, A, $\bar{\mathsf{A}}$ die übliche Bedeutung haben.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Sätze:

Die zusammengesetzte lineare Abbildung Pp des Integralraumes r auf den Integralraum $\bar{R}$ läßt die Phasenbasis $(\alpha, \bar{\mathsf{A}})$ zu, und es bestehen für je zwei Integrale $y \in r$, $\bar{Y} = Ppy \in \bar{R}$ die Formeln

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad \bar{Y} = \frac{\varepsilon \bar{E}}{\sqrt{|\chi P| \cdot |\chi p|}}\, k_1 \frac{\sin(\bar{\mathsf{A}} + k_2)}{\sqrt{|\bar{\mathsf{A}}^{\cdot}|}}. \tag{6}$$

Die zu der linearen Abbildung p inverse lineare Abbildung p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r läßt die Phasenbasis (A, α) zu, und es bestehen für je zwei Integrale $Y \in R$, $y = p^{-1} Y \in r$ die Formeln

$$Y = k_1 \frac{\sin(\mathsf{A} + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathsf{A}}|}}, \quad y = \varepsilon E \sqrt{|\chi p|}\, k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}. \tag{7}$$

Jede Phasenbasis der identischen linearen Abbildung e des Integralraumes r auf sich ist offenbar $(\alpha, \alpha + n\pi)$, n ganz; α ist eine (beliebige) Phase der Differentialgleichung (q).

6. Oben haben wir jeder linearen Abbildung p des Integralraumes r auf den Integralraum R zweigliedrige Folgen von Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q), die Phasenbasen von p, zugeordnet, und zwar so, daß sich jedes Integral $y \in r$ und sein Bild $Y = py \in R$ vermöge der Formeln (4) ausdrücken lassen.

Umgekehrt folgt aus den Formeln (3), (4):

Beliebige Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) bilden eine Phasenbasis (α, A) unendlich vieler voneinander abhängiger linearer Abbildungen cp $(c \neq 0)$ des Integralraumes r auf den Integralraum R. Man erhält die Basen (u, v), (U, V) einer linearen Abbildung p aus diesem System im Sinne der Formeln (3) bei beliebiger Wahl der Konstanten $\varepsilon, E = \pm 1$; w, W $(\neq 0)$, und es gelten für jedes Integral $y \in r$ und sein Bild $Y = py \in R$ Formeln wie (4).

7. **Normierte lineare Abbildungen.** Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

Es seien $p = [u \to U, v \to V]$, $P = [U \to \bar{U}, V \to \bar{V}]$ beliebige lineare Abbildungen des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) bzw. des Integralraumes R auf den Integralraum $\bar{R}$ von $(\bar{\mathrm{Q}})$. Ferner seien (α, A), $(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{A}})$ irgendwelche Phasenbasen dieser linearen Abbildungen p, P.

Es seien $z \in j$, $Z \in J$ beliebige Zahlen.

Wir nennen die lineare Abbildung p *normiert in bezug auf die Zahlen* z, Z (in dieser Anordnung), wenn sie jedes Integral $y \in r$ von (q), welches an der Stelle z verschwindet, auf ein an der Stelle Z verschwindendes Integral $Y \in R$ von (Q) abbildet, d. h., wenn aus $y(z) = 0$ die Beziehung $py(Z) = 0$ folgt.

Offenbar ist die lineare Abbildung p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, wenn sie ein (einziges) Integral $y \in r$ von (q), welches an der Stelle z verschwindet, auf ein an der Stelle Z verschwindendes Integral $Y \in R$ von (Q) abbildet.

Ist also $y \in r$ ein beliebiges Integral von (q) und $Y \in R$ sein Bild in der linearen Abbildung p, so ist die lineare Abbildung p normiert in bezug auf jede Nullstelle von y und jede Nullstelle von Y.

Ist ferner die lineare Abbildung p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so hat auch jede von p abhängige lineare Abbildung cp $(c \neq 0)$ dieselbe Eigenschaft.

Wichtig ist der folgende

Satz. *Die lineare Abbildung p ist normiert in bezug auf die Zahlen z, Z dann und nur dann, wenn sich die Werte $\alpha(z)$, $\mathsf{A}(Z)$ der Glieder von (α, A) an den Stellen z, Z um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π unterscheiden, also $\alpha(z) - \mathsf{A}(Z) = n\pi$, n ganz.*

Beweis. Es sei $y \in r$ ein an der Stelle z verschwindendes Integral von (q), also $y(z) = 0$, und $Y = py \in R$ sein Bild in der linearen Abbildung p. Es bestehen also die mit geeigneten Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formeln (4), und die Zahl $\alpha(z) + k_2$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von π.

Ist die lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so gilt $Y(Z) = 0$. Dann ist die Zahl $\mathsf{A}(Z) + k_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, und dasselbe gilt offenbar auch von der Zahl $\alpha(z) - \mathsf{A}(Z)$.

Ist umgekehrt $\alpha(z) - \mathsf{A}(Z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, so gilt dies auch von der Zahl $\mathsf{A}(Z) + k_2$, und daraus folgt $Y(Z) = 0$.

Damit ist der Beweis beendet.

Ferner zeigen wir:

Ist die lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so ist sie auch normiert in bezug auf je zwei Zahlen $\bar{z} \in j$, $\bar{Z} \in J$, von denen $\bar{z}$ mit z und $\bar{Z}$ mit Z (1-) konjugiert ist. Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ in bezug auf die Zahlen z, Z und zugleich in bezug auf zwei Zahlen $\bar{z} \in j$, $\bar{Z} \in J$ normiert, wobei $\bar{z}$ mit z oder $\bar{Z}$ mit Z konjugiert ist, so ist $\bar{z}$ mit z und $\bar{Z}$ mit Z konjugiert.

B e w e i s. Die lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ sei normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, also $\alpha(z) - \mathsf{A}(Z) = n\pi$, n ganz.

a) Es seien $\bar{z} \in j$, $\bar{Z} \in J$ beliebige Zahlen, von denen $\bar{z}$ mit z und $\bar{Z}$ mit Z konjugiert ist. Wir haben also $\bar{z} = \varphi_\nu(z)$, $\bar{Z} = \Phi_N(Z)$, wobei φ_ν, Φ_N geeignete Zentraldispersionen der Differentialgleichungen (q) bzw. (Q) bezeichnen. Nun ergibt die abelsche Funktionalgleichung [§ 13, (21)] $\alpha(\bar{z}) = \alpha(z) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha'$, $\mathsf{A}(\bar{Z}) = \mathsf{A}(Z) + N\pi \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}}$. Wir sehen, daß die Zahl $\alpha(\bar{z}) - \mathsf{A}(\bar{Z})$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

b) Es sei $\mathfrak{p}$ in bezug auf die Zahlen $\bar{z}$, $\bar{Z}$ normiert und z. B. die Zahl $\bar{z}$ mit z konjugiert. Dann ist $\alpha(\bar{z}) - \mathsf{A}(\bar{Z})$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, und dasselbe gilt (nach der abelschen Funktionalgleichung) von der Zahl $\alpha(\bar{z}) - \alpha(z)$. Wir haben also $\mathsf{A}(\bar{Z}) - \mathsf{A}(Z) = m\pi$, m ganz, und diese Beziehung ergibt im Hinblick auf die abelsche Funktionalgleichung $\bar{Z} = \Phi_M(Z)$ mit $M = m \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}}$.

Damit ist der Beweis beendet.

Ferner überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Aussage:

Sind die linearen Abbildungen $\mathfrak{p}$, P normiert in bezug auf die Zahlen z, Z bzw. $Z, \bar{Z}$, so ist die zusammengesetzte lineare Abbildung $\mathsf{P}\mathfrak{p}$ normiert in bezug auf $z, \bar{Z}$.

Ist die lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so ist die inverse lineare Abbildung $\mathfrak{p}^{-1}$ normiert in bezug auf Z, z.

Ist die identische lineare Abbildung e des Integralraumes r auf sich normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so sind diese miteinander konjugiert.

8. Wir zeigen:

Ist die lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) normiert in bezug auf die Zahlen $z \in j$, $Z \in J$, so besitzt sie eine Phasenbasis (α, A), deren Glieder an den Stellen z bzw. Z verschwinden: $\alpha(z) = 0$, $\mathsf{A}(Z) = 0$.

B e w e i s. Nehmen wir an, $\mathfrak{p}$ sei normiert in bezug auf die Zahlen z, Z.

Wir wissen, daß man als erstes Glied einer Phasenbasis von $\mathfrak{p}$ eine beliebige Phase von (q) wählen darf, wonach dann das zweite Glied bis auf ganzzahlige Vielfache der Zahl π eindeutig bestimmt ist. Wählen wir also als erstes Glied einer Phasenbasis (α, A_0) von $\mathfrak{p}$ eine beliebige Phase α von (q), die an der Stelle z verschwindet: $\alpha(z) = 0$. Dann gilt, da $\mathfrak{p}$ in bezug auf z, Z normiert ist, $\mathsf{A}_0(Z) = n\pi$,

n ganz. Ersetzt man nun die Phase A_0 von (Q) durch $\mathsf{A} = \mathsf{A}_0 - n\pi$, so bilden die Phasen α, A eine Phasenbasis von p mit der gewünschten Eigenschaft.

Wir nennen eine Phasenbasis (α, A) einer in bezug auf die Zahlen z, Z normierten linearen Abbildung p *kanonische Phasenbasis in bezug auf die Zahlen* z, Z, wenn ihre Glieder α, A an den Stellen z, Z verschwinden: $\alpha(z) = 0$, $\mathsf{A}(Z) = 0$.

Offenbar gelten die folgenden Aussagen:

Sind (α, A), $(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{A}})$ kanonische Phasenbasen der linearen Abbildungen p, P in bezug auf die Zahlen z, Z bzw. Z, $\bar{Z}$, so stellt $(\alpha, \bar{\mathsf{A}})$ eine kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung Pp in bezug auf die Zahlen z, $\bar{Z}$ dar.

Ist (α, A) eine kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung p in bezug auf die Zahlen z, Z, so stellt (A, α) eine kanonische Phasenbasis der inversen linearen Abbildung p^{-1} in bezug auf die Zahlen Z, z dar.

Jede kanonische Phasenbasis der identischen linearen Abbildung e des Integralraumes r auf sich in bezug auf die Zahlen z, $\varphi_\nu(z)$ hat die Form $(\alpha, \alpha\varphi_{-\nu})$, wobei α eine an der Stelle z verschwindende Phase der Differentialgleichung (q) bezeichnet: $\alpha(z) = 0$.

§ 20. Allgemeine Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q)

Wir kommen nun zu der eigentlichen Theorie der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q). Wir übernehmen die obigen Begriffe und Bezeichnungen.

1. Die Grundzahlen und Grundintervalle der Differentialgleichung (q). Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Ferner sei t_ν die ν-te mit t_0 (1-) konjugierte Zahl, also $t_\nu = \varphi_\nu(t_0)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die Zahlen t_ν sind also die Nullstellen jedes an der Stelle t_0 verschwindenden Integrals v von (q): t_ν stimmt mit t_0 überein oder stellt die ν-te auf t_0 folgende oder dieser Zahl vorangehende Nullstelle von v dar, je nachdem, ob $\nu = 0$ oder > 0 oder < 0 ist.

Wir nennen t_ν die ν-te *Grundzahl der Differentialgleichung* (q) *in bezug auf* t_0, kürzer: die ν-te Grundzahl.

Das Intervall $j_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1})$ bzw. $\bar{j}_\nu = (t_{\nu-1}, t_\nu]$ nennen wir das ν-te *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Grundintervall der Differentialgleichung* (q) *in bezug auf* t_0, kürzer: das ν-te rechtsseitige bzw. linksseitige Grundintervall.

Offenbar haben die Grundintervalle j_ν und $\bar{j}_\nu$ genau die Zahl t_ν gemeinsam; das Innere von j_ν fällt mit dem Inneren von $\bar{j}_{\nu+1}$ zusammen.

Jede Zahl $t \in (a, b)$ liegt in einem wohlbestimmten Grundintervall j_ν bzw. $\bar{j}_\mu$; im Fall $t = t_\nu$ haben wir $\mu = \nu$, im Fall $t \neq t_\nu$: $\mu = \nu + 1$. Insbesondere liegt jede Nullstelle eines beliebigen Integrals y von (q) in einem wohlbestimmten Grundintervall j_ν bzw. $\bar{j}_\mu$; umgekehrt enthält jedes Grundintervall j_ν bzw. $\bar{j}_\mu$ genau eine Nullstelle von y.

2. Der Dispersionsbegriff. Wir wollen nun jeder normierten linearen Abbildung p des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) eine in dem Intervall $j = (a, b)$ definierte Funktion X zuordnen.

Es sei p eine in bezug auf die (beliebig gewählten) Zahlen $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ normierte lineare Abbildung des Integralraumes r auf den Integralraum R.

Mit t_ν, T_ν bezeichnen wir die Grundzahlen der Differentialgleichungen (q), (Q) in bezug auf t_0, T_0; mit j_ν, J_ν die rechtsseitigen und mit $\bar{j}_\nu$, $\bar{J}_\nu$ die linksseitigen Grundintervalle der Differentialgleichungen (q), (Q) in bezug auf t_0, T_0; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Es sei $t \in (a, b)$ eine beliebige Zahl und y ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q); die Zahl t liegt in einem wohlbestimmten rechtsseitigen ν-ten Grundintervall j_ν.

Nun definieren wir den Wert $X(t)$ der Funktion X an der Stelle t, je nachdem, ob $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$ ist, wie folgt:

Im Fall $\chi p > 0$ ist $X(t)$ die in dem rechtsseitigen ν-ten Grundintervall J_ν liegende Nullstelle des Integrals py von (Q);

im Falle $\chi p < 0$ ist $X(t)$ die in dem linksseitigen $-\nu$-ten Grundintervall $\bar{J}_{-\nu}$ liegende Nullstelle des Integrals py von (Q).

Die Funktion X nennen wir die *allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen* (q), (Q) (in dieser Anordnung) *in bezug auf die Zahlen* t_0, T_0 *und die lineare Abbildung* p; kürzer: die allgemeine Dispersion. Die Zahlen t_ν, T_ν sind die *Grundzahlen* und insbesondere t_0, T_0 die *Anfangszahlen der allgemeinen Dispersion* X; die lineare Abbildung p heißt die *Erzeugende von* X. Im Fall $\chi p > 0$ nennen wir die allgemeine Dispersion X *direkt*, im Fall $\chi p < 0$ *indirekt*. Im Fall $Q = q$ sprechen wir kürzer von der *allgemeinen Dispersion* X *der Differentialgleichung* (q).

Die allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) in bezug auf eine von p abhängige lineare Abbildung cp ($c \neq 0$) und dieselben Zahlen t_0, T_0 stimmt mit X überein, da die lineare Abbildung cp wieder in bezug auf t_0, T_0 normiert ist und die Nullstellen der Bilder py, cpy jedes Integrals y von (q) dieselben sind.

Die allgemeine Dispersion X ist demnach durch ihre Anfangszahlen t_0, T_0 und die Erzeugende p eindeutig bestimmt.

Offenbar gelten, je nachdem, ob $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$ ist, die Formeln

$$X(t_\nu) = T_\nu \quad \text{oder} \quad X(t_\nu) = T_{-\nu} \tag{1}$$

und ferner an jeder Stelle $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$

$$X(t) \in (T_\nu, T_{\nu+1}) \quad \text{oder} \quad X(t) \in (T_{-\nu-1}, T_{-\nu}) \tag{2}$$

$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3. Eigenschaften der allgemeinen Dispersionen. Grundlegend für die Theorie der allgemeinen Dispersionen ist der folgende

Satz. *Es sei* X *die allgemeine Dispersion mit den Anfangszahlen* t_0, T_0 *und der Erzeugenden* p. *Ferner sei* (α, A) *eine kanonische Phasenbasis von* p *in bezug auf die Zahlen* t_0, T_0. *Dann erfüllt die allgemeine Dispersion* X *im Intervall* j *die Funktionalgleichung*

$$\alpha(t) = \mathsf{A}(X(t)). \tag{3}$$

Beweis. Es sei $x \in j$ eine beliebige Zahl. Dieselbe liegt in einem wohlbestimmten Intervall j_ν. Folglich haben wir wegen $\alpha(t_0) = 0$

$$\nu\pi \leqq \alpha(x) < (\nu + 1)\pi \quad \text{oder} \quad -(\nu + 1)\pi < \alpha(x) \leqq -\nu\pi, \tag{4}$$

je nachdem, ob $\operatorname{sgn} \alpha' = +1$ oder $= -1$ ist.

Es sei $y \in r$ ein an der Stelle x verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q). Dasselbe ist vermöge der mit geeigneten Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formel § 19, (4) gegeben. Wegen $y(x) = 0$ ist

$$\alpha(x) + k_2 = n\pi, \quad n \text{ ganz}. \tag{5}$$

Das Integral $Y = py \in R$ von (Q) ist vermöge der mit denselben Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formel § 19, (4) gegeben. Nun ist aber nach Definition von X die Zahl $X(x)$ eine Nullstelle des Integrals Y, also

$$\mathsf{A}(X(x)) + k_2 = N\pi, \quad N \text{ ganz}. \tag{6}$$

Aus den Beziehungen (5), (6) folgt

$$\alpha(x) - \mathsf{A}(X(x)) = m\pi, \quad m \text{ ganz}. \tag{7}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem, ob $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$ ist.

Im Fall $\chi p > 0$ liegt die Zahl $X(x)$ im Intervall J_ν. Folglich haben wir im Hinblick auf $\mathsf{A}(T_0) = 0$

$$\nu\pi \leqq \mathsf{A}(X(x)) < (\nu + 1)\,\pi \quad \text{oder} \quad -(\nu + 1)\,\pi < \mathsf{A}(X(x)) \leqq -\nu\pi, \tag{8}$$

je nachdem, ob $\operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = +1$ oder $= -1$ ist.

Da nun (nach § 19, (5)) $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = +1$ ist, bestehen die ersten Ungleichungen (4) und (8) oder die zweiten. In beiden Fällen erhalten wir aus diesen Ungleichungen

$$-\pi < \alpha(x) - \mathsf{A}(X(x)) < \pi. \tag{9}$$

Dies ergibt, zusammen mit (7), $\alpha(x) - \mathsf{A}(X(x)) = 0$.

Im Fall $\chi p < 0$ liegt die Zahl $X(x)$ im Intervall $\bar{J}_{-\nu}$. Folglich haben wir ähnlich wie oben

$$-(\nu + 1)\,\pi < \mathsf{A}(X(x)) \leqq -\nu\pi \quad \text{oder} \quad \nu\pi \leqq \mathsf{A}(X(x)) < (\nu + 1)\,\pi, \tag{10}$$

je nachdem, ob $\operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = +1$ oder $= -1$ ist.

Nun ist (nach § 19, (5)) $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = -1$, und folglich besteht die erste Ungleichung (4) und die zweite (10) oder die zweite Ungleichung (4) und die erste (10). In beiden Fällen erhalten wir aus diesen Ungleichungen wieder die Formeln (9) und ferner $\alpha(x) - \mathsf{A}(X(x)) = 0$.

Damit ist der Beweis beendet.

Die Bedeutung der Funktionalgleichung (3) besteht darin, daß man bei ihrer Anwendung Eigenschaften der allgemeinen Dispersionen aus den Eigenschaften der Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q) zu ermitteln vermag.

Wir betrachten eine allgemeine Dispersion X. t_0, T_0 seien ihre Anfangszahlen, und p sei die Erzeugende. Ferner sei (α, A) eine kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Nach dem obigen Satz gilt also im Intervall j die Funktionalgleichung (3).

1. Für $t \in j$ gilt
$$X(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t); \tag{11}$$

A^{-1} bedeutet natürlich die zu der Phase A inverse Funktion.

Dies folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung (3).

2. Die Funktion X wächst im Intervall j von A nach B oder nimmt in diesem Intervall von B nach A ab, je nachdem, ob sie direkt oder indirekt ist.

In der Tat, ist z. B. die allgemeine Dispersion X direkt, so gilt [nach § 19, (5)] $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = +1$. Wir sehen, daß die Funktionen α, A in den Intervallen j bzw. J von $-\infty$ nach ∞ wachsen oder von ∞ nach $-\infty$ abnehmen. Daraus folgt im Hinblick auf (11) der entsprechende Teil unserer Behauptung.

3. Die zu der allgemeinen Dispersion X inverse Funktion X^{-1} ist die von der zu p inversen linearen Abbildung p^{-1} erzeugte allgemeine Dispersion $x(T)$ der Differentialgleichungen (Q), (q) mit den Anfangszahlen T_0, t_0.

Beweis. Die Formel (11) zeigt, daß die zu X inverse Funktion X^{-1} die folgende ist:
$$X^{-1}(T) = \alpha^{-1}\mathsf{A}(T).$$

Nun ist aber (A, α) eine kanonische Phasenbasis der zu p inversen linearen Abbildung p^{-1} in bezug auf die Zahlen T_0, t_0 (§ 19, Nr. 8). Daraus folgt $X^{-1}(T) = x(T)$.

4. Die allgemeine Dispersion X ist im Intervall j dreimal stetig differenzierbar, und es bestehen an je zwei homologen (d. h. durch die Beziehungen $X = X(t)$, $t = X^{-1}(X)$ aneinander gebundenen) Stellen $t \in j$, $X \in J$ insbesondere die Formeln
$$\left.\begin{aligned} X'(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\dot{\mathsf{A}}(X)}; \quad & X''(t) &= \frac{1}{\dot{\mathsf{A}}^3(X)}\left[\alpha''(t)\,\dot{\mathsf{A}}^2(X) - \alpha'^2(t)\,\ddot{\mathsf{A}}(X)\right], \\ \dot{\mathsf{A}}(X) &= \frac{\alpha'(t)}{X'(t)}; \quad & \ddot{\mathsf{A}}(X) &= \frac{1}{X'^3(t)}\left[\alpha''(t)\,X'(t) - X''(t)\,\alpha'(t)\right]. \end{aligned}\right| \tag{12}$$

In der Tat, der erste Teil unserer Behauptung folgt unmittelbar aus der Formel (11), da die Funktionen α, A in den Intervallen j bzw. J dreimal stetig differenzierbar sind und $\dot{\mathsf{A}}$ stets von Null verschieden ist. Den zweiten Teil erhält man durch zweimalige Differentiation der Funktionalgleichung (3).

5. Die erste Ableitung X' der allgemeinen Dispersion X ist im Intervall j stets positiv oder stets negativ, je nachdem, ob diese letztere direkt oder indirekt ist: $\operatorname{sgn} X' = \operatorname{sgn} \chi p$.

Dies folgt aus dem obigen Satz 2 und der ersten Formel (12).

6. Für $t \in j$ gilt
$$X[\varphi_\nu(t)] = \Phi_{\nu \cdot \operatorname{sgn} X'}[X(t)] \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{13}$$

φ_ν, Φ_ν bezeichnet die ν-te Zentraldispersion der Differentialgleichung (q) bzw. (Q)

Beweis. Die Funktionalgleichung (3) ergibt an der Stelle $\varphi_\nu(t)$ die Beziehung
$$\alpha\varphi_\nu(t) = \mathsf{A}X\varphi_\nu(t)$$

und ferner, im Hinblick auf § 13, (21),

$$\mathsf{A}X(t) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha' = \mathsf{A}X\varphi_\nu(t).$$

Die links stehende Funktion läßt sich offenbar in der Form

$$\mathsf{A}X(t) + \left(\nu \cdot \operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}}\right) \pi \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}}$$

und ferner, da $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \dot{\mathsf{A}} = \operatorname{sgn} X'$ ist, in der Form $\mathsf{A}\Phi_{\nu \cdot \operatorname{sgn} X'}[X(t)]$ ausdrücken.

Also gilt

$$\mathsf{A}\Phi_{\nu \cdot \operatorname{sgn} X'}[X(t)] = \mathsf{A}X\varphi_\nu(t),$$

und daraus folgt die Formel (13).

7. Die allgemeine Dispersion X stellt im Intervall j eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = q(t) \tag{Qq}$$

dar.

Beweis. Es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl. Nach dem Satz in Nr. 3 gilt an der Stelle t und in deren Umgebung die Funktionalgleichung (3). Bildet man hier beiderseits die Schwarzsche Ableitung, so ergibt sich nach § 1, (17) und der ersten Formel (12)

$$\{X, t\} + [\{\mathsf{A}, X\} + \dot{\mathsf{A}}^2(X)]\, X'^2 = \{\alpha, t\} + \alpha'^2(t).$$

Wegen § 5, (16) ist dies die Beziehung (Qq).

Die Beziehung (Qq) nennen wir die *Differentialgleichung der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen* (q), (Q), kürzer: die allgemeine Dispersionsgleichung.

8. Die zu der allgemeinen Dispersion X inverse Funktion x stellt im Intervall J eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{x, T\} + q(x)\, \dot{x}^2 = Q(T) \tag{qQ}$$

dar.

Dies ist im Hinblick auf die obigen Sätze 3 und 7 unmittelbar ersichtlich.

9. Wir wollen nun neben der linearen Abbildung p eine in bezug auf die Zahlen T_0, Z_0 (Z_0 beliebig) normierte lineare Abbildung P des Integralraumes R auf den Integralraum $\bar{R}$ betrachten; $(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{A}})$ sei eine kanonische Phasenbasis von P in bezug auf T_0, Z_0.

Wir wissen: Die zusammengesetzte lineare Abbildung Pp des Integralraumes r auf den Integralraum $\bar{R}$ ist normiert in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0 und läßt bezüglich dieser letzteren die kanonische Phasenbasis $(\alpha, \bar{\mathsf{A}})$ zu (§ 19, Nr. 8).

Es seien X, $\bar{X}$ die von den linearen Abbildungen p, P erzeugten allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q) bzw. (Q), $(\bar{\mathrm{Q}})$ mit den Anfangszahlen t_0, T_0 bzw. T_0, Z_0.

Wir zeigen, daß die zusammengesetzte Funktion $\bar{X}X$ die von der linearen Abbildung Pp erzeugte allgemeine Dispersion $\bar{\bar{X}}$ der Differentialgleichungen (q), $(\bar{\mathrm{Q}})$ mit den Anfangszahlen t_0, Z_0 ist.

In der Tat, aus den Formeln

$$X(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t), \quad \bar{X}(T) = \bar{\mathsf{A}}^{-1}\mathsf{A}(T) \quad (t \in j,\, T \in J)$$

folgt

$$\bar{X}X(t) = \bar{\mathsf{A}}^{-1}\alpha(t).$$

Nun ist aber $(\alpha, \bar{\mathsf{A}})$ die kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung Pp in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0. Daraus folgt im Hinblick auf (11) $\bar{X}X(t) = \bar{\bar{X}}(t)$.

4. Bestimmungselemente der allgemeinen Dispersionen. Wir wissen, daß durch die Anfangszahlen und eine in bezug auf sie normierte lineare Abbildung p stets genau eine allgemeine Dispersion bestimmt ist. Wir wollen uns nun zunächst mit der Frage befassen, inwieweit allgemeine Dispersionen durch eine gegebene lineare Abbildung p als ihre Erzeugende charakterisiert sind. Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

1. Es sei p eine lineare Abbildung des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q). Durch die lineare Abbildung p ist genau ein abzählbares System von allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q) mit der Erzeugenden p bestimmt. Ist $X(t)$ eine allgemeine Dispersion aus diesem System, so ist dieses letztere von den Funktionen $X\varphi_\nu(t)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, gebildet.

Beweis. Es sei X die allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Anfangszahlen t_0, T_0 und der Erzeugenden p. Wir betrachten eine kanonische Phasenbasis (α, A) von p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Es gilt also $\alpha(t_0) = 0$, $\mathsf{A}(T_0) = 0$, und wir haben eine Formel wie (3).

a) Es sei Z eine allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Anfangszahlen t_0, Z_0 und der Erzeugenden p. Dann haben wir $Z_0 = Z(t_0)$, und die lineare Abbildung p ist normiert in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0. Es gilt also $Z_0 = \Phi_\nu(T_0)$ mit einem geeigneten Index ν.

Nun sehen wir aus der identischen Beziehung $\mathsf{A}(T) = \mathsf{A}\Phi_{-\nu}\Phi_\nu(T)$, daß die Funktion $\mathsf{A}\Phi_{-\nu}(T)$ an der Stelle Z_0 verschwindet. Folglich ist $(\alpha, \mathsf{A}\Phi_{-\nu})$ eine kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung p in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0, und nach (3) gilt für $t \in j$

$$\mathsf{A}X(t) = \alpha(t) = \mathsf{A}\Phi_{-\nu}Z(t).$$

Aus diesen Beziehungen folgt $X(t) = \Phi_{-\nu}Z(t)$ und ferner $Z(t) = \Phi_\nu X(t)$. Diese Formel ergibt im Hinblick auf (13) $Z(t) = X\varphi_{\pm\nu}(t)$.

b) Wir betrachten nun die mit einer beliebigen Zentraldispersion φ_ν der Differentialgleichung (q) gebildete Funktion $X\varphi_\nu$.

Da die lineare Abbildung p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0 normiert ist, gilt dies auch in bezug auf die Zahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0. Aus der identischen Beziehung $\alpha(t) = \alpha\varphi_\nu\varphi_{-\nu}(t)$ sehen wir, daß die Funktion $\alpha\varphi_\nu$ für $\varphi_{-\nu}(t_0)$ verschwindet. Folglich ist $(\alpha\varphi_\nu, \mathsf{A})$ eine kanonische Phasenbasis der linearen Abbildung p in bezug auf die Zahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0. Es sei Z die allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Anfangszahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0 und der Erzeugenden p. Dann haben wir nach (3) für $t \in j$

$$\alpha\varphi_\nu(t) = \mathsf{A}Z(t)$$

und ferner

$$\mathsf{A}X(t) = \alpha(t) = \mathsf{A}Z\varphi_{-\nu}(t).$$

Aus diesen Beziehungen folgt $Z(t) = X\varphi_\nu(t)$.

Damit ist der Beweis beendet.

Zweitens wollen wir zeigen, daß allgemeine Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q) durch Anfangsbedingungen zweiter Ordnung eindeutig bestimmt werden können.

2. Es seien t_0; X_0, X_0' ($\neq 0$), X_0'' beliebige Zahlen. Es gibt genau eine allgemeine Dispersion X der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Anfangsbedingungen

$$X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X_0', \quad X''(t_0) = X_0''. \tag{14}$$

Diese allgemeine Dispersion X ist direkt oder indirekt, je nachdem, ob $X_0' > 0$ oder $X_0' < 0$ ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine den obigen Anfangsbedingungen genügende allgemeine Dispersion X. Dieselbe ist durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und eine in bezug auf diese Zahlen normierte lineare Abbildung p des Integralraumes r auf den Integralraum R eindeutig bestimmt. Wir wählen eine kanonische Phasenbasis (α, A) von p in bezug auf die Zahlen t_0, X_0, und zwar so, daß

$$\alpha(t_0) = 0, \quad \alpha'(t_0) = 1, \quad \alpha''(t_0) = 0 \tag{15}$$

gilt. Dann erfüllt die allgemeine Dispersion X im Intervall j eine Funktionalgleichung wie (3), und die Formeln (12) ergeben die Werte der Funktionen $\dot{\mathsf{A}}$, $\ddot{\mathsf{A}}$ an der Stelle X_0. Auf diese Weise erhalten wir die Werte

$$\mathsf{A}(X_0) = 0, \quad \dot{\mathsf{A}}(X_0) = 1 : X_0', \quad \ddot{\mathsf{A}}(X_0) = -X_0'' : X_0'^3, \tag{16}$$

durch die die erste Phase A der Differentialgleichung (Q) eindeutig bestimmt ist (§ 7, Nr. 1).

Wir sehen, daß jede allgemeine Dispersion X mit den obigen Anfangswerten (14) mit derjenigen übereinstimmt, die durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und die Erzeugende p bestimmt ist. Die Erzeugende p ist durch die vermöge der Anfangswerte (15), (16) eindeutig gegebene kanonische Phasenbasis (α, A) bestimmt.

Damit ist der Beweis beendet.

Die allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q) bilden demnach ein von drei Parametern X_0, X_0' ($\neq 0$), X_0'' stetig abhängendes System.

Schließlich zeigen wir:

3. Durch beliebige Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) ist genau eine allgemeine Dispersion dieser Differentialgleichungen als Lösung der Funktionalgleichung $\alpha(t) = \mathsf{A}(X(t))$ bestimmt: X ist die allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) in bezug auf die Nullstellen t_0, T_0 der Phasen α, A und in bezug auf jede lineare Abbildung p mit der kanonischen Phasenbasis (α, A).

Beweis. Die allgemeine Dispersion X der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Nullstellen t_0, T_0 der Phasen α, A als Anfangszahlen und einer Erzeugenden p mit der kanonischen Phasenbasis (α, A) erfüllt im Intervall j die Funktionalgleichung $\alpha(t) = \mathsf{A}(X(t))$ (§ 20, Nr. 3). Zugleich ist X die einzige Lösung dieser letzteren: $X(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t)$. Damit ist der Beweis beendet.

5. Integration der Differentialgleichung (Qq). Die obigen Resultate gestatten es, alle im Intervall j definierten regulären Integrale der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung (Qq) zu bestimmen. Unter einem regulären Integral X der Differentialgleichung (Qq) verstehen wir ein solches, dessen Ableitung X' stets von Null verschieden ist.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Alle im Intervall j definierten regulären Integrale der Differentialgleichung* (Qq) *sind genau die allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen* (q), (Q).

Beweis. a) Es sei X eine allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q). Nach Nr. 3, 5.7 stellt diese Funktion im Intervall j eine reguläre Lösung der Differentialgleichung (Qq) dar.

b) Es sei nun X eine im Intervall j definierte Lösung der Differentialgleichung (Qq).

Wir wählen eine beliebige Zahl t_0 und die vermöge der Anfangswerte

$$\alpha(t_0) = 0, \quad \alpha'(t_0) = 1, \quad \alpha''(t_0) = 0,$$

$$\mathsf{A}(X_0) = 0, \quad \dot{\mathsf{A}}(X_0) = 1 : X_0', \quad \ddot{\mathsf{A}}(X_0) = -X_0'' : X_0'^3$$

bestimmten ersten Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q). X_0, X_0', X_0'' sind natürlich die Werte von X, X', X'' an der Stelle t_0.

Dann haben wir im Intervall j

$$-\{\tan\alpha, t\} = q(t), \qquad -\{\tan\mathsf{A}, X\} = Q(X)$$

und ferner, da die Funktion X die Differentialgleichung (Qq) erfüllt,

$$-\{X, t\} - \{\tan\mathsf{A}, X\}\cdot X'^2 = -\{\tan\alpha, t\}.$$

Daraus folgt nach § 1, (17)

$$\{\tan\mathsf{A}(X), t\} = \{\tan\alpha, t\}$$

und ferner im Hinblick auf § 1, Nr. 8

$$\tan\mathsf{A}(X) = \frac{c_{11}\tan\alpha(t) + c_{12}}{c_{21}\tan\alpha(t) + c_{22}},$$

wobei $c_{11}, \ldots, c_{22}$ geeignete Konstante bedeuten.

Nun ergeben die obigen Anfangswerte der Phasen α, A: $c_{12} = 0$, $c_{11} = c_{22}$, $c_{21} = 0$ und ferner

$$\alpha(t) = \mathsf{A}(X).$$

Folglich ist X die durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und die vermöge der Phasenbasis (α, A) bestimmte lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) definierte allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q).

Damit ist der Beweis beendet.

6. Beziehungen der allgemeinen Dispersionen zu dem Transformationsproblem. Wir betrachten eine allgemeine Dispersion X der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Anfangszahlen t_0, T_0 und der Erzeugenden p; wir haben also $\chi p > 0$ oder < 0, je nachdem, ob X direkt oder indirekt ist.

1. Es sei $Y \in R$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (Q) und $y \in r$ sein Urbild in der linearen Abbildung p, also $y \to Y(p)$. Dann stellt die Funktion $Y(X): \sqrt{|X'|}$ ein Integral der Differentialgleichung (q) dar, und es gilt im Intervall j die Beziehung

$$\frac{YX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\chi p|}}\, y(t); \tag{17}$$

dabei hängt das rechts auftretende Vorzeichen von der Wahl des Integrals Y nicht ab.

Beweis. Es sei (α, A) eine kanonische Phasenbasis von p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Dann gilt im Intervall j die Beziehung $\mathsf{A}X(t) = \alpha(t)$ (Nr. 3), und für die Integrale $Y \in R$, $y \in r$ bestehen Formeln wie § 19, (4). Daraus folgt die Beziehung (17) ($\varepsilon \mathsf{E} = \pm 1$).

2. Bei einer geeigneten Abänderung p^* von p gilt für jedes Integral $Y \in R$ und sein Urbild $y \in r$ (p^*) im Intervall j

$$\frac{YX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}} = y(t); \tag{18}$$

dabei ist $\chi p^* = \operatorname{sgn} X'$.

Beweis. Wählt man an Stelle der linearen Abbildung p die von ihr abhängige lineare Abbildung $p^* = \varepsilon \mathsf{E} \sqrt{|\chi p|}\, p$, so erhalten wir die Formel (18). Nach § 19, Nr. 1 ist $\chi p^* = \operatorname{sgn} \chi p$.

3. Es seien U, V voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung (Q), und W sei die Wronskische Determinante von (U, V). Dann sind die Integrale $UX: \sqrt{|X'|}$ $(= u)$, $VX: \sqrt{|X'|}$ $(= v)$ der Differentialgleichung (q) ebenfalls voneinander unabhängig, und für die Wronskische Determinante w von (u, v) gilt die Formel $w = W \cdot \operatorname{sgn} X'$.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Bilder in der linearen Abbildung p von zwei voneinander unabhängigen Integralen der Differentialgleichung (q) ebenfalls voneinander unabhängig sind (§ 19, Nr. 1). Der zweite Teil ergibt sich nach kurzer Rechnung.

Aus dem obigen Satz 1 sehen wir, daß jede allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) eine transformierende Funktion für diese Differentialgleichungen (q), (Q) darstellt. Aus § 11, Nr. 2 wissen wir, daß jede im Intervall j definierte transformierende Funktion der Differentialgleichungen (q), (Q) der Differentialgleichung (qQ) genügt und folglich eine allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (Q) ist (§ 20, Nr. 5), d. h., es gilt der

Satz. *Die im Intervall j definierten transformierenden Funktionen der oszillatorischen Differentialgleichungen* (q), (Q) *sind genau die allgemeinen Dispersionen dieser Differentialgleichungen* (q), (Q).

Die mit beliebigen allgemeinen Dispersionen X der Differentialgleichungen (q), (Q) gebildeten Funktionenfolgen $\left[\sqrt{|X'(t)|}, X(t)\right]$ sind also genau die Transformationen der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q).

7. Einbettung der allgemeinen Dispersionen in die Phasengruppe. Von den in dieser Nr. betrachteten Differentialgleichungen (q), (Q) setzen wir voraus, daß ihre Definitionsintervalle j, J mit $(-\infty, \infty)$ übereinstimmen: $j = J = (-\infty, \infty)$.

Es sei D die Menge der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q).

Wir wissen (Nr. 3), daß jede allgemeine Dispersion $X \in D$ von beiden Seiten unbeschränkt ist, der Klasse C_3 angehört und daß ihre Ableitung X' nirgends verschwindet. Folglich ist X eine unbeschränkte Phasenfunktion von der Klasse C_3 (§ 5, Nr. 7). Daraus schließen wir, daß D eine Untermenge der Phasengruppe $\mathfrak{G}$ (§ 10, Nr. 1) ist: $D \subset \mathfrak{G}$.

Es seien α, A beliebige (erste) Phasen der Differentialgleichungen (q) bzw. (Q).

Wir wissen (§ 10, Nr. 2,3), daß alle Phasen der Differentialgleichung (q) bzw. (Q) die rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{E}\alpha$ bzw. $\mathfrak{E}\mathsf{A}$ von $\mathfrak{E}$ bilden; $\mathfrak{E}$ bezeichnet natürlich die Fundamentaluntergruppe von $\mathfrak{G}$.

Nun bilden alle zu den in der Menge $\mathfrak{E}\mathsf{A}$ enthaltenen Phasen inversen Funktionen die linksseitige Nebenklasse $\mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{E}$ (siehe [81], S. 141).

Wir zeigen, daß *die Menge D der allgemeinen Dispersionen von* (q), (Q) *das Produkt der linksseitigen Nebenklasse $\mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}$ mit der rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{E}\alpha$ ist:*

$$D = \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha.$$

Beweis. a) Es sei $X(t) \in D$. Dann besteht nach Nr. 3,1. bei geeigneter Wahl der Phase $\bar{\mathsf{A}}$ von (Q) die Beziehung

$$X(t) = \bar{\mathsf{A}}^{-1}\alpha(t). \tag{19}$$

Da $\mathsf{A}, \bar{\mathsf{A}}$ Phasen derselben Differentialgleichung (Q) sind und folglich in derselben rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{E}\mathsf{A} = \mathfrak{E}\bar{\mathsf{A}}$ liegen, gilt $\bar{\mathsf{A}} = \xi\mathsf{A}$, $\xi \in \mathfrak{E}$. Daraus folgt $\bar{\mathsf{A}}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\xi^{-1}$ und ferner im Hinblick auf (19)

$$X(t) = \mathsf{A}^{-1}\xi^{-1}\alpha \in \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha.$$

Wir haben also $D \subset \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha$.

b) Es sei $X(t) \in \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha$. Dann haben wir bei geeigneter Wahl von $\xi \in \mathfrak{E}$

$$X(t) = \mathsf{A}^{-1}\xi\alpha(t) = (\xi^{-1}\mathsf{A})^{-1}\,\alpha(t).$$

Nun ist $\xi^{-1} \in \mathfrak{E}$, und wir sehen, daß $\bar{\mathsf{A}} = \xi^{-1}\mathsf{A} \in \mathfrak{E}\mathsf{A}$ eine Phase der Differentialgleichung (Q) ist. Folglich gilt

$$X(t) = \bar{\mathsf{A}}^{-1}\alpha(t).$$

Diese Beziehung ergibt wegen § 20, Nr. 4,3. $X(t) \in D$.

Es gilt also $\mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha \subset D$.

Damit ist der Beweis beendet.

§ 21. Dispersionen $\varkappa$-ter Art; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$

Dem Begriff von Dispersionen $\varkappa$-ter Art, $\varkappa = 1, 2, 3, 4$, sind wir bereits in § 18, Nr. 1 begegnet.

Die obige Theorie der allgemeinen Dispersionen schließt eine Theorie der in Frage stehenden Dispersionen $\varkappa$-ter Art als Spezialfall ein und führt folglich zu Erkenntnissen über diese letzteren. Wir werden aber sehen, daß neben diesen Erkenntnissen auch völlig neue, durch die spezielle Natur der betrachteten Dispersionen bedingte Gesichtspunkte auftreten.

Im folgenden betrachten wir eine oszillatorische Differentialgleichung (q) im Intervall $j = (a, b)$ und setzen $q < 0$ und $q \in C_2$ für $t \in j$ voraus.

1. Einleitung. *Unter Dispersion 1., 2., 3., 4. Art der Differentialgleichung* (q) *verstehen wir eine allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen* (q), (q) *bzw.* $(\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1)$; $(\hat{q}_1)$, (q); (q), $(\hat{q}_1)$.

Jede Dispersion ζ $\varkappa$-ter Art läßt sich als eine allgemeine Dispersion vermöge geeigneter Anfangszahlen t_0, T_0 und einer Erzeugenden $\mathfrak{p}$ konstruieren (§ 20, Nr. 2). Je nachdem, ob $\varkappa = 1, 2, 3, 4$ ist, stellt $\mathfrak{p}$ eine lineare Abbildung des Integralraumes r von (q) bzw. des Integralraumes r_1 von $(\hat{q}_1)$ auf r oder r_1 dar: $r \to r$, $r_1 \to r_1$, $r \to r_1$, $r_1 \to r$.

Wir wollen unsere weiteren Überlegungen mit einer Bemerkung über lineare Abbildungen in den eben erwähnten Fällen einleiten.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine lineare Abbildung des Integralraumes r oder r_1 auf den Integralraum r oder r_1. Ferner sei P die Projektion (§ 1, Nr. 9) des Integralraumes r auf r_1. Weiter seien in jedem der folgenden Fälle

$$r \to r; \quad r_1 \to r_1; \quad r \to r_1; \quad r_1 \to r \quad (\mathfrak{p}) \tag{1}$$

$y \in r$ bzw. $y_1 \in r_1$ beliebige Integrale der Differentialgleichung (q) bzw. $(\hat{q}_1)$ und $Y \in r$ bzw. $Y_1 \in r_1$ ihre Bilder in $\mathfrak{p}$, also

$$y \to Y; \quad y_1 \to Y_1; \quad y \to Y_1; \quad y_1 \to Y \quad (\mathfrak{p}).$$

Dann ist in jedem von diesen Fällen durch die Formeln

$$y \to Y; \quad \mathsf{P}^{-1}y_1 \to \mathsf{P}^{-1}Y_1; \quad y \to \mathsf{P}^{-1}Y_1; \quad \mathsf{P}^{-1}y_1 \to Y \quad (\mathfrak{p}_0)$$

eine lineare Abbildung $\mathfrak{p}_0$ des Integralraumes r auf sich definiert. Diese lineare Abbildung $\mathfrak{p}_0$ nennen wir den *Kern* von $\mathfrak{p}$ und schreiben $\mathfrak{p}_0 = \mathrm{K}\mathfrak{p}$.

Jede lineare Abbildung $\mathfrak{p}$ des Integralraumes r oder r_1 auf r oder r_1 hat also genau einen Kern $\mathfrak{p}_0$; dieser ist eine lineare Abbildung des Integralraumes r auf sich. Umgekehrt stellt jede lineare Abbildung $\mathfrak{p}_0$ des Integralraumes r auf sich in jedem der obigen Fälle (1) den Kern genau einer linearen Abbildung $\mathfrak{p}$ dar, und zwar ist die lineare Abbildung $y \to Y$ $(\mathfrak{p}_0)$ der Kern der folgenden linearen Abbildungen:

$$y \to Y; \quad \frac{y'}{\sqrt{-q}} \to \frac{Y'}{\sqrt{-q}}; \quad y \to \frac{Y'}{\sqrt{-q}}; \quad \frac{y'}{\sqrt{-q}} \to Y \quad (\mathfrak{p}).$$

2. Bestimmung der Dispersionen $\varkappa$-ter Art; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. Es gelten die Sätze:

1. Alle Dispersionen X_1, X_2, X_3, X_4 der 1., 2., 3., 4. Art der Differentialgleichung (q) sind durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$\alpha(X_1) = \bar{\alpha}(t); \quad \beta(X_2) = \bar{\beta}(t); \quad \beta(X_3) = \bar{\alpha}(t); \quad \alpha(X_4) = \bar{\beta}(t); \tag{2}$$

α, $\bar{\alpha}$ bedeuten beliebige bzw. geeignete erste Phasen und ähnlich β, $\bar{\beta}$ zweite Phasen der Differentialgleichung (q).

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis etwa der ersten beiden Aussagen beschränken.

Die mit beliebigen ersten Phasen α, $\bar{\alpha}$ der Differentialgleichung (q) gebildete erste Beziehung (2) bestimmt nach § 20, Nr. 4 eine allgemeine Dispersion X_1 der (zusammenfallenden) Differentialgleichungen (q), (q). Diese stellt folglich eine Dispersion 1. Art der Differentialgleichung (q) dar. Umgekehrt ist jede Dispersion 1. Art der Differentialgleichung (q), X_1, eine allgemeine Dispersion der Differentialgleichungen (q), (q) (Nr. 1), und folglich erfüllt sie die mit geeigneten ersten Phasen α, $\bar{\alpha}$ von (q) gebildete erste Beziehung (2).

Die mit beliebigen ersten Phasen β, $\bar{\beta}$ der Differentialgleichung ($\hat{q}_1$) gebildete zweite Beziehung (2) bestimmt nach § 20, Nr. 4 eine allgemeine Dispersion X_2 der Differentialgleichungen ($\hat{q}_1$), ($\hat{q}_1$) (§ 5, Nr. 11). Diese stellt folglich eine Dispersion 2. Art der Differentialgleichung (q) dar. Ähnlich sieht man, daß jede Dispersion 2. Art der Differentialgleichung (q), X_2, die mit geeigneten zweiten Phasen β, $\bar{\beta}$ von (q) gebildete zweite Beziehung (2) erfüllt.

2. Es sei $X_\varkappa$ eine Dispersion $\varkappa$-ter Art der Differentialgleichung (q) und $p_\varkappa$ ihre Erzeugende ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$). Nach eventueller Abänderung der linearen Abbildung $p_\varkappa$ bestehen im Intervall j zwischen den Integralen y, $Y = \mathrm{K}p_\varkappa y$ von (q) und ihren Ableitungen y', Y' die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{YX_1(t)}{\sqrt{|X_1'(t)|}} &= y(t); \qquad \frac{1}{\sqrt{|X_2'(t)|}} \cdot \frac{Y'X_2(t)}{\sqrt{-qX_2(t)}} = \frac{y'(t)}{\sqrt{-q(t)}}; \\ \frac{1}{\sqrt{|X_3'(t)|}} \cdot \frac{Y'X_3(t)}{\sqrt{-qX_3(t)}} &= y(t); \qquad \frac{YX_4(t)}{\sqrt{|X_4'(t)|}} = \frac{y'(t)}{\sqrt{-q(t)}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dies folgt aus dem Satz § 20, Nr. 3,9.

3. Bestimmung der Zentraldispersionen $\varkappa$-ter Art; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. Unter den Dispersionen $\varkappa$-ter Art der Differentialgleichung (q) kommen natürlich die Zentraldispersionen derselben Art vor. Dieselben sind also durch Formeln wie (2) bestimmt, wobei allerdings die darin auftretenden Phasen gewisse Bedingungen erfüllen. Darüber gelten folgende Sätze:

1. Die durch die erste Formel (2) bestimmte Dispersion 1. Art X_1 der Differentialgleichung (q) ist eine Zentraldispersion 1. Art von (q) dann und nur dann, wenn die Phasen α, $\bar{\alpha}$ zum ersten Phasensystem derselben Basis der Differentialgleichung (q) gehören, und zwar ist $X_1 = \varphi_\nu$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) genau dann, wenn $\bar{\alpha} = \alpha + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha'$ gilt.

Die durch die zweite Formel (2) bestimmte Dispersion 2. Art X_2 der Differentialgleichung (q) ist eine Zentraldispersion 2. Art von (q) dann und nur dann, wenn die Phasen β, $\bar{\beta}$ zum zweiten Phasensystem derselben Basis der Differentialgleichung (q) gehören, und zwar ist $X_2 = \psi_\nu$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) genau dann, wenn $\bar{\beta} = \beta + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \beta'$ gilt.

Die durch die dritte Formel (2) bestimmte Dispersion 3. Art X_3 der Differentialgleichung (q) ist eine Zentraldispersion 3. Art von (q) dann und nur dann, wenn die Phasen $\bar{\alpha}$, β zum ersten bzw. zweiten Phasensystem derselben Basis der Differentialgleichung (q) gehören, und zwar ist $X_3 = \chi_\varrho$ ($\varrho = \pm 1, \pm 2, \ldots$) genau dann, wenn

$$-\frac{1}{2}[1 - (2\varrho - \operatorname{sgn}\varrho)\,\varepsilon]\,\pi < \bar{\alpha} - \beta < \frac{1}{2}[1 + (2\varrho - \operatorname{sgn}\varrho)\,\varepsilon]\,\pi$$

$$(\varepsilon = \operatorname{sgn}\bar{\alpha}' = \operatorname{sgn}\beta')$$

gilt.

Die durch die vierte Formel (2) bestimmte Dispersion 4. Art X_4 der Differentialgleichung (q) ist eine Zentraldispersion 4. Art von (q) dann und nur dann, wenn die Phasen α, $\bar{\beta}$ zum ersten bzw. zweiten Phasensystem derselben Basis der Differentialgleichung (q) gehören, und zwar ist $X_4 = \omega_\varrho$ ($\varrho = \pm 1, \pm 2, \ldots$) genau dann, wenn

$$-\frac{1}{2}[1 - (2\varrho - \operatorname{sgn}\varrho)\,\varepsilon]\,\pi < \bar{\beta} - \alpha < \frac{1}{2}[1 + (2\varrho - \operatorname{sgn}\varrho)\,\varepsilon]\,\pi$$

$$(\varepsilon = \operatorname{sgn}\alpha' = \operatorname{sgn}\bar{\beta}')$$

gilt.

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt aus den abelschen Funktionalgleichungen (§ 13, Nr. 7).

2. Es sei ζ eine Dispersion $\varkappa$-ter Art der Differentialgleichung (q) mit den Anfangszahlen t_0, T_0 und der Erzeugenden $\mathfrak{p}$; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$.

Dann und nur dann gilt im Intervall j die Beziehung:

a) $\zeta = \varphi_\nu$, wenn $T_0 = \varphi_\nu(t_0)$ und $\mathfrak{p} = c\mathsf{e}$;

b) $\zeta = \psi_\nu$, wenn $T_0 = \psi_\nu(t_0)$ und $\mathfrak{p} = c\mathsf{e}$;

c) $\zeta = \chi_\varrho$, wenn $T_0 = \chi_\varrho(t_0)$ und $\mathfrak{p} = c\mathsf{P}$;

d) $\zeta = \omega_\varrho$, wenn $T_0 = \omega_\varrho(t_0)$ und $\mathfrak{p} = c\mathsf{P}$;

e bezeichnet die identische lineare Abbildung des Integralraumes r bzw. r_1 auf sich, P die Projektion von r auf r_1 und c ($\neq 0$) eine Zahl; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\varrho = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Beweis. Wir wollen z. B. den Fall c) betrachten.

1. Es sei $\zeta = \chi_\varrho$ für $t \in j$.

Zunächst haben wir offenbar $T_0 = \zeta(t_0) = \chi_\varrho(t_0)$.

Nun betrachten wir ein Integral $u \in r$ der Differentialgleichung (q). Es sei x eine Nullstelle von u. Wir haben also $u(x) = 0$, $u'\zeta(x) = 0$. Ferner sei $u_1 = \mathfrak{p}u \in r_1$, also $u_1 = \bar{u}' : \sqrt{-q}$, wobei $\bar{u} \in r$ ist. Nach Definition von ζ haben wir $u_1\zeta(x) = 0$ und folglich $\bar{u}'\zeta(x) = 0$. Die Funktionen u', $\bar{u}'$ haben also dieselbe Nullstelle $\zeta(x)$. Daraus schließen wir, daß die Integrale u, $\bar{u} \in r$ von (q) voneinander abhängen:

$\bar{u} = cu$, wobei c ($\neq 0$) eine Konstante bedeutet. Es gilt also $pu = cPu$. Wir zeigen, daß c von der Wahl des Integrals $u \in r$ nicht abhängt. In der Tat, es sei $v \in r$ ein weiteres Integral von (q). Nehmen wir zunächst an, v hänge von u ab, also $v = ku$, $0 \neq k = \text{const}$. Dann haben wir $k \cdot pu = p(ku) = pv = \bar{c}Pv = \bar{c}Pku$ $= \bar{c}kPu = (\bar{c}k : c)\, pu$ ($0 \neq \bar{c} = \text{const}$) und folglich auch $\bar{c} = c$. Zweitens nehmen wir an, v sei von u unabhängig. Nach dem Obigen ist $pv = \bar{c}Pv$ ($0 \neq \bar{c} = \text{const}$). Nun betrachten wir das Integral $u + v \in r$ von (q). Wir haben einerseits $p(u + v)$ $= pu + pv = cPu + \bar{c}Pv$ und zugleich $p(u + v) = CP(u + v) = C(Pu + Pv)$ ($0 \neq C = \text{const}$). Aus diesen Beziehungen folgt $(c - C)\, Pu + (\bar{c} - C)\, Pv = 0$ und ferner $c = C = \bar{c}$. Damit ist gezeigt, daß $p = cP$ gilt.

2. Es sei $T_0 = \chi_\varrho(t_0)$ und $p = cP$.

Die Grundzahlen t_ν der Differentialgleichung (q) in bezug auf t_0 sind $t_\nu = \varphi_\nu(t_0)$ und T_ν diejenigen der Differentialgleichung ($\hat{\text{q}}_1$) in bezug auf $T_0 : T_\nu = \chi_\varrho \varphi_\nu(t_0)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nun sei $t \in j$ eine beliebige Zahl und $u \in r$ ein an der Stelle t verschwindendes Integral von (q), also $u(t) = 0$. Somit ist $pu = cPu = cu' : \sqrt{-q}$. Nach der Definition von ζ ist $pu\zeta(t) = 0$ und folglich $u'\zeta(t) = 0$. Es gilt also $\zeta(t) = \chi_m(t)$ mit einem geeigneten Index m. Wir zeigen, daß unabhängig von der Wahl von t $m = \varrho$ ist. In der Tat, t liegt in einem gewissen rechtsseitigen Grundintervall $[t_\nu, t_{\nu+1})$. Aus $\operatorname{sgn} \chi p = \operatorname{sgn} \chi(cP) = +1$ schließen wir, daß ζ direkt ist. Folglich liegt $\zeta(t)$ in dem rechtsseitigen Grundintervall $[T_\nu, T_{\nu+1})$. Zugleich sehen wir aus $t \in [\varphi_\nu(t_0), \varphi_{\nu+1}(t_0))$, daß $\zeta(t) \in [\chi_m\varphi_\nu(t_0), \chi_m\varphi_{\nu+1}(t_0))$ ist. Es gilt also $\chi_m\varphi_\nu(t_0)$ $= \chi_\varrho\varphi_\nu(t_0)$, und diese Beziehung ergibt $m = \varrho$. Folglich haben wir $\zeta(t) = \chi_\varrho(t)$ für alle $t \in j$.

Damit ist der Beweis beendet.

4. Die Gruppe der Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q). In § 20, Nr. 7 haben wir die Menge D der allgemeinen Dispersionen zweier Differentialgleichungen (q), (Q) im Intervall $j = J = (-\infty, \infty)$ in die Phasengruppe $\mathfrak{G}$ eingebettet. Es hat sich gezeigt, daß bei beliebiger Wahl (erster) Phasen α, A von (q) bzw. (Q) die Menge D wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$D = \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{E}\alpha; \tag{4}$$

$\mathfrak{E}$ bezeichnet die Fundamentaluntergruppe von $\mathfrak{G}$.

Nun wollen wir den Fall von übereinstimmenden Differentialgleichungen (q), (Q) betrachten: $q = Q$ für alle $t \in j = (-\infty, \infty)$; dabei setzen wir lediglich $q \in C_0$ im Intervall j voraus. Dann stellt D die Menge der Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) dar. Wählt man $\mathsf{A} = \alpha$, so ergibt die Formel (4)

$$D = \alpha^{-1}\mathfrak{E}\alpha. \tag{5}$$

Die rechte Seite dieser Formel hängt natürlich von der Wahl der Phase α von (q) nicht ab, wie leicht einzusehen ist: Alle Phasen der Differentialgleichung (q) bilden genau die rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{E}\alpha$ (§ 10, Nr. 2,3) von $\mathfrak{E}$. Folglich hat jede Phase $\bar{\alpha}$ der Differentialgleichung (q) die Form $\bar{\alpha} = \xi\alpha$, wobei ξ ein geeignetes Element von $\mathfrak{E}$ ist: $\xi \in \mathfrak{E}$. Es gilt also $\bar{\alpha}^{-1} = \alpha^{-1}\xi^{-1}$ und ferner $\bar{\alpha}^{-1}\mathfrak{E}\bar{\alpha} = \alpha^{-1}(\xi^{-1}\mathfrak{E}\xi)\, \alpha$ $= \alpha^{-1}\mathfrak{E}\alpha = D$, da offenbar $\xi^{-1}\mathfrak{E}\xi = \mathfrak{E}$ ist.

Die mit einer beliebigen Phase α der Differentialgleichung (q) im Sinne der rechten Seite von (5) transformierte Fundamentaluntergruppe $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ stellt offenbar genau die Menge der Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) dar.

Nun ist aus der Gruppentheorie bekannt, daß eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ durch eine Transformation der betrachteten Art wieder in eine Untergruppe, die als konjugiert mit der ersteren bezeichnet wird, übergeht.

Die Menge der Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) *bildet in der Phasengruppe $\mathfrak{G}$ eine mit der Fundamentaluntergruppe konjugierte Untergruppe.*

5. Wir wollen nun die Gruppeneigenschaft der Menge der Dispersionen 1. Art auf Grund der Definition dieser letzteren herleiten und dann die Struktur dieser Gruppe untersuchen.

Zwecks Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir hier unter einer Dispersion stets eine solche von 1. Art verstehen. Dementsprechend sind die in Frage kommenden linearen Abbildungen stets lineare Abbildungen des Integralraumes r der Differentialgleichung (q) auf sich. Ähnlich sind unter Grundintervallen stets diejenigen der Differentialgleichung (q) zu verstehen; j bedeutet natürlich das Intervall $(-\infty, \infty)$.

1. Es sei ζ die durch beliebige gleiche Anfangszahlen t_0, t_0 und die identische lineare Abbildung e bestimmte Dispersion. Dann ist $\zeta(t) = t$ für $t \in j$.

In der Tat, es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl.

Ist $t = t_0$, so gilt $\zeta(t) = t_0 = t$.

Nehmen wir also $t \neq t_0$ an. Es sei $y \in r$ ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q); t liegt in einem gewissen ν-ten rechtsseitigen Grundintervall j_ν in bezug auf t_0. Aus $\operatorname{sgn} \chi\mathsf{e} = 1$ schließen wir, daß ζ direkt ist. Folglich stellt $\zeta(t)$ die in demselben Grundintervall j_ν liegende Nullstelle des Integrals $\mathsf{e}y = y$ dar. Wir haben also $\zeta(t) = t$.

2. Es sei ζ die durch beliebige Anfangszahlen t_0, T_0 und eine beliebige Erzeugende p bestimmte Dispersion. Dann stellt die inverse Funktion ζ^{-1} die durch die Anfangszahlen T_0, t_0 und die inverse lineare Abbildung p^{-1} bestimmte Dispersion dar; dieselbe ist direkt oder indirekt, je nachdem, ob ζ direkt oder indirekt ist.

Beweis. Es ist $\chi p > 0$ oder <0, je nachdem, ob ζ direkt oder indirekt ist. Die zu der linearen Abbildung p inverse lineare Abbildung p^{-1} ist in bezug auf die Zahlen T_0, t_0 normiert (§ 19, Nr. 7) und hat die Charakteristik $1 : \chi p$ (§ 19, Nr. 2).

Es sei Z die durch die Anfangszahlen T_0, t_0 und die Erzeugende p^{-1} bestimmte Dispersion; Z ist also direkt oder indirekt, je nachdem, ob ζ direkt oder indirekt ist.

Es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl.

Ist $t = T_0$, so gilt $\zeta^{-1}(t) = \zeta^{-1}(T_0) = t_0 = Z(T_0) = Z(t)$, und folglich ist $\zeta^{-1}(t) = Z(t)$.

Wir nehmen nun $t \neq T_0$ an. Es sei $y \in r$ ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q); t liegt in einem gewissen rechtsseitigen ν-ten und linksseitigen μ-ten Grundintervall in bezug auf T_0. Folglich ist $\zeta^{-1}(t)$ die im ν-ten oder $-\mu$-ten rechtsseitigen Grundintervall in bezug auf t_0 liegende Nullstelle des Integrals $p^{-1}y \in r$, je nachdem, ob die Dispersion ζ direkt oder indirekt ist. Daraus folgt im Hinblick auf die Definition von Z: $\zeta^{-1}(t) = Z(t)$.

3. Es seien ζ_1, ζ_2 die durch beliebige Anfangszahlen t_0, $\bar{t}_0$; $\bar{t}_0$, T_0 und beliebige Erzeugende p_1, p_2 bestimmten Dispersionen. Dann stellt die zusammengesetzte Funktion $\zeta_2\zeta_1$ die durch die Anfangszahlen t_0, T_0 und die (zusammengesetzte) lineare Abbildung p_2p_1 bestimmte Dispersion dar. Diese letzte ist direkt, wenn beide

Dispersionen ζ_1, ζ_2 direkt oder indirekt sind; sie ist aber indirekt, wenn eine von den Dispersionen direkt und die andere indirekt ist.

Beweis. Es ist $\chi p_i > 0$ oder <0, je nachdem, ob ζ_i direkt oder indirekt ist ($i = 1, 2$). Die lineare Abbildung $p = p_2 p_1$ ist in bezug auf die Zahlen t_0, T_0 normiert (§ 19, Nr. 7) und hat die Charakteristik $\chi p = \chi p_2 \cdot \chi p_1$ (§ 19, Nr. 2).

Es sei ζ die durch die Anfangszahlen t_0, T_0 und die Erzeugende p bestimmte Dispersion; ζ ist also direkt oder indirekt, je nachdem, ob $\chi p_2 \cdot \chi p_1 > 0$ oder <0 ist.

Es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl.

Ist $t = t_0$, so haben wir $\zeta_1(t) = \bar{t}_0$, $\zeta_2[\zeta_1(t)] = \zeta_2(\bar{t}_0) = T_0 = \zeta(t_0) = \zeta(t)$, und folglich ist $\zeta_2\zeta_1(t) = \zeta(t)$.

Wir nehmen nun $t \neq t_0$ an. Es sei $y \in r$ ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q); t liegt in einem gewissen rechtsseitigen ν-ten Grundintervall in bezug auf t_0. Die Zahl $\zeta_1(t)$ stellt die in dem ν-ten rechtsseitigen oder $-\nu$-ten linksseitigen Grundintervall in bezug auf $\bar{t}_0$ liegende Nullstelle des Integrals $p_1 y \in r$ dar, je nachdem, ob $\chi p_1 > 0$ oder <0 gilt.

Ist $\chi p_1 > 0$, so stellt $\zeta_2[\zeta_1(t)]$ diejenige Nullstelle des Integrals $p_2(p_1 y) = py \in r$ dar, die in dem ν-ten rechtsseitigen oder $-\nu$-ten linksseitigen Grundintervall in bezug auf T_0 enthalten ist, je nachdem, ob $\chi p_2 > 0$ oder <0 ist.

Ist $\chi p_1 < 0$, so stellt $\zeta_2[\zeta_1(t)]$ diejenige Nullstelle von $p_2(p_1 y) = py$ dar, die im $-\nu$-ten linksseitigen oder ν-ten rechtsseitigen Grundintervall in bezug auf T_0 liegt, je nachdem, ob $\chi p_2 > 0$ oder <0 ist.

Wir sehen, daß die Zahl $\zeta_2\zeta_1(t)$ diejenige Nullstelle des Integrals $py \in r$ ist, die im ν-ten rechtsseitigen oder $-\nu$-ten linksseitigen Grundintervall in bezug auf T_0 liegt, je nachdem, ob $\chi p_2 \cdot \chi p_1 > 0$ oder <0 ist. Daraus folgt nach Definition der Funktion ζ

$$\zeta_2\zeta_1(t) = \zeta(t).$$

4. Es seien t_0; ζ_0, ζ_0' $(\neq 0)$, ζ_0'' beliebige Zahlen. Es gibt genau eine Dispersion ζ mit den Cauchyschen Anfangswerten

$$\zeta(t_0) = \zeta_0, \qquad \zeta'(t_0) = \zeta_0', \qquad \zeta''(t_0) = \zeta_0''. \tag{6}$$

Dieselbe ist direkt oder indirekt, je nachdem, ob $\zeta_0' > 0$ oder $\zeta_0' < 0$ ist.

Dieser Satz ist offenbar dem von § 20, Nr. 4,2. unterordnet. Die in Frage stehende Dispersion ζ ist durch die vermöge der Anfangswerte

$$\alpha(t_0) = 0, \quad \alpha'(t_0) = 1, \quad \alpha''(t_0) = 0; \quad \mathsf{A}(\zeta_0) = 0, \quad \mathsf{A}'(\zeta_0) = 1 : \zeta_0',$$
$$\mathsf{A}''(\zeta_0) = -\zeta_0'' : \zeta_0'^3$$

festgelegten (ersten) Phasen α, A der Differentialgleichung (q) im Sinne der Formel $\mathsf{A}\zeta(t) = \alpha(t)$; $t \in (-\infty, \infty)$ eindeutig bestimmt.

Wir sehen, daß die Dispersionen ein von den Parametern ζ_0, ζ_0' $(\neq 0)$, ζ_0'' stetig abhängendes System bilden.

5. Die Dispersionen bilden in bezug auf die durch Zusammensetzung von Funktionen definierte Multiplikation eine dreiparametrige Gruppe $\mathfrak{D}$ mit dem Einselement $(\underline{1} =)\, t$. Die direkten (also wachsenden) Dispersionen bilden in der Gruppe $\mathfrak{D}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{P}$ mit dem Index 2; die indirekten (also abnehmen-

den) Dispersionen bilden in der Gruppe $\mathfrak{D}$ die Nebenklasse von $\mathfrak{P}$, also das zweite Element der Faktorgruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$.

Beweis. Der erste Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus den obigen Resultaten 1.–4. Offenbar ist $\underline{1} \in \mathfrak{P}$, und es gilt für beliebige Elemente $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{P}$, $\zeta_1^{-1} \in \mathfrak{P}$, $\zeta_2\zeta_1 \in \mathfrak{P}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{D}$ ist.

Es sei nun $A \subset \mathfrak{D}$ die aus den indirekten Dispersionen bestehende Menge. Wir betrachten eine beliebige Dispersion $\zeta \in \mathfrak{D}$. Nach der Definition der linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklasse $\zeta\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}\zeta$) des Elementes $\zeta \in \mathfrak{D}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{P}$ stellt die erstere die aus den Dispersionen ζX ($X\zeta$) gebildete Menge dar, wobei X die Elemente von $\mathfrak{P}$ durchläuft. Nun ist aber nach 3. $\zeta X \in \mathfrak{P}$ oder $\zeta X \in A$ ($X\zeta \in \mathfrak{P}$ oder $X\zeta \in A$), je nachdem, ob $\zeta \in \mathfrak{P}$ oder $\zeta \in A$ ist. Wir haben also $\xi\mathfrak{P} = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}\xi$ im Fall $\xi \in \mathfrak{P}$ und $\xi\mathfrak{P} = A = \mathfrak{P}\xi$ im Fall $\xi \in A$, also in beiden Fällen $\zeta\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\zeta$. Dies beweist, daß die Untergruppe $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{D}$ invariant ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ besteht offenbar aus den zwei Elementen $\mathfrak{P}$, A.

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nennen $\mathfrak{D}$ die *Dispersionsgruppe 1. Art* der Differentialgleichung (q), kürzer: die Dispersionsgruppe.

6. Darstellung der Dispersionsgruppe.

1. Auch im folgenden wollen wir die Dispersionsgruppe von der 1. Art der Differentialgleichung (q) mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$\mathfrak{P}$: die von den direkten Dispersionen gebildete (invariante) Untergruppe von $\mathfrak{D}$;

$\mathfrak{C}$: die von den Zentraldispersionen von der 1. Art der Differentialgleichung (q) gebildete unendliche zyklische Gruppe (§ 12, Nr. 5);

$\mathfrak{S}$: die von den Zentraldispersionen von der 1. Art mit geraden Indizes der Differentialgleichung (q) gebildete unendliche zyklische Gruppe.

Es gelten also die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{P} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{S} \supset \{\underline{1}\}. \tag{7}$$

Wir wählen nun eine Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) und bezeichnen mit w ihre Wronskische Determinante.

Es sei $\zeta \in \mathfrak{D}$ eine beliebige Dispersion, und U, V seien die Funktionen

$$U = \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}, \qquad V = \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}. \tag{8}$$

Nach § 20, Nr. 6,3. sind U, V voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung (q), und die Wronskische Determinante der von ihnen gebildeten Basis (U, V) der Differentialgleichung (q) ist $W = w \cdot \operatorname{sgn} \zeta'$.

Offenbar bestehen im Intervall j die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} &= c_{11}u + c_{12}v, \\ \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} &= c_{21}u + c_{22}v; \end{aligned}\right| \tag{9}$$

$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ sind geeignete Konstanten.

Die von diesen Konstanten gebildete quadratische Matrix $C = ||c_{ik}||$ ist durch die Dispersion ζ eindeutig bestimmt.

Nun folgt aus den Formeln (9) $W = |C|\, w$, und es gilt

$$|C| = \operatorname{sgn} \zeta' ;$$

$|C|$ ist natürlich die Determinante von C.

C ist somit eine unimodulare Matrix mit der Determinante $\operatorname{sgn} \zeta'$.

Aus § 20, Nr. 3,2. folgt: $|C|$ ist gleich 1 oder -1, je nachdem, ob die Dispersion ζ direkt oder indirekt ist.

Zur Vereinfachung unserer Schreibweise wollen wir die Formeln (9) in Vektorform

$$\frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = Cu \tag{10}$$

schreiben. u bezeichnet offenbar den aus den Komponenten u, v gebildeten Vektor.

2. Nun ordnen wir jeder Dispersion $\zeta \in \mathfrak{D}$ die im Sinne der Formel (10) definierte Matrix C zu. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung d der Gruppe $\mathfrak{D}$ auf die aus allen unimodularen quadratischen Matrizen 2. Ordnung bestehende Gruppe $\mathfrak{L}$. Es handelt sich dabei tatsächlich um eine Abbildung *auf* die Gruppe $\mathfrak{L}$, wie folgendermaßen einzusehen ist:

$C = ||c_{ik}||$ sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{L}$. Wir haben die Existenz eines Urbildes $\zeta \in \mathfrak{D}$ von C in der Abbildung d nachzuweisen. Zu diesem Zweck wählen wir eine beliebige Nullstelle t_0 des Integrals $c_{21}u + c_{22}v \in r$ und eine solche T_0 von $v \in r$, und zwar so, daß

$$\operatorname{sgn} u(T_0) = \operatorname{sgn} \big(c_{11}u(t_0) + c_{12}v(t_0)\big) \tag{11}$$

gilt (es ist leicht zu zeigen, daß eine solche Wahl stets möglich ist). Es sei ζ die durch die Anfangszahlen t_0, T_0 und die Erzeugende $p = [c_{11}u + c_{12}v \to u,\ c_{21}u + c_{22}v \to v]$ bestimmte Dispersion. Da $|C| = \operatorname{sgn} |C|$ ist, gilt $\chi p = \operatorname{sgn} |C|$. Nun ergibt die auf die Integrale $(Y =)\, u, v$ und die Dispersion ζ angewandte Formel § 20, (17) im Hinblick auf (11) Beziehungen wie (9). Folglich ist C das Urbild der Dispersion ζ in der Abbildung d.

Wir wollen nun zeigen, daß d eine homomorphe Abbildung (Deformation) der Gruppe $\mathfrak{D}$ auf die Matrizengruppe $\mathfrak{L}$ ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige Dispersionen ζ_1, $\zeta_2 \in \mathfrak{D}$ und ihre d-Bilder C_1, $C_2 \in \mathfrak{L}$. Aus den Formeln

$$\frac{u(\zeta_1)}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_1 u, \qquad \frac{u(\zeta_2)}{\sqrt{|\zeta_2'|}} = C_2 u$$

folgen die Beziehungen

$$\frac{u(\zeta_2\zeta_1)}{\sqrt{|\zeta_2'(\zeta_1)|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_2 \frac{u(\zeta_1)}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_2 C_1 u$$

und ferner

$$\frac{u(\zeta_2\zeta_1)}{\sqrt{|(\zeta_2\zeta_1)'|}} = C_2 C_1 u .$$

Es gilt also tatsächlich $d(\zeta_2\zeta_1) = C_2C_1$.

3. Das Einselement der Gruppe $\mathfrak{L}$ ist natürlich die Einheitsmatrix $E = ||\delta_{ik}||$ ($\delta_{11} = \delta_{22} = 1$; $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$).

Wir zeigen nun den Satz:

Die Deformation d der Gruppe $\mathfrak{D}$ auf die Gruppe $\mathfrak{L}$ bildet auf das Einselement $E \in \mathfrak{L}$ genau die Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) mit geraden Indizes ab. Auf das Element $-E \in \mathfrak{L}$ bildet sie genau die Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) mit ungeraden Indizes ab.

Beweis. Ist ζ eine Zentraldispersion 1. Art der Differentialgleichung (q), so gilt nach § 13, (10)

$$\frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = u \quad \text{oder} \quad \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = -u, \tag{12}$$

je nachdem, ob der Index von ζ gerade oder ungerade ist. Daraus folgt $d\zeta = E$ oder $d\zeta = -E$. Umgekehrt: Gilt für eine Dispersion ζ $d\zeta = E$ oder $d\zeta = -E$, so bestehen die Formeln (12), und daraus schließen wir, im Hinblick auf § 3, Nr. 12, daß ζ eine Zentraldispersion 1. Art der Differentialgleichung (q) mit einem geraden oder ungeraden Index darstellt.

Wenn wir nun den ersten Isomorphiesatz für Gruppen anwenden (siehe [81], S. 178), so kommen wir zu folgendem Resultat:

Die aus den Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) mit geraden Indizes bestehende Gruppe $\mathfrak{S}$ ist in der Gruppe $\mathfrak{D}$ invariant, und die Faktorgruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ ist mit der Matrizengruppe $\mathfrak{L}$ isomorph. Alle in demselben Element von $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ enthaltenen Dispersionen bilden sich in der Deformation d auf dasselbe Element von $\mathfrak{L}$ ab.

4. Aus der Formel § 20, (13) schließen wir, daß jede Zentraldispersion 1. Art der Differentialgleichung (q) mit jeder direkten Dispersion von (q) vertauschbar ist. Dies besagt, daß die Gruppe $\mathfrak{C}$ eine Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{P}$ bildet. Nun wollen wir zeigen, daß $\mathfrak{C}$ mit diesem Zentrum übereinstimmt, mit anderen Worten: Es gilt der

Satz. *Die Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung* (q) *bilden das Zentrum der Gruppe* $\mathfrak{P}$ *der direkten Dispersionen von* (q).

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß jede mit allen direkten Dispersionen vertauschbare direkte Dispersion eine Zentraldispersion 1. Art von (q) ist.

Es sei ζ_0 eine mit allen direkten Dispersionen, also mit allen Elementen von $\mathfrak{P}$ vertauschbare direkte Dispersion und $\zeta \in \mathfrak{P}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{P}$. Ferner seien $C_0 = ||c_{ik}^0||$, $C = ||c_{ik}||$ die d-Bilder von ζ_0 bzw. ζ. Wir haben also $C_0 = d\zeta_0$, $C = d\zeta$; $|C_0| = 1$, $|C| = 1$. Aus $\zeta_0\zeta = \zeta\zeta_0$ folgt die Beziehung

$$C_0C = CC_0. \tag{13}$$

Da jedes Element von $\mathfrak{L}$ ein d-Urbild besitzt, schließen wir aus (13), daß die Matrix C_0 mit jeder Matrix $C \in \mathfrak{L}$ vertauschbar ist. Wählen wir nun zunächst $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{11} \neq c_{22}$, $c_{11}c_{22} = 1$ und dann $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12}c_{21} = -1$, so erhalten wir $c_{12}^0 = c_{21}^0 = 0$, $c_{11}^0 = c_{22}^0$; $c_{11}^0c_{22}^0 = 1$. Es gilt also $C_0 = E$ oder $C_0 = -E$, und wir sehen, daß ζ_0 eine Zentraldispersion 1. Art der Differentialgleichung (q) ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Der obige Satz gab den Anlaß zu dem Attribut „Zentral“ in der Benennung der Zentraldispersionen (§ 12, Nr. 2).

Wir fassen zusammen:

Die Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) *bilden eine dreiparametrige stetige Gruppe* $\mathfrak{D}$. *Die direkten* (*wachsenden*) *Dispersionen bilden in* $\mathfrak{D}$ *eine invariante Untergruppe* $\mathfrak{P}$ *mit dem Index* 2; *die indirekten* (*abnehmenden*) *Dispersionen bilden die Nebenklasse von* $\mathfrak{P}$. *Die aus den Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung* (q) *bestehende unendliche zyklische Gruppe* $\mathfrak{C}$ *ist das Zentrum von* $\mathfrak{P}$. *Die Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung* (q) *mit geraden Indizes bilden eine in* $\mathfrak{D}$ *invariante Untergruppe* $\mathfrak{S}$, *und die Faktorgruppe* $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ *ist mit der aus allen quadratischen unimodularen Matrizen 2. Ordnung bestehenden Gruppe isomorph.*

7. Die Gruppe der Dispersionen 2. Art der Differentialgleichung (q). Nehmen wir an, die Differentialgleichung (q) lasse die erste begleitende Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ zu (§ 1, Nr. 9). Dann besitzt die Differentialgleichung (q) Dispersionen 2. Art, und diese stimmen mit denjenigen 1. Art von $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ überein. Folglich bilden die Dispersionen 2. Art der Differentialgleichung (q) eine stetige dreiparametrige Gruppe $\mathfrak{D}_1$. Ihre Struktur ist natürlich derjenigen der Gruppe $\mathfrak{D}$ analog, wobei allerdings an Stelle von Zentraldispersionen 1. Art die Zentraldispersionen 2. Art von (q) treten.

8. Das Halbgruppoid der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q). Es seien (q), (Q) beliebige oszillatorische Differentialgleichungen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Wir betrachten die nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung

$$(\mathrm{qq}),\ (\mathrm{qQ}),\ (\mathrm{Qq}),\ (\mathrm{QQ})$$

und bezeichnen mit

$$G_{11},\ G_{12},\ G_{21},\ G_{22}$$

die von den im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten regulären Integralen dieser Differentialgleichungen gebildeten Mengen. Es ist also z. B. G_{11} die Menge der Dispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q), G_{12} diejenige der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (Q), (q), usw.

Wir wissen, daß die Funktion $X(t) = t$ in den Mengen G_{11}, G_{22} liegt, ferner: Die zu jeder allgemeinen Dispersion $x_{ik} \in G_{ik}$ inverse Funktion x_{ik}^{-1} liegt in der Menge $G_{ki}: x_{ik}^{-1} \in G_{ki}$ $(i, k = 1, 2)$.

Es seien $x_{ik} \in G_{ik}$, $y_{km} \in G_{km}$ $(i, k, m = 1, 2)$ beliebige allgemeine Dispersionen der entsprechenden Differentialgleichungen (q) bzw. (Q). Es ist leicht einzusehen, daß die durch Zusammensetzung dieser allgemeinen Dispersionen definierte Funktion $x_{ik}y_{km}$ (man beachte die Anordnung!) eine in der Menge G_{im} enthaltene allgemeine Dispersion ergibt, $x_{ik}y_{km} \in G_{im}$, und umgekehrt jedes Element $z_{im} \in G_{im}$ das Resultat der Zusammensetzung von geeigneten allgemeinen Dispersionen $x_{ik} \in G_{ik}$, $y_{km} \in G_{km}$ darstellt: $x_{ik}y_{km} = z_{im}$. Diesen Sachverhalt wollen wir durch die Formel

$$G_{ik}G_{km} = G_{im} \quad (i, k, m = 1, 2)$$

oder durch die folgende „Multiplikationstafel“ ausdrücken:

	G_{11}	G_{12}	G_{21}	G_{22}
G_{11}	G_{11}	G_{12}	—	—
G_{12}	—	—	G_{11}	G_{12}
G_{21}	G_{21}	G_{22}	—	—
G_{22}	—	—	G_{21}	G_{22}

Wir betrachten das auf der Vereinigungsmenge $G_{11} \cup G_{12} \cup G_{21} \cup G_{22}$ erklärte Halbgruppoid Γ, bei dem die Zusammensetzung von Funktionen als Multiplikation erklärt ist.

Aus den obigen Überlegungen sehen wir:

Die Mengen G_{11}, G_{22} sind Gruppen mit dem gemeinsamen Einselement $(\underline{1} =)$ $X(t) = t$. Die Mengen G_{12}, G_{21} bestehen aus paarweise inversen Elementen.

Aus $G_{11}G_{12} = G_{12}$, $G_{12}G_{22} = G_{12}$ folgt: Die Gruppe G_{11} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{22} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{12}.

Aus $G_{22}G_{21} = G_{21}$, $G_{21}G_{11} = G_{21}$ folgt: Die Gruppe G_{22} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{11} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{21}.

Somit kommen wir zu der folgenden Struktur des Halbgruppoids Γ der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen (q), (Q):

Das Halbgruppoid Γ besteht aus zwei Gruppen G_{11}, G_{22} mit dem gemeinsamen Einselement $\underline{1}$ und aus zwei weiteren miteinander äquivalenten Mengen G_{12}, G_{21}. Diese Mengen besitzen die beiden Produkte $G_{12}G_{21}$ und $G_{21}G_{12}$, die mit den Gruppen G_{11} und G_{22} übereinstimmen, und bestehen aus paarweise zugeordneten Elementen, deren Produkte stets das Einselement $\underline{1}$ der Gruppen G_{11}, G_{22} sind. Die Gruppe G_{11} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{22} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{12}; ähnlich stellt die Gruppe G_{11} einen rechtsseitigen und die Gruppe G_{22} einen linksseitigen Operatorenbereich der Menge G_{21} dar.

Wir wollen unsere diesbezüglichen Überlegungen mit der folgenden Bemerkung abschließen: Die Gruppen G_{11}, G_{22} haben stets die aus dem Einselement $\underline{1}$ bestehende Gruppe $\{\underline{1}\}$ gemeinsam. In besonderen Fällen kann jedoch ihr Durchschnitt eine breitere Gruppe sein. Dies tritt z. B. ein, wenn die beiden Differentialgleichungen (q), (Q) dieselbe Fundamentaldispersion 1. Art φ haben. In diesem Fall enthält der Durchschnitt $G_{11} \cap G_{22}$ die aus allen Zentraldispersionen 1. Art φ_ν der Differentialgleichungen (q), (Q) bestehende zyklische Gruppe.