

Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung

B. Phasentheorie der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

In: Otokar Borůvka (author): Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. (German). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. pp. 31--101.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401527>

Terms of use:

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

B. PHASENTHEORIE DER GEWÖHNLICHEN LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

In diesem Kapitel werden wir die Phasentheorie der betrachteten Differentialgleichungen entwickeln. Dieselbe bildet die eigentliche methodische Grundlage für die auszubauende Transformationstheorie. Es mag vielleicht merkwürdig erscheinen, in welcher Reichhaltigkeit und Breite diese Phasentheorie, deren Grundbegriffe sich an Eigenschaften einer Funktion $q(t)$ anlehnen, entwickelt werden kann.

§ 5. Polarkoordinaten der Basen

1. Einleitung. Unsere Ausführungen in diesem Paragraphen wollen wir mit elementaren Tatsachen beginnen.

Es sei (q) eine Differentialgleichung im Intervall j .

Wir betrachten eine Basis (u, v) von (q) und die zugehörige Integralkurve \mathfrak{K} mit der Darstellung $x(t) = [u(t), v(t)]$. Wir beziehen die Koordinaten auf ein z. B. rechtwinkliges, von den Vektoren x_1, x_2 mit dem Ursprung O gebildetes Koordinatensystem. Als den positiven Sinn für die Winkelmessung wollen wir etwa den der Vierteldrehung $x_2 \rightarrow x_1$ annehmen.

Es sei $x_0 = x(t_0)$, $t_0 \in j$, ein beliebiger Punkt von \mathfrak{K} und $r_0 (> 0)$, α_0 seien seine Polarkoordinaten in bezug auf den Pol O und die Polarachse Ox_2 . r_0 stellt also den Modul des Vektors x_0 dar, während die Zahl α_0 , die wir im Intervall $[0, 2\pi)$ annehmen wollen, die Größe des Winkels (x_2, x_0) darstellt. Offenbar bestehen die Beziehungen $u(t_0) = r_0 \sin \alpha_0$, $v(t_0) = r_0 \cos \alpha_0$.

Wir definieren nun im Intervall j die Funktion $r(t)$ im Sinne der Formel

$$r(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}. \quad (1)$$

Ferner sei $\alpha(t)$ die im Intervall j (einzige) stetige Funktion, welche an der Stelle t_0 den Wert α_0 hat und überall im Intervall j , mit Ausnahme der Nullstellen von v , die Gleichung

$$\tan \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \quad (2)$$

erfüllt.

Dann haben wir für alle $t \in j$

$$u(t) = r(t) \sin \alpha(t), \quad v(t) = r(t) \cos \alpha(t). \quad (3)$$

Außer der Funktion α gibt es offenbar weitere im Intervall j stetige Funktionen, die überall in j , abgesehen von den Nullstellen des Integrals v , die Gleichung (2) erfüllen. Alle diese Funktionen haben die Form $\alpha_n = \alpha + n\pi$, n ganz, und bilden folglich ein abzählbares System. Jede von ihnen ist durch die Angabe des Anfangswertes $\alpha_n(t_0) = \alpha_0 + n\pi$ eindeutig bestimmt. Für ein gerades n erfüllen die Funktionen r, α_n die Formeln (3), für ein ungerades n ergeben die rechten Seiten von (3) die zu (u, v) proportionale Basis $(-u, -v)$.

Die Funktionen r und α_n bilden die Polarkoordinaten der Basis (u, v) .

In besonderen Fällen kann diese Begriffsbildung auf die von den Ableitungen u', v' der Funktionen u, v gebildete zweigliedrige Folge (u', v') übertragen werden.

Wir wollen nun zunächst den hier angedeuteten Sachverhalt in allen Einzelheiten prüfen. Mit w bezeichnen wir die Wronskische Determinante der Basis (u, v) .

2. Amplituden. Die durch die Formeln

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad s = \sqrt{u'^2 + v'^2} \quad (4)$$

im Intervall j definierten Funktionen r, s werden als *erste* bzw. *zweite Amplitude* der Basis (u, v) bezeichnet. Offenbar sind diese Funktionen stets positiv und gehören der Klasse C_2 bzw. C_1 an.

Man sieht, daß die Amplituden der inversen Basis (v, u) wiederum r und s sind. Im Hinblick darauf spricht man kürzer von Amplituden der (unabhängigen) Integrale u, v oder, wenn es sich um ihre Werte handelt, von Amplituden des Punktes $x(t) = [u(t), v(t)]$.

Wir wollen zeigen, daß die Amplituden r, s den folgenden nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen:

$$\left. \begin{aligned} r'' &= qr + \frac{w^2}{r^3}, \\ s'' &= qs + \frac{w^2 q^2}{s^3} + \frac{q'}{q} s', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und zwar in dem Intervall j bzw. in jedem Teilintervall $i \subset j$, in dem die Funktion q stets von Null verschieden und differenzierbar ist.

In der Tat, aus den Formeln

$$r^2 = u^2 + v^2, \quad rr' = uu' + vv', \quad w = uv' - u'v, \quad s^2 = u'^2 + v'^2 \quad (6)$$

folgen die Beziehungen

$$r^2(s^2 - r'^2) = (uv' - u'v)^2 = w^2,$$

woraus sich

$$s^2 - r'^2 = \frac{w^2}{r^2} \quad (7)$$

ergibt. Die zweite Formel (6) führt auf die Gleichung

$$rr'' = s^2 - r'^2 + qr^2,$$

und aus den zwei letzten Beziehungen folgt die erste Differentialgleichung (5).

Die zweite erhält man so: Wenn man die Gleichung (7) differenziert, so erhält man unter Beachtung der ersten Gleichung von (5) die Beziehung

$$ss' = qrr'. \quad (8)$$

Daraus folgt weiter, unter Annahme der Differenzierbarkeit von q ,

$$ss'' + s'^2 = qs^2 + q'rr' + q^2r^2,$$

und diese Beziehung ergibt, zusammen mit (8),

$$q(ss'' + s'^2) = q^2s^2 + q'ss' + q^3r^2. \quad (9)$$

Wenn man nun aus den Formeln (7), (8), (9) die Funktionen r, r' eliminiert, so erhält man für $q \neq 0$ die zweite Differentialgleichung (5).

3. Erste Phasen. Unter einer *ersten Phase der Basis* (u, v) versteht man jede im Intervall j stetige Funktion α , die in diesem Intervall, mit Ausnahme der Nullstellen von v , die Beziehung

$$\tan \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \quad (10)$$

erfüllt. Gelegentlich sprechen wir kürzer von Phasen anstatt von ersten Phasen der Basis (u, v).

Man sieht, daß es genau ein abzählbares System von Phasen der Basis (u, v) gibt. Dieses System nennen wir das *erste Phasensystem der Basis* (u, v), kürzer: das Phasensystem der Basis (u, v). Die einzelnen Phasen dieses Systems unterscheiden sich voneinander um ganzzahlige Vielfache der Zahl π .

Es sei (α) das Phasensystem von (u, v). Wählt man beliebig eine Phase $\alpha \in (\alpha)$, so besteht das Phasensystem (α) aus den Funktionen

$$\alpha_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \alpha_0 = \alpha) \quad (11)$$

und man sieht, daß es in folgender Weise geordnet werden kann:

$$\dots < \alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots \quad (12)$$

Der Wert jeder Phase $\alpha_\nu \in (\alpha)$ an einer Nullstelle von u bzw. v ist ein gerades bzw. ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$; zugleich ist jede Stelle im Intervall j , an der eine Phase $\alpha_\nu \in (\alpha)$ den Wert eines geraden bzw. ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ annimmt, eine Nullstelle von u bzw. v .

Wenn das Integral u im Intervall j nicht verschwindet, so gibt es genau eine Phase $\alpha_\nu \in (\alpha)$, deren Werte sämtlich zwischen 0 und π liegen. Wenn das Integral u im Intervall j Nullstellen besitzt, so gibt es zu jeder von ihnen genau eine Phase im System (α) , die an dieser Nullstelle verschwindet.

Aus der ersten Formel § 2, (1) schließen wir, daß jede Phase $\alpha_\nu \in (\alpha)$ im Intervall j wächst oder abnimmt, je nachdem, ob $-w > 0$ oder < 0 ist.

Die Integrale u, v drücken sich vermöge der Amplitude r und einer beliebigen Phase $\alpha_\nu \in (\alpha)$ der Basis (u, v) so aus:

$$u(t) = \varepsilon_\nu r(t) \cdot \sin \alpha_\nu(t), \quad v(t) = \varepsilon_\nu r(t) \cdot \cos \alpha_\nu(t) \quad (t \in j); \quad (13)$$

dabei ist ε_ν , die sogenannte *Signatur der Phase* α_ν , gleich ± 1 : $\varepsilon_\nu = \pm 1$.

Die Phase α_ν heißt *eigentlich* oder *uneigentlich* (in bezug auf die Basis (u, v)), je nachdem, ob $\varepsilon_\nu = 1$ oder $\varepsilon_\nu = -1$ ist.

Zwei Phasen $\alpha_\nu, \alpha_\mu \in (\alpha)$, bei denen die Differenz $\nu - \mu$ eine gerade Zahl ist, sind gleichzeitig eigentlich oder uneigentlich, während im Fall einer ungeraden Zahl eine von ihnen eigentlich und die andere uneigentlich ist.

Sind die Phasen α_ν, α_μ beide eigentlich oder uneigentlich, so heißen sie *von derselben Art*; sonst nennen wir sie *von verschiedener Art*.

Man sieht, daß bei der oben betrachteten Ordnung (12) des Phasensystems (α) die einzelnen Phasen abwechselnd eigentlich und uneigentlich sind: Der Nachfolger einer eigentlichen Phase ist uneigentlich und umgekehrt.

Sind $t_0 \in j$, n ganz, beliebige Zahlen, so gibt es stets genau eine eigentliche und eine uneigentliche Phase, deren Werte an der Stelle t_0 im Intervall $[2n\pi, (2n+2)\pi)$ liegen.

Jede in bezug auf die Basis (u, v) eigentliche (uneigentliche) Phase ist in bezug auf die Basis $(-u, -v)$ uneigentlich (eigentlich).

Die geometrische Deutung von ersten Phasen der Basis (u, v) ist folgende:

Es sei α eine erste Phase der Basis (u, v) . Ferner sei $W\alpha(t)$ der mod 2π in das Intervall $[0, 2\pi)$ reduzierte Wert $\alpha(t)$: $\alpha(t) = W\alpha(t) + 2\pi n$, $n (= n(t))$ ganz, $0 \leq W\alpha(t) < 2\pi$; $t \in j$.

Wir betrachten die Integralkurve \mathfrak{K} mit der vektoriellen Darstellung $x(t) = [u(t), v(t)]$. Dann ist $W\alpha(t)$ der von dem Vektor $x(t)$ oder $-x(t)$ und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel, je nachdem, ob α eigentlich oder uneigentlich ist. Mit anderen Worten: $\alpha(t)$ ist der von dem Vektor $x(t)$ bzw. $-x(t)$ und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel mod 2π .

4. Es sei α eine Phase der Basis (u, v) .

Der Wertevorrat von α im Intervall j ist offenbar ein (offenes) Intervall.

Es gilt der folgende

Satz. Die Phase α ist im Intervall j genau dann beschränkt, wenn die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus ist.

Beweis. Es sei J der Wertevorrat von α im Intervall j . Im Intervall j bestehen Formeln wie (13).

a) Wir nehmen an, α sei im Intervall j beschränkt. Dann enthält das Intervall J nur eine endliche Anzahl, etwa $m (\geq 0)$, von untereinander verschiedenen ganzzahligen Vielfachen der Zahl π . Daraus folgt nach (13), daß das Integral u im Intervall j genau m -mal verschwindet. Es sei nun \bar{u} ein beliebiges Integral von (q). Hängt \bar{u} von u ab, so hat \bar{u} im Intervall j genau m Nullstellen, nämlich dieselben Nullstellen wie u . Sind aber die Integrale u, \bar{u} voneinander unabhängig, so hat \bar{u} im Intervall j $m - 1$ oder m oder $m + 1$ Nullstellen, da zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von u genau eine Nullstelle von \bar{u} liegt, und umgekehrt (§ 2, Nr. 3). Wir sehen, daß die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus m oder $m + 1$ ist.

b) Die Differentialgleichung (q) sei von endlichem Typus $m (\geq 0)$. Dann hat das Integral u im Intervall j höchstens m Nullstellen. Folglich enthält das Intervall J nach (13) höchstens m voneinander verschiedene ganzzahlige Vielfache von π . Wir sehen, daß die Phase α beschränkt ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Ferner erhält man mittels ähnlicher Betrachtungen folgende Resultate:

Wenn die Phase α wächst (abnimmt), so ist sie im Intervall j genau dann von unten unbeschränkt und von oben beschränkt, falls die Differentialgleichung (q) linksseitig (rechtsseitig) oszillatorisch ist; die Phase α ist im Intervall j genau

dann von unten beschränkt und von oben unbeschränkt, falls die Differentialgleichung (q) rechtsseitig (linksseitig) oszillatorisch ist.

Die Phase α ist im Intervall j von unten und von oben unbeschränkt, wenn die Differentialgleichung (q) oszillatorisch ist.

Dem Satz von § 3, Nr. 12 entnehmen wir:

Die Werte $\alpha(t)$, $\alpha(x)$ der Phase α an zwei verschiedenen Stellen $t, x \in j$ unterscheiden sich voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π genau dann, wenn die Zahlen t, x miteinander 1-konjugiert sind.

5. Die Phase α gehört der Klasse C_3 an.

Um dies zu beweisen, wählen wir eine Zahl $x \in j$, die keine Nullstelle von v ist, und bilden im Intervall j die Funktion

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(x) + \int_x^t \frac{-w}{r^2} d\sigma.$$

Offenbar ist $\bar{\alpha} \in C_3$.

Wir betrachten die Funktion $F(t) = \alpha(t) - \bar{\alpha}(t)$. Aus der Definition von α und $\bar{\alpha}$ folgt:

1^o. $F(x) = 0$,

2^o. $F \in C_0$,

3^o. F hat in jedem Intervall $i \subset j$, in dem das Integral v stets von Null verschieden ist, eine identisch verschwindende Ableitung und folglich einen konstanten Wert.

a) Gibt es keine Nullstelle von v im Intervall j , so ist nach 1^o und 3^o $F(t) \equiv 0$ und folglich $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) \in C_3$.

b) Es sei $t_0 \in j$ eine Nullstelle von v . t_0 ist isoliert. Folglich gibt es ein größtes offenes Intervall $i_1 \subset j$ bzw. $i_2 \subset j$ mit dem rechten bzw. linken Endpunkt t_0 , in dem das Integral v stets von Null verschieden ist. Aus 3^o folgt $F(t) = k_1$ für $t \in i_1$, $F(t) = k_2$ für $t \in i_2$ ($k_1, k_2 = \text{const}$), und aus 2^o erhalten wir $k_1 = F(t_0) = k_2$. Es gibt also eine Konstante k so, daß $F(t) = k$ für alle $t \in j$ ist. 1^o ergibt $k = 0$, und es folgt $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) \in C_3$, womit der Beweis beendet ist.

Man bestätigt leicht die Richtigkeit der im Intervall j bestehenden Formeln:

$$\alpha' = \frac{-w}{r^2}, \quad \alpha'' = 2w \frac{rr'}{r^4}, \quad \alpha''' = 2w \left(\frac{q}{r^2} - 3 \frac{s^2}{r^4} + 4 \frac{w^2}{r^6} \right); \quad (14)$$

dabei bedeutet natürlich r, s die erste bzw. zweite Amplitude der Basis (u, v) .

Man entnimmt diesen Formeln, daß im Intervall j

$$\alpha' \neq 0 \quad (15)$$

ist und die Phase α die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) = q(t) \quad (16)$$

befriedigt. Das Symbol $\{\alpha, t\}$ bedeutet die Schwarzsche Ableitung von α an der Stelle t ($t \in j$) (§ 1, Nr. 7).

Eine leichte Rechnung ergibt die Beziehung

$$\{\alpha, t\} + \alpha'^2(t) = \{\tan \alpha, t\}, \quad (17)$$

wobei als Werte der rechts stehenden Funktion an den eventuellen singulären Stellen die entsprechenden Werte der linken Seite zu nehmen sind.

Folglich kann die nichtlineare Differentialgleichung (16) kürzer folgendermaßen geschrieben werden:

$$-\{\tan \alpha, t\} = q(t). \quad (18)$$

Wir sehen: *Durch die Phase α ist der Träger q der Differentialgleichung (q) eindeutig bestimmt, und zwar im Sinne der Formel (16) bzw. (18).*

Schließlich sei noch ausdrücklich auf die durch die erste Formel (14) bestehende Beziehung zwischen der Phase α und der ersten Amplitude r der Basis (u, v) hingewiesen.

6. Unter einer *ersten Phase der Differentialgleichung (q)* versteht man eine erste Phase irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Offenbar gelten die obigen Resultate für alle ersten Phasen der Differentialgleichung (q) bzw. für die zugehörigen Basen (u, v) .

7. Phasenfunktionen. Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir häufig den sogenannten Phasenfunktionen begegnen.

Unter einer *Phasenfunktion* verstehen wir eine in einem (offenen) Intervall j erklärte Funktion α mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\alpha \in C_1$;
2. $\alpha' \neq 0$ für alle $t \in j$.

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jede Phasenfunktion $\alpha \in C_3$ stellt in ihrem Definitionsintervall j eine erste Phase der im Sinne der Formel (16) gebildeten Differentialgleichung (q) dar, und zwar sind die Funktionen

$$u = |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \sin \alpha, \quad v = |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha$$

unabhängige Integrale dieser Differentialgleichung (q), und α ist eine erste Phase der Basis (u, v) .

8. Zweite Phasen. Wir wollen nun analog zu den ersten auch die zweiten Phasen der Basis (u, v) definieren. Zu diesem Zweck setzen wir voraus, daß die Nullstellen der (ersten) Ableitung v' von v , insofern sie existieren, isoliert liegen. Diese Voraussetzung wollen wir stets auch im folgenden, wenn es um zweite Phasen einer Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) gehen wird, als erfüllt betrachten. Sie ist z. B. erfüllt, wenn der Träger q im Intervall j stets von Null verschieden ist (§ 2, Nr. 1).

Unter einer *zweiten Phase der Basis (u, v)* versteht man jede im Intervall j stetige Funktion β , die in diesem Intervall, mit Ausnahme der Nullstellen von v' ,

die Beziehung

$$\tan \beta(t) = \frac{u'(t)}{v'(t)} \tag{19}$$

erfüllt.

Die zweiten Phasen der Basis (u, v) haben im allgemeinen ähnliche Eigenschaften wie die ersten. Wir werden uns deshalb diesbezüglich kürzer fassen.

Das zu der Basis (u, v) gehörige abzählbare System von zweiten Phasen nennen wir das *zweite Phasensystem der Basis* (u, v) und bezeichnen es mit (β) .

Wählt man beliebig eine zweite Phase $\beta \in (\beta)$, so besteht das System (β) aus den Funktionen

$$\beta_\nu(t) = \beta(t) + \nu\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \beta_0 = \beta), \tag{20}$$

und man sieht, daß es in folgender Weise geordnet werden kann:

$$\dots < \beta_{-2} < \beta_{-1} < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots \tag{21}$$

Aus der zweiten Formel § 2, (1) schließen wir, daß jede zweite Phase $\beta_\nu \in (\beta)$ im Intervall j wächst oder abnimmt, wenn daselbst stets $wq > 0$ oder < 0 ist.

Die Ableitungen u', v' der Integrale u, v drücken sich vermöge der zweiten Amplitude s und einer beliebigen zweiten Phase $\beta_\nu \in (\beta)$ der Basis (u, v) folgendermaßen aus:

$$u'(t) = \varepsilon'_\nu s(t) \cdot \sin \beta_\nu(t), \quad v'(t) = \varepsilon'_\nu s(t) \cdot \cos \beta_\nu(t) \quad (t \in j); \tag{22}$$

dabei ist ε'_ν , die sogenannte *Signatur der zweiten Phase* β_ν , gleich ± 1 : $\varepsilon'_\nu = \pm 1$.

Die zweite Phase β_ν heißt *eigentlich* oder *uneigentlich* (in bezug auf die Basis (u, v)), je nachdem, ob $\varepsilon'_\nu = 1$ oder $\varepsilon'_\nu = -1$ ist.

Bei der oben betrachteten Ordnung (21) des zweiten Phasensystems (β) sind die einzelnen zweiten Phasen abwechselnd eigentlich und uneigentlich: Der Nachfolger einer eigentlichen zweiten Phase ist uneigentlich und umgekehrt.

Jede in bezug auf die Basis (u, v) eigentliche (uneigentliche) zweite Phase ist in bezug auf die Basis $(-u, -v)$ uneigentlich (eigentlich).

Die geometrische Deutung von zweiten Phasen der Basis (u, v) ist folgende:

Es sei β eine zweite Phase der Basis (u, v) . Ferner sei $W\beta(t)$ der mod 2π in das Intervall $[0, 2\pi)$ reduzierte Wert $\beta(t)$: $\beta(t) = W\beta(t) + 2\pi n$, $n (= n(t))$ ganz, $0 \leq W\beta(t) < 2\pi$; $t \in j$.

Wir betrachten die Integralkurve \mathfrak{K} mit der vektoriellen Darstellung $x(t) = [u(t), v(t)]$. Dann ist $x'(t) = [u'(t), v'(t)]$ der Tangentenvektor der Kurve \mathfrak{K} im Punkt $P[u(t), v(t)]$. $W\beta(t)$ ist der von dem Tangentenvektor $x'(t)$ oder dem entgegengesetzten Vektor $-x'(t)$ und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel, je nachdem, ob β eigentlich oder uneigentlich ist. Mit anderen Worten: $\beta(t)$ ist der von dem Vektor $x'(t)$ bzw. $-x'(t)$ und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel mod 2π .

9. Es sei β eine zweite Phase der Basis (u, v) .

Ist der Träger q von (q) im Intervall j überall von Null verschieden, also $q(t) \neq 0$ für $t \in j$, so ist die zweite Phase β je nach dem Typus der Differentialgleichung (q) im Intervall j beschränkt oder nicht, und es gelten darüber im einzelnen dieselben Aussagen wie von den ersten Phasen (Nr. 4).

Dem Satz von § 3, Nr. 12 entnehmen wir:

Die Werte $\beta(t)$, $\beta(x)$ der Phase β an zwei verschiedenen Stellen $t, x \in j$ unterscheiden sich voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π genau dann, wenn die Zahlen t, x miteinander 2-konjugiert sind.

10. Die zweite Phase β gehört der Klasse C_1 an.

Der Beweis verläuft analog wie der in Nr. 5 für die ersten Phasen. In diesem Fall wird die Funktion

$$\bar{\beta}(t) = \beta(x) + \int_x^t \frac{wq}{s^2} d\sigma$$

betrachtet.

Unter der Annahme der Existenz der entsprechenden Ableitungen von q gehört β zu einer höheren Klasse, und es gelten die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= w \frac{q}{s^2}, & \beta'' &= w \left(\frac{q'}{s^2} - 2 \frac{qs'}{s^3} \right), \\ \beta''' &= w \left(\frac{q''}{s^2} - 2 \frac{2q's' + qs''}{s^3} + 6 \frac{qs'^2}{s^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Man entnimmt diesen Formeln, daß die Nullstellen der Funktion β' mit den Nullstellen des Trägers q zusammenfallen.

11. Wir nehmen nun an, daß im Intervall j der Träger q von (q) nicht verschwindet, d. h. $q(t) \neq 0$ für $t \in j$, und der Klasse C_2 angehört.

Dann stellen die Funktionen

$$u_1 = \frac{u'}{\sqrt{|q|}}, \quad v_1 = \frac{v'}{\sqrt{|q|}}$$

eine Basis der in bezug auf (q) begleitenden Differentialgleichung (\hat{q}_1) dar (§ 1, Nr. 9).

Aus der Beziehung $u' : v' = u_1 : v_1$ sieht man, daß das zweite Phasensystem der Basis (u, v) mit dem ersten der Basis (u_1, v_1) zusammenfällt.

Daraus folgt zunächst für $t \in j$ die Beziehung

$$-\tan \{\beta, t\} = \hat{q}_1(t). \quad (24)$$

Ferner gilt:

Die Differentialgleichung (q) und die begleitende Differentialgleichung (\hat{q}_1) haben denselben oszillatorischen Charakter, d. h., beide sind zugleich von endlichen Typen oder oszillatorisch von derselben Art.

In der Tat, es sei β eine wachsende zweite Phase der Basis (u, v) und folglich zugleich eine wachsende erste Phase α_1 von (u_1, v_1) : $\beta = \alpha_1$. Ist die Differentialgleichung (q) (\hat{q}_1) von endlichem Typus, so ist nach Nr. 9 (Nr. 4) die Funktion β (α_1), d. h. α_1 (β), beschränkt, und wir sehen nach Nr. 4 (Nr. 9), daß die Differentialgleichung (\hat{q}_1) ((q)) von endlichem Typus ist. Wenn die Differentialgleichung (q) (\hat{q}_1) von unendlichem Typus ist, und zwar linksseitig bzw. rechtsseitig oszillatorisch oder oszillatorisch, so ist nach Nr. 9 (Nr. 4) die Funktion β (α_1) von unten

unbeschränkt und von oben beschränkt bzw. von unten beschränkt und von oben unbeschränkt oder von beiden Seiten unbeschränkt, und die Phase α_1 (β) hat natürlich stets dieselben Eigenschaften. Im Hinblick auf Nr. 4 (Nr. 9) schließen wir, daß die Differentialgleichung (\hat{q}_1) ((q)) vom unendlichen Typus ist, und zwar wiederum linksseitig- bzw. rechtsseitig oszillatorisch oder oszillatorisch.

12. Unter einer zweiten Phase der Differentialgleichung (q) versteht man eine zweite Phase irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Offenbar gelten die in Nr. 8–10 angeführten Resultate für alle zweiten Phasen der Differentialgleichung (q) bzw. für die zugehörigen Basen (u, v).

Wir wollen noch folgendes bemerken: Das Problem der Bestimmung der Differentialgleichung (q) mit einem nichtverschwindenden Träger q von der Klasse C_2 durch eine ihrer zweiten Phasen β ist mit der Integration der nicht-linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$X'' = -\{\tan \beta, t\} \cdot X + \frac{\varepsilon}{X} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

äquivalent. Dies sieht man ein, wenn man die Formel § 1, (18) folgendermaßen schreibt:

$$-\{\tan \beta, t\} \frac{1}{\sqrt{|q(t)|}} = \frac{\operatorname{sgn} q(t)}{\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}} \right)''.$$

13. Integrale der Differentialgleichung (q) und ihre Ableitungen in Polarkoordinaten. Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q), r, s seien die Amplituden und α, β eine erste bzw. zweite Phase der Basis (u, v).

Wir haben bereits gesehen [(13), (22)], daß sich die Integrale u, v und ihre Ableitungen u', v' im Intervall j vermöge der Formeln

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \varepsilon r(t) \cdot \sin \alpha(t), & v(t) &= \varepsilon r(t) \cdot \cos \alpha(t), \\ u'(t) &= \varepsilon' s(t) \cdot \sin \beta(t), & v'(t) &= \varepsilon' s(t) \cdot \cos \beta(t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

($\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$)

ausdrücken lassen, wobei die Werte von $\varepsilon, \varepsilon'$ von der Wahl der Phasen α, β abhängen.

Im Hinblick auf (14), (23) kann man auch

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \varepsilon \sqrt{|w|} \frac{\sin \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, & v(t) &= \varepsilon \sqrt{|w|} \frac{\cos \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \\ \sqrt{|\beta'(t)|} u'(t) &= \varepsilon' \sqrt{|wq(t)|} \sin \beta(t), & \sqrt{|\beta'(t)|} v'(t) &= \varepsilon' \sqrt{|wq(t)|} \cos \beta(t) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

schreiben.

Folglich haben wir für das allgemeine Integral y der Differentialgleichung (q) und dessen Ableitung y' die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= k_1 \frac{\sin [\alpha(t) + k_2]}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \\ \sqrt{|\beta'(t)|} y'(t) &= \pm k_1 \sqrt{|q(t)|} \sin [\beta(t) + k_2], \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wobei k_1, k_2 beliebige Konstanten bedeuten.

In der zweiten Formel (27) gilt das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem, ob die Signaturen $\varepsilon, \varepsilon'$ der Phasen α, β denselben Wert haben oder entgegengesetzt sind.

Ist $k_2 = n\pi + k'_2$, $0 \leq k'_2 < \pi$, n ganz, so bleiben die Werte der rechten Seiten in (27) unverändert, wenn man k_1 durch $k'_1 = (-1)^n k_1$ und k_2 durch k'_2 ersetzt. Man sieht: In den Formeln (27) darf man ohne Verlust an Allgemeinheit $0 \leq k_2 < \pi$ annehmen.

14. Beziehungen zwischen ersten und zweiten Phasen derselben Basis. Wir betrachten eine beliebige Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) mit der Wronskischen Determinante $w (=uv' - u'v)$.

Es sei $\alpha \in (\alpha)$, $\beta \in (\beta)$ eine erste bzw. zweite Phase der Basis (u, v) und ε bzw. ε' die entsprechende Signatur.

Aus der Definition von w und den Formeln (25) folgt für $t \in j$ die Beziehung

$$r \cdot s \cdot \sin(\beta - \alpha) = \varepsilon \varepsilon'(-w). \quad (28)$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung stets von Null verschieden ist, gibt es eine ganze Zahl n , so daß die Differenz $\beta - \alpha$ an jeder Stelle $t \in j$ zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegt:

$$n\pi < \beta - \alpha < (n+1)\pi. \quad (29)$$

Wir setzen $\alpha_0 = \alpha + n\pi$, $\beta_0 = \beta$ und definieren die Phasen $\alpha_v \in (\alpha)$, $\beta_v \in (\beta)$ im Sinne der Formeln (11), (20).

Man sieht, daß das von allen ersten und zweiten Phasen der Basis (u, v) gebildete System, das wir das *gemischte Phasensystem* der Basis (u, v) nennen wollen, in folgender Weise geordnet werden kann:

$$\dots < \alpha_{-1} < \beta_{-1} < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots \quad (30)$$

Bei dieser Ordnung erfüllen offenbar je zwei benachbarte Phasen α_v, β_v oder β_v, α_{v+1} im Intervall j die Beziehungen

$$0 < \beta_v - \alpha_v < \pi \quad \text{bzw.} \quad -\pi < \beta_v - \alpha_{v+1} < 0.$$

Daraus folgt [nach (28)]

$$\operatorname{sgn} \varepsilon_v \varepsilon'_v(-w) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{sgn} \varepsilon'_v \varepsilon_{v+1}(-w) = -1.$$

Nun sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob $-w > 0$ oder $-w < 0$ ist. Der erste bzw. zweite Fall ist dadurch charakterisiert, daß die ersten Phasen α_v wachsen bzw. abnehmen.

Im Fall $-w > 0$ haben wir

$$\operatorname{sgn} \varepsilon_v \varepsilon'_v = 1; \quad \operatorname{sgn} \varepsilon'_v \varepsilon_{v+1} = -1.$$

Wie man sieht, folgt bei der Ordnung (30) des gemischten Phasensystems der Basis (u, v) nach jeder eigentlichen (uneigentlichen) ersten Phase α_v eine eigentliche (uneigentliche) zweite Phase β_v , während nach jeder eigentlichen (uneigentlichen) zweiten Phase β_v eine uneigentliche (eigentliche) erste Phase α_{v+1} steht.

Im Fall $-w < 0$ haben wir

$$\operatorname{sgn} \varepsilon_v \varepsilon'_v = -1, \quad \operatorname{sgn} \varepsilon'_v \varepsilon_{v+1} = 1,$$

d. h., nach jeder eigentlichen (uneigentlichen) ersten Phase α_v folgt eine uneigentliche (eigentliche) zweite Phase β_v , während nach jeder eigentlichen (uneigentlichen) zweiten Phase β_v eine eigentliche (uneigentliche) erste Phase α_{v+1} steht.

Dies ist eine Art Beziehungen zwischen ersten und zweiten Phasen derselben Basis der Differentialgleichung (q).

15. Wir wollen nun weitere Beziehungen entwickeln.

Zunächst folgt aus (28) im Hinblick auf die ersten Formeln (14), (23)

$$\frac{\alpha' \beta'}{\sin^2(\beta - \alpha)} = -q. \quad (31)$$

Außerdem ergeben die ersten Formeln (14), (23)

$$\frac{\beta' \cdot s^2}{\alpha' \cdot r^2} = -q. \quad (32)$$

Ist $-q > 0$ bzw. $-q < 0$ an einer Stelle $t \in j$, so haben die Funktionen α' , β' an dieser Stelle dieselben bzw. entgegengesetzte Vorzeichen.

Wenn also die Funktion q im Intervall j stets von Null verschieden ist, haben die Phasen α , β folgendes Verhalten:

- im Fall $-q > 0$: beide Phasen α , β im Intervall j wachsen oder nehmen ab;
- im Fall $-q < 0$: eine von ihnen wächst, während die andere abnimmt.

Ist folglich die Funktion q im Intervall j stets von Null verschieden, so verhält sich das gemischte Phasensystem (30) wie folgt:

- im Fall $-q > 0$: alle Phasen α_v , β_v wachsen oder nehmen ab;
- im Fall $-q < 0$: die Phasen α_v , β_v wachsen und nehmen abwechselnd ab.

Dem Satz von § 3, Nr. 12, entnehmen wir:

Die Werte $\alpha(t)$, $\beta(x)$ der Phasen α , β an zwei Stellen t , $x \in j$ unterscheiden sich voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π genau dann, wenn x mit t 3-konjugiert und folglich t mit x 4-konjugiert ist.

16. Beliebige Phasen α , β der Basis (u , v) haben, wie wir wissen (Nr. 5, 10), im Intervall j folgende Eigenschaften:

$$\alpha \in C_3, \quad \beta \in C_1, \quad \alpha' \neq 0. \quad (33)$$

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Satz. Zwei Funktionen α , β in einem (offenen) Intervall j mit den Eigenschaften (33) stellen dann und nur dann eine erste bzw. zweite Phase einer Basis (u , v) einer Differentialgleichung (q) dar, wenn für $t \in j$

$$\beta = \alpha + \operatorname{Arccot} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' \quad (34)$$

ist. Arcot bezeichnet einen geeigneten bzw. beliebigen Zweig dieser Funktion.

Ist die Beziehung (34) erfüllt, so haben die im Intervall j definierten Funktionen

$$u = |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \sin \alpha, \quad v = |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha \quad (35)$$

die verlangte Eigenschaft, und der zugehörige Träger q ist im Sinne der Formel (16) bestimmt.

Beweis. a) Es sei (u, v) eine Basis einer Differentialgleichung (q) und α, β eine erste bzw. zweite Phase von (u, v) .

Die Funktionen α, β haben, wie wir wissen, die Eigenschaften (33), und es gelten Formeln wie (10), (19), (29).

Aus

$$\cot(\beta - \alpha) = -\frac{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha} = -\frac{uu' + vv'}{uv' - u'v} = -\frac{1}{w} rr'$$

folgt im Hinblick auf die erste Formel (14) die Beziehung (34).

b) Es seien α, β beliebige Funktionen in einem (offenen) Intervall j mit den Eigenschaften (33), (34).

Wir definieren im Intervall j die Funktionen $q; u, v$ im Sinne der Formeln (16) und (35).

Die Funktionen u, v sind offenbar von der Klasse C_2 , und es gelten an jeder Stelle $t \in j$ die Formeln

$$\left. \begin{aligned} u' &= \varepsilon |\alpha'|^{\frac{1}{2}} \left[\cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' \sin \alpha \right], \\ v' &= \varepsilon |\alpha'|^{\frac{1}{2}} \left[-\sin \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' \cos \alpha \right] \end{aligned} \right\} (\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha') \quad (36)$$

und ferner

$$\begin{aligned} u'' &= [-\{\alpha, t\} - \alpha'^2] |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \sin \alpha, \\ v'' &= [-\{\alpha, t\} - \alpha'^2] |\alpha'|^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wie man sieht, bilden die Funktionen u, v eine Basis der Differentialgleichung (q) mit der Wronskischen Determinante $w = -\varepsilon$.

Aus (35) haben wir im Intervall j , mit Ausnahme der Nullstellen von v : $u/v = \tan \alpha$, während die Formeln (36) und (34) für jeden von den Nullstellen der Funktion v' verschiedenen Wert

$$\frac{u'}{v'} = \frac{\cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' \sin \alpha}{-\sin \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot(\beta - \alpha)}{-\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cot(\beta - \alpha)} = \tan \beta$$

ergeben.

Wie man sieht, ist α eine erste und β eine zweite Phase der Basis (u, v) .

Damit ist der Beweis beendet.

Schließlich sei bemerkt, daß beliebige Phasen α, β der Basis (u, v) im Intervall j nach der folgenden „Klammersformel“ zusammenhängen:

$$\{\tan \alpha, t\} - \{\tan \beta, t\} + \left\{ \int_{t_0}^t q \, d\sigma, t \right\} = 0 \quad (t_0 \in j). \quad (37)$$

Diese Beziehung geht aus den Formeln (18), (24) und § 1, (20) hervor.

17. Phasen von verschiedenen Basen der Differentialgleichung (q). Wir wollen nun Beziehungen zwischen ersten und zweiten Phasen zweier Basen der Differentialgleichung (q) untersuchen.

Es seien (u, v) , (\bar{u}, \bar{v}) Basen der Differentialgleichung (q) und w, \bar{w} ihre Wronskischen Determinanten; ferner $\alpha, \bar{\alpha}$ bzw. $\beta, \bar{\beta}$ erste bzw. zweite Phasen dieser Basen und $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ Konstante mit von Null verschiedener Determinante $|c_{ik}| (= \Delta \neq 0)$.

Es gilt der folgende

Satz. *Aus*

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= c_{11}u + c_{12}v, \\ \bar{v} &= c_{21}u + c_{22}v \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

folgt

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{c_{11} \tan \alpha + c_{12}}{c_{21} \tan \alpha + c_{22}}, \quad \tan \bar{\beta} = \frac{c_{11} \tan \beta + c_{12}}{c_{21} \tan \beta + c_{22}}. \quad (39)$$

Umgekehrt folgt aus der ersten Beziehung (39) und ebenso aus der zweiten, falls im Intervall j stets $q \neq 0$ ist,

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \pm \sqrt{\frac{\bar{w}}{w\Delta}} (c_{11}u + c_{12}v), \\ \bar{v} &= \pm \sqrt{\frac{\bar{w}}{w\Delta}} (c_{21}u + c_{22}v). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Das Bestehen der Beziehungen (39) ist im ganzen Intervall j mit Ausnahme der singulären Stellen der entsprechenden Funktionen gemeint.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist offenbar richtig.

Nehmen wir also an, es bestehe die erste Beziehung (39), dann haben wir $\bar{u} : \bar{v} = (c_{11}u + c_{12}v) : (c_{21}u + c_{22}v)$ und ferner, im Hinblick auf § 2, (1) $\bar{w} : \bar{v}^2 = w\Delta : (c_{21}u + c_{22}v)^2$. Aus diesen Beziehungen folgt (40).

Nehmen wir nun an, es bestehe die zweite Beziehung (39), und die Funktion q sei im Intervall j stets von Null verschieden: $q \neq 0$ für alle $t \in j$. Dann haben wir zunächst $\bar{u}' : \bar{v}' = (c_{11}u' + c_{12}v') : (c_{21}u' + c_{22}v')$ und ferner, im Hinblick auf § 2, (1) und die Voraussetzung $q \neq 0$ $\bar{w} : \bar{v}'^2 = w\Delta : (c_{21}u' + c_{22}v')^2$. Aus diesen Beziehungen erhalten wir wieder die Formeln (40).

Folgerungen.

1. Die ersten (zweiten) Phasensysteme zweier proportionalen Basen der Differentialgleichung (q) fallen zusammen. Haben umgekehrt zwei Basen von (q) eine erste oder eine zweite Phase gemeinsam, wobei q im Intervall j stets von Null verschieden ist, so sind sie proportional.

2. Ist α (β) eine erste (zweite) Phase der Basis (u, v) , so ist $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\frac{\pi}{2} - \beta$) eine solche der zu (u, v) inversen Basis (v, u) .

Wie man sieht, besteht das erste (zweite) Phasensystem der zu (u, v) inversen Basis (v, u) aus den mit -1 multiplizierten und um $\frac{\pi}{2}$ vergrößerten Phasen des entsprechenden Phasensystems der Basis (u, v) .

3. Ist α (β) eine erste (zweite) Phase der Basis (u, v) und λ eine beliebige Zahl, so ist $\alpha + \lambda$ ($\beta + \lambda$) eine erste (zweite) Phase der vermöge der orthogonalen Substitution

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (41)$$

transformierten Basis (u, v) , also der Basis

$$\bar{u} = u \cdot \cos \lambda + v \cdot \sin \lambda,$$

$$\bar{v} = -u \cdot \sin \lambda + v \cdot \cos \lambda.$$

Das vermöge einer ersten (zweiten) Phase α (β) der Differentialgleichung (q) im Sinne der Formel $\bar{\alpha} = \alpha + \lambda$ ($\bar{\beta} = \beta + \lambda$) mit beliebigen Zahlen λ gebildete System von ersten (zweiten) Phasen $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) von (q) nennen wir das *vollständige Phasensystem* der Phase α (β). Bezeichnung: $[\alpha]$ ($[\beta]$).

Offenbar gibt es zu jeder Zahl $t_0 \in j$ in dem System $[\alpha]$ ($[\beta]$) genau eine erste (zweite) Phase der Differentialgleichung (q), die an der Stelle t_0 verschwindet.

4. Zwei erste bzw. zweite Phasen $\alpha, \bar{\alpha}$ bzw. $\beta, \bar{\beta}$ der Differentialgleichung (q) hängen im Sinne der Formeln (39) zusammen. Ist umgekehrt α (β) eine erste (zweite) Phase von (q) und gilt für eine im Intervall j erklärte Funktion $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) eine Formel wie (39), so ist $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) ebenfalls eine erste (zweite) Phase von (q).

18. Berechnung der Integrale $\int_{x_0}^{x_1} g(\sigma) d\sigma, \int_{x_0}^{x_1} h(\sigma) d\sigma$ in der Nähe von singulären Stellen.

Als Anwendung der Phasenbegriffe und ihrer Eigenschaften, soweit wir sie nun kennen, wollen wir die in § 2, Nr. 4 betrachteten Integrale berechnen.

Wir versetzen uns in die dortige Situation und wenden die a. a. O. eingeführten Bezeichnungen an. Insbesondere stellt also y ein Integral der Differentialgleichung (q) mit einer Nullstelle c , ferner j_{-1} bzw. j_0 eine links- bzw. rechtsseitige Umgebung von c , in der das Integral y nicht verschwindet, und $g(\sigma)$ für $\sigma \in j_{-1}$ bzw. $\sigma \in j_0$ die Funktion

$$g(\sigma) = \frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c)} \cdot \frac{1}{(\sigma - c)^2}$$

dar.

Wir wissen, daß für $x_0 \in j_{-1}, x_1 \in j_0$ das Integral $\int_{x_0}^{x_1} g(\sigma) d\sigma$ existiert. Nun wollen wir seinen Wert bestimmen.

Es sei $t \in (x_0, c)$ eine beliebige Zahl. Dann haben wir

$$\int_{x_0}^t g(\sigma) d\sigma = \int_{x_0}^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} + \frac{1}{y'^2(c)} \left[\frac{1}{t - c} - \frac{1}{x_0 - c} \right].$$

Es sei α die an der Stelle c verschwindende erste Phase der durch die Anfangswerte $u(c) = 0, u'(c) = 1; v(c) = 1, v'(c) = 0$ bestimmten Basis (u, v) der Dif-

ferentialgleichung (q). Dann ist

$$\alpha(c) = 0, \quad \alpha'(c) = 1, \quad \alpha''(c) = 0,$$

und die erste Formel (27) ergibt

$$y(\sigma) = y'(c) \frac{\sin \alpha(\sigma)}{\sqrt{\alpha'(\sigma)}}.$$

Folglich haben wir

$$y'^2(c) \int_{x_0}^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = \int_{x_0}^t \frac{\alpha'(\sigma) d\sigma}{\sin^2 \alpha(\sigma)} = \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(t)} \frac{d\sigma}{\sin^2 \sigma} = -\cot \alpha(t) + \cot \alpha(x_0).$$

Es gilt also

$$y'^2(c) \int_{x_0}^t g(\sigma) d\sigma = -\cot \alpha(t) + \frac{1}{t-c} + \cot \alpha(x_0) - \frac{1}{x_0-c}.$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow c-} \left[-\cot \alpha(t) + \frac{1}{t-c} \right] = 0$$

ist

$$y'^2(c) \int_{x_0}^c g(\sigma) d\sigma = \cot \alpha(x_0) - \frac{1}{x_0-c}. \quad (42)$$

Ähnlich erhalten wir für eine beliebige Zahl $x_1 \in j_0$

$$y'^2(c) \int_c^{x_1} g(\sigma) d\sigma = -\cot \alpha(x_1) + \frac{1}{x_1-c}. \quad (43)$$

Wie wir sehen, gilt für beliebige Zahlen $x_0 \in j_{-1}$, $x_1 \in j_0$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c)} \frac{1}{(\sigma-c)^2} \right] d\sigma \\ = \frac{1}{y'^2(c)} \left[-\cot \alpha(x_1) + \cot \alpha(x_0) + \frac{1}{c-x_0} + \frac{1}{x_1-c} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Sind die Zahlen x_0, x_1 miteinander 1-konjugiert, so unterscheiden sich die Werte $\alpha(x_0), \alpha(x_1)$ um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π (Nr. 4). In diesem Fall haben wir

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c)} \frac{1}{(\sigma-c)^2} \right] d\sigma = \frac{1}{y'^2(c)} \left[\frac{1}{c-x_0} + \frac{1}{x_1-c} \right]. \quad (45)$$

Wendet man diese Resultate zur Berechnung des in § 2, Nr. 4 betrachteten Integrals $\int_{x_0}^{x_m} g_m(\sigma) d\sigma$ an, so erhält man zunächst die Formel

$$\int_{x_0}^{x_m} g_m(\sigma) d\sigma = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{y'^2(c_\nu)} [-\cot \alpha_\nu(x_\nu) + \cot \alpha_\nu(x_{\nu-1})] + \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{y'^2(c_\nu)} \left[\frac{1}{c_\nu - x_0} + \frac{1}{x_m - c_\nu} \right]; \quad (46)$$

α_ν ist natürlich die an der Stelle c_ν verschwindende erste Phase der durch die Anfangswerte $u(c_\nu) = 0$, $u'(c_\nu) = 1$; $v(c_\nu) = 1$, $v'(c_\nu) = 0$ bestimmten Basis der Differentialgleichung (q); $\nu = 1, \dots, m$.

Sind insbesondere die Zahlen x_0, x_m miteinander 1-konjugiert, so haben wir

$$\int_{x_0}^{x_m} g_m(\sigma) d\sigma = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{y'^2(c_\nu)} \left[\frac{1}{c_\nu - x_0} + \frac{1}{x_m - c_\nu} \right]. \quad (47)$$

Analog kann man die Werte der in § 2, Nr. 5 betrachteten Integrale $\int_{x_0}^{x_1} h(\sigma) d\sigma$, $\int_{x_0}^{x_m} h_m(\sigma) d\sigma$ mittels geeigneter zweiter Phasen β, β_ν der Differentialgleichung (q) folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \frac{1}{q(e)y^2(e)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e)^2} \right] d\sigma = \frac{1}{q(e)y^2(e)} \left[-\cot \beta(x_1) + \cot \beta(x_0) + \frac{1}{e - x_0} + \frac{1}{x_1 - e} \right]; \quad (48)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} h_m(\sigma) d\sigma = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{q(e_\nu)y^2(e_\nu)} [-\cot \beta_\nu(x_\nu) + \cot \beta_\nu(x_{\nu-1})] + \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{q(e_\nu)y^2(e_\nu)} \left[\frac{1}{e_\nu - x_0} + \frac{1}{x_m - e_\nu} \right]. \quad (49)$$

Sind die Zahlen x_0, x_1 bzw. x_0, x_m miteinander 2-konjugiert, so bestehen die einfacheren Formeln (Nr. 9)

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \frac{1}{q(e)y^2(e)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e)^2} \right] d\sigma = \frac{1}{q(e)y^2(e)} \left[\frac{1}{e - x_0} + \frac{1}{x_1 - e} \right], \quad (50)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} h_m(\sigma) d\sigma = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{q(e_\nu)y^2(e_\nu)} \left[\frac{1}{e_\nu - x_0} + \frac{1}{x_m - e_\nu} \right]. \quad (51)$$

§ 6. Polarfunktionen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den sogenannten Polarfunktionen der Differentialgleichung (q) befassen. Die Polarfunktionen sind als Differenzen $\beta - \alpha$ von zwei zu einer Basis der Differentialgleichung (q) gehörigen Phasen α, β erklärt. Sie kommen wegen ihrer Deutung hauptsächlich bei Untersuchungen geometrischer Natur vor. Die Einführung der Polarfunktionen in die Theorie der Differentialgleichungen (q) bedeutet eine wesentliche Bereicherung des analytischen Apparats und findet ihren Ausdruck in zahlreichen Beziehungen von eleganter Form.

Zwecks Vereinfachung unserer Betrachtungen setzen wir in diesem Paragraphen stets $q(t) \neq 0$ für alle $t \in j$ voraus.

1. Begriff von Polarfunktionen. Wir betrachten eine Differentialgleichung (q) ($q \neq 0$).

Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q).

Unter einer *Polarfunktion* der Basis (u, v) verstehen wir die vermöge einer ersten und zweiten Phase α bzw. β der Basis (u, v) gebildete Funktion

$$\vartheta = \beta - \alpha \quad (t \in j). \quad (1)$$

Wir nennen die Phasen α, β die *Komponenten*, und zwar α die erste und β die zweite Komponente von ϑ .

Es gibt also genau ein abzählbares System (ϑ) von Polarfunktionen der Basis (u, v) , dessen Elemente sich voneinander um ganzzahlige Vielfache von π unterscheiden. Sind α_0, β_0 zwei benachbarte Elemente in dem geordneten gemischten Phasensystem von (u, v) (§ 5, (30)), also $0 < \beta_0 - \alpha_0 < \pi$ oder $-\pi < \beta_0 - \alpha_0 < 0$, und $\vartheta_0 = \beta_0 - \alpha_0$, so besteht das System (ϑ) aus den Funktionen

$$\vartheta_\nu(t) = \vartheta_0(t) + \nu\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Jede Polarfunktion $\vartheta \in (\vartheta)$ hat offenbar abzählbar viele erste und zweite Komponenten: $\alpha = \alpha_0 + n\pi, \beta = \beta_0 + n\pi$ (n ganz). Wir sehen: Jede erste (zweite) Phase α (β) der Basis (u, v) kann zur ersten (zweiten) Komponenten von ϑ gewählt werden, wonach die zweite (erste) Komponente eindeutig bestimmt ist.

Für jede erste Komponente α von ϑ besteht nach § 5, (34) die Beziehung

$$\vartheta = \operatorname{Arccot} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)'; \quad (2)$$

Arccot bedeutet einen geeigneten Zweig dieser Funktion.

Im Hinblick auf diese Beziehung nennen wir die erste Komponente α *Erzeugende* von ϑ und sagen, die Polarfunktion ϑ sei von der ersten Phase α erzeugt.

Umgekehrt stellt jeder mit einer beliebigen ersten Phase α der Basis (u, v) gebildete Zweig der obigen Funktion eine Polarfunktion $\vartheta \in (\vartheta)$ dar.

Jede Polarfunktion $\vartheta \in (\vartheta)$ gehört offenbar der Klasse C_1 an, also $\vartheta \in C_1$, und nach § 5, (29) sind die Beziehungen $n\pi < \vartheta < (n+1)\pi$ für $t \in j, n$ ganz, erfüllt.

Wir wollen nun die geometrische Deutung der Polarfunktionen der Basis (u, v) angeben.

Zu diesem Zweck nehmen wir etwa $-w > 0$ an. Dann wachsen alle ersten Phasen von (u, v) , während die zweiten wachsen oder abnehmen, je nachdem, ob $-q > 0$ oder < 0 ist (§ 5, Nr. 3, 8).

Es sei ϑ z. B. die aus zwei benachbarten, d. h. den Beziehungen $0 < \beta - \alpha < \pi$ genügenden eigentlichen Phasen α, β gebildete Polarfunktion: $\vartheta = \beta - \alpha$.

Wir betrachten die Integralkurve \mathfrak{K} der Differentialgleichung (q) mit der vektoriellen Darstellung $x(t) = [u(t), v(t)]$. Dann ist $x'(t) = [u'(t), v'(t)]$ der Tangentenvektor der Kurve \mathfrak{K} im Punkt $P[u(t), v(t)]$.

Es seien $W\alpha(t), W\beta(t), W\vartheta(t)$ die mod 2π in das Intervall $[0, 2\pi)$ reduzierten Werte $\alpha(t), \beta(t), \vartheta(t)$. Wir wissen, daß $W\alpha(t)$ der von dem Vektor $x(t)$ und dem Koordi-

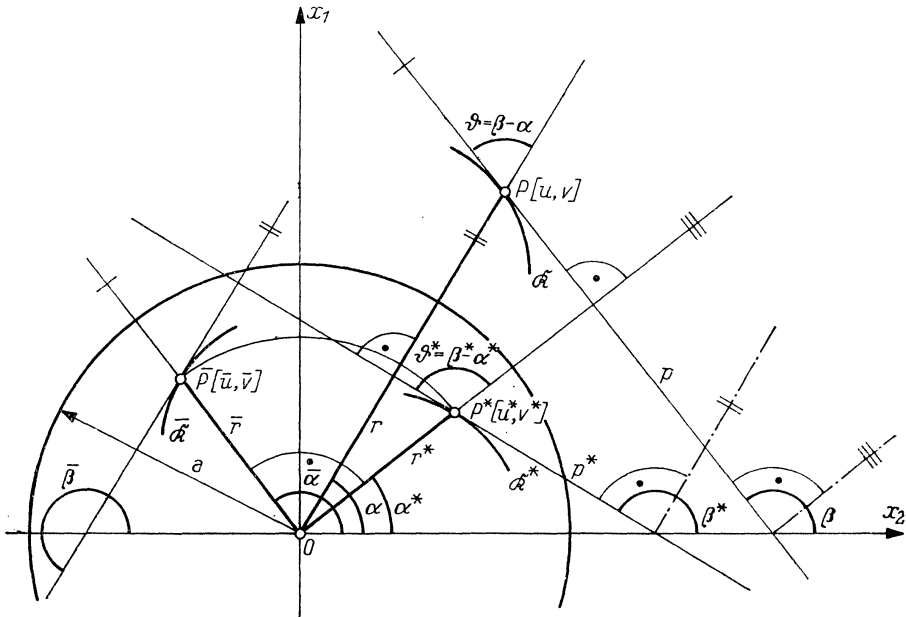


Abb. 1

natenvektor x_2 gebildete Winkel ist; $W\beta(t)$ ist der von dem Tangentenvektor $x'(t)$ und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel (§ 5, Nr. 3, 8).

Ferner haben wir $W\vartheta(t) = W\beta(t) - W\alpha(t)$ oder $= 2\pi + [W\beta(t) - W\alpha(t)]$, je nachdem, ob $W\beta(t) > W\alpha(t)$ oder $W\beta(t) < W\alpha(t)$ ist. Folglich ist $W\vartheta(t)$ der von den Vektoren $x(t), x'(t)$ gebildete Winkel.

Wir sehen, daß der Wert $\vartheta(t)$ der im Punkt $P(t)$ von der orientierten Geraden $OP(t)$ und der orientierten Kurventangente p im Punkte $P(t)$ gebildete Winkel mod 2π ist. Die Orientierung ist gleichsinnig mit derjenigen der Vektoren $x(t), x'(t)$ (vgl. Abb. 1; die Winkel $W\alpha(t), W\beta(t), W\vartheta(t)$ sind einfach mit α, β, ϑ bezeichnet).

Wir wollen noch einen Augenblick bei dieser Abb. verweilen. Sie zeigt, daß bei der Polarkorrelation K_a bezüglich eines Kreises vom Radius a um O die Integralkurve \mathfrak{K} in eine Kurve \mathfrak{K}^* übergeht. Das Paar P, p wird in $P^*[u^*, v^*], p^*$ übergeführt, wobei den Zahlen $r; \alpha, \beta, \vartheta$ Zahlen $r^*; \alpha^*, \beta^*, \vartheta^*$ entsprechen, und

zwar gilt

$$r^* = \frac{a^2}{r \cdot \sin \vartheta}; \quad \alpha^* = \beta - \frac{\pi}{2}, \quad \beta^* = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta^* = \pi - \vartheta.$$

Insbesondere wird also der Winkel ϑ in den Supplementwinkel $\pi - \vartheta$ transformiert. Wegen dieses ausgezeichneten Verhaltens haben wir die Funktion ϑ Polarfunktion genannt.

Ferner bestehen die Beziehungen (§ 5, (28))

$$u^* = r^* \sin \alpha^* = -r^* \cos \beta = -\frac{r^*}{s} v' = -\frac{a^2}{r \cdot s \cdot \sin \vartheta} v' = -\frac{a^2}{-w} v',$$

$$v^* = r^* \cos \alpha^* = r^* \sin \beta = \frac{r^*}{s} u' = \frac{a^2}{r \cdot s \cdot \sin \vartheta} u' = \frac{a^2}{-w} u',$$

und aus ihnen folgt

$$r^* = \frac{a^2}{-w} s.$$

Führt man nun eine Vierteldrehung im positiven Sinne um O aus, so wird die Kurve \mathfrak{K}^* in eine Kurve $\bar{\mathfrak{K}}$ transformiert. Dabei geht der Punkt $P^* \in \mathfrak{K}^*$ in einen Punkt $\bar{P}[\bar{u}, \bar{v}] \in \bar{\mathfrak{K}}$ über, wobei

$$\bar{u} = r^* \sin \left(\alpha^* + \frac{\pi}{2} \right) = v^* = \frac{a^2}{-w} u',$$

$$\bar{v} = r^* \cos \left(\alpha^* + \frac{\pi}{2} \right) = -u^* = \frac{a^2}{-w} v'$$

ist.

Die Kurve $\bar{\mathfrak{K}}$ läßt also die vektorielle Darstellung

$$\bar{x}(t) = \left[\frac{a^2}{-w} u'(t), \frac{a^2}{-w} v'(t) \right] \quad (3)$$

zu.

Der Tangentenvektor der Kurve $\bar{\mathfrak{K}}$ im Punkt $\bar{P}(t)$ ist offenbar

$$\bar{x}'(t) = \left[\frac{a^2}{-w} q(t) u(t), \frac{a^2}{-w} q(t) v(t) \right]. \quad (4)$$

Derselbe ist also entgegengesetzt oder gleichsinnig mit $x(t)$, je nachdem, ob $-q > 0$ oder $-q < 0$ ist. Der von dem Tangentenvektor \bar{x}' im Punkt \bar{P} und dem Koordinatenvektor x_2 gebildete Winkel ist $\bar{\beta} = \alpha \pm \pi$, wobei das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem, ob $0 \leq \alpha < \pi$ oder $\pi \leq \alpha < 2\pi$ ist.

Wir haben also

$$\bar{r} = \frac{a^2}{-w} s, \quad \bar{\alpha} = \beta, \quad \bar{\beta} = \alpha \pm \pi. \quad (5)$$

Es sei R die Transformation, bestehend aus der Polarkorrelation $K_{\sqrt{-w}}$ ($\alpha = \sqrt{-w}$), gefolgt von der Vierteldrehung um O im positiven Sinne.

Wir sehen, daß bei der Transformation R die Integralkurve \mathfrak{K} in eine Kurve $\bar{\mathfrak{K}}$ übergeführt wird. Dabei geht ein beliebiger Punkt $P \in \mathfrak{K}$ in einen Punkt $\bar{P} \in \bar{\mathfrak{K}}$ über, und zwar so, daß die Radiusvektoren $x = \overrightarrow{OP}$, $\bar{x} = \overrightarrow{O\bar{P}}$ und die entsprechenden Tangentenvektoren x' , \bar{x}' in folgender Weise zusammenhängen:

$$\bar{x} = x', \quad \bar{x}' = q \cdot x, \quad (6)$$

während die zugehörigen Amplituden \bar{r} , s und Winkel α , β ; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ wie folgt transformiert werden:

$$\bar{r} = s, \quad \bar{\alpha} = \beta, \quad \bar{\beta} = \alpha \pm \pi. \quad (7)$$

Wenn die Kurve \mathfrak{K} in der Weise speziell ist, daß sie bei der Transformation R in sich übergeht ($\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$), so besitzt sie offenbar die folgende „Ellipseneigenschaft“: Die durch je zwei entsprechende Punkte $P, \bar{P} \in \mathfrak{K}$ und den Punkt O gehenden Geraden einerseits und die Tangenten der Kurve \mathfrak{K} in den Punkten P, \bar{P} andererseits sind wechselweise parallel.

Die Kurven mit dieser Eigenschaft heißen *Radonsche Kurven*. Sie wurden zum erstenmal von J. RADON untersucht [Ber. Verh. Sächs. Akad., Leipzig 68 (1916), 123–128]. Wir werden sie später (§ 16, Nr. 5) in völlig anderen Zusammenhängen wiederfinden.

2. Allgemeine Polarform des Trägers q . Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q) und ϑ eine Polarfunktion von (u, v) .

Die mit der Polarfunktion ϑ gebildete Funktion $\cot \vartheta$ ist offenbar für alle Polarfunktionen der Basis (u, v) dieselbe. Sie ist also durch die Basis (u, v) eindeutig bestimmt. Nach (2) und § 5, (14) bestehen die Formeln

$$-w \cdot \cot \vartheta = rr', \quad 2 \cot \vartheta = \left(\frac{1}{\alpha'} \right)', \quad \alpha' \cdot \cot \vartheta = (\log r)'; \quad (8)$$

r , α stellen natürlich die erste Amplitude bzw. eine erste Phase der Basis (u, v) dar.

Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Die Werte der in Frage kommenden Funktionen an der Stelle t_0 werden wir in der Regel mit dem Index $_0$ bezeichnen; z. B. $r(t_0) = r_0$.

Aus (8) folgt für $t \in j$

$$r^2 = r_0^2 - 2w \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau$$

und ferner, im Hinblick auf § 5, (14)

$$r^2 = r_0^2 \left(1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau \right). \quad (9)$$

Diese Formel ergibt

$$1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau > 0.$$

Wie wir sehen, gilt im Intervall j die Ungleichung

$$\int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau \geq -\frac{1}{2\alpha'_0}, \quad (10)$$

je nachdem, ob $\alpha'_0 > 0$ oder $\alpha'_0 < 0$ ist.

Folglich ist die Funktion $\int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau$ im Intervall j stets wenigstens einseitig durch die Zahl $-1 : 2\alpha'_0$ begrenzt, und zwar von unten oder von oben, je nachdem, ob $\alpha'_0 > 0$ oder $\alpha'_0 < 0$ ist.

Aus (8) haben wir für $t \in j$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha'_0 \int_{t_0}^t \frac{d\sigma}{1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau} \quad (11)$$

und ferner, nach § 5, (16),

$$q = -\frac{\alpha'_0}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\alpha'_0 + \vartheta' \left(1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau\right)}{\left(1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau\right)^2}. \quad (12)$$

Den rechts in dieser Formel stehenden Ausdruck bezeichnen wir als die *allgemeine Polarform* des Trägers q . Man spricht von der allgemeinen Polarform der Differentialgleichung (q), wenn der Träger q in der allgemeinen Polarform (12) vorliegt.

Also gilt im Intervall j die Ungleichung

$$\vartheta' \geq -\frac{\alpha'_0}{1 + 2\alpha'_0 \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau}, \quad (13)$$

je nachdem, ob $-q\alpha'_0 > 0$ oder $-q\alpha'_0 < 0$ ist.

3. Unter einer *Polarfunktion* des Trägers q oder der Differentialgleichung (q) verstehen wir eine Polarfunktion irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Wie wir sehen, hat jede Polarfunktion ϑ der Differentialgleichung (q) im Intervall j folgende Eigenschaften:

- | | | |
|---|---|------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vartheta \in C_1$; 2. $n\pi < \vartheta < (n+1)\pi$ (n ganz); 3. die Funktion $\int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau$ ($t_0 \in j$ fest) ist im Intervall j wenigstens einseitig begrenzt. | } | (14) |
|---|---|------|

Die Funktion $\vartheta(t) = c$ ($= \text{const}$) im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ z. B. stellt für $n\pi < c < (n+1)\pi$, $c \neq (n + \frac{1}{2})\pi$ (n ganz) keine Polarfunktion der Differentialgleichung (q) dar.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit durch eine Polarfunktion die Differentialgleichung (q) bestimmt ist.

Es sei ϑ eine in einem (offenen) Intervall j definierte Funktion mit den obigen Eigenschaften 1.–3.

Wir wählen eine Zahl $t_0 \in j$. Wegen 2. existiert im Intervall j die Funktion $\int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau$, und nach 3. ist sie wenigstens einseitig, also etwa von unten begrenzt. Folglich haben wir für eine geeignete Konstante $A > 0$

$$1 + 2A \int_{t_0}^t \cot \vartheta(\tau) d\tau > 0 \quad (t \in j). \quad (15)$$

Wir wählen nun eine beliebige Zahl α_0 und ferner eine Zahl α'_0 zwischen 0, A : $0 < \alpha'_0 < A$. Dann besteht eine Formel wie (10) mit dem Zeichen $>$.

Wir zeigen nun:

Es gibt genau eine im Intervall j definierte Funktion q so beschaffen, daß die Differentialgleichung (q) die Funktion ϑ als Polarfunktion mit den Anfangswerten $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\alpha'(t_0) = \alpha'_0$ ihrer Erzeugenden α zuläßt.

Beweis. Zunächst sehen wir, daß es höchstens eine Funktion q mit den erwähnten Eigenschaften geben kann. In der Tat, bei jeder Funktion q dieser Art ist die Erzeugende α von ϑ vermöge ϑ , α_0 , α'_0 im Sinne der Formel (11) eindeutig bestimmt. Nach § 5, (16) gibt es genau einen Träger q , der die Funktion α als erste Phase zuläßt.

Wir wollen nun zeigen, daß es wenigstens eine Funktion q mit den obigen Eigenschaften gibt. Zu diesem Zweck bilden wir die Funktion $\alpha(t)$ ($t \in j$) im Sinne der Formel (11). Wegen 1. ist $\alpha \in C_3$, und nach (15) haben wir $\alpha'(t) > 0$. Folglich stellt α eine Phasenfunktion dar (§ 5, Nr. 7), und man rechnet unter Anwendung von § 5, (16) nach, daß α eine erste Phase des durch eine Formel wie (12) bestimmten Trägers q ist. Ferner ergibt die Formel (11) durch Differentiation eine Beziehung wie (2).

Nach § 5, Nr. 15 stellt die Funktion

$$\beta = \alpha + \text{Arccot} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)', \quad (16)$$

wobei Arccot den zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegenden Zweig dieser Funktion bedeutet, eine zweite Phase jeder durch α bestimmten Basis des Trägers q dar. Aus (2), (16) finden wir $\beta = \alpha + \vartheta$. Folglich ist ϑ eine Polarfunktion des Trägers q , und der Beweis ist beendet.

4. Radonsche Funktionen. Wir kehren nun zu der Situation in Nr. 1 zurück und setzen zusätzlich $q(t) < 0$ für alle $t \in j$ voraus. Dann haben (§ 5, Nr. 14) die Funktionen α' , β' im Intervall j stets dasselbe Vorzeichen, und zwar ist $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ oder $\alpha' < 0$, $\beta' < 0$, je nachdem, ob $-w > 0$ oder $-w < 0$ ist.

Unter einer *Radonschen Funktion* der Basis (u, v) verstehen wir die vermöge einer ersten und zweiten Phase α bzw. β der Basis (u, v) gebildete Funktion

$$\zeta = \beta + \alpha \quad (t \in j). \quad (17)$$

Eine Radonsche Funktion ζ der Basis (u, v) nennen wir auch *Radonscher Parameter* der Basis (u, v) . Wir erlauben uns, diese Benennung einzuführen im Hinblick auf die schönen Untersuchungen von J. RADON über die oben (Nr. 1) erwähnten Kurven mit der Ellipseeigenschaft, in denen Funktionen dieser Art auftreten.

Es gibt offenbar genau ein abzählbares System von Radonschen Funktionen der Basis (u, v) , und die einzelnen Funktionen dieses Systems unterscheiden sich voneinander um ganzzahlige Vielfache von π .

Es gilt offenbar $\zeta \in C_1$ und ferner $\zeta' > 0$ oder $\zeta' < 0$, je nachdem, ob $-w > 0$ oder $-w < 0$ ist ($t \in j$).

Zwei vermöge derselben Phasen α, β der Basis (u, v) gebildete Funktionen

$$\vartheta = \beta - \alpha, \quad \zeta = \beta + \alpha \quad (18)$$

nennen wir *assoziiert*. Die Formeln (18) ergeben

$$\alpha = \frac{1}{2}(\zeta - \vartheta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\zeta + \vartheta). \quad (19)$$

Wie wir sehen, ist $\zeta - \vartheta \in C_3$. Aus $\alpha' \beta' > 0$, $\operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} (-w)$ haben wir

$$-\zeta' < \vartheta' < \zeta' \quad \text{oder} \quad \zeta' < \vartheta' < -\zeta', \quad (20)$$

je nachdem, ob $-w > 0$ oder $-w < 0$ ist.

Nun gehen wir von den Beziehungen

$$\beta' \cot \vartheta = (\alpha' + \vartheta') \cot \vartheta = \alpha' \cot \vartheta + (\log |\sin \vartheta|)'$$

aus. Im Hinblick auf (8) erhalten wir

$$\zeta' \cot \vartheta = (\log r^2 |\sin \vartheta|)'$$

Daraus folgt für $t \in j$

$$r^2 = r_0^2 \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} \exp \int_{t_0}^t \zeta'(\tau) \cot \vartheta(\tau) d\tau \quad (21)$$

und ferner, nach § 5, (28),

$$s^2 = \alpha_0'^2 r_0^2 \frac{1}{\sin \vartheta_0 \cdot \sin \vartheta} \exp \left(- \int_{t_0}^t \zeta'(\tau) \cot \vartheta(\tau) d\tau \right). \quad (22)$$

Schließlich ergibt die Formel § 5, (32)

$$q = -\frac{\alpha_0^2}{\sin^2 \vartheta_0} \cdot \frac{\zeta' + \vartheta'}{\zeta' - \vartheta'} \exp\left(-2 \int_{t_0}^t \zeta'(\tau) \cot \vartheta(\tau) d\tau\right). \quad (23)$$

Den rechts in (23) stehenden Ausdruck nennen wir die *Radonsche Polarform* des Trägers q . Wir sprechen von der Radonschen Polarform der *Differentialgleichung* (q), wenn der Träger q in der Radonschen Polarform vorliegt.

5. Normierte Polarfunktionen. In den folgenden Betrachtungen werden wir die Werte der Polarfunktionen auf ihre Komponenten oder den Radonschen Parameter als unabhängig Veränderliche beziehen. Die auf diese Weise transformierten Polarfunktionen nennen wir normierte Polarfunktionen.

Wir setzen $q(t) \neq 0$ für alle $t \in j$ voraus.

Es sei $\vartheta = \beta - \alpha$ eine Polarfunktion der Basis (u, v) der Differentialgleichung (q). Wir wählen eine beliebige Zahl $t_0 \in j$ und bezeichnen wie vorher mit dem Index $_0$ die Werte der in Frage kommenden Funktionen an der Stelle t_0 . Die Funktion ϑ hat natürlich die obigen Eigenschaften (14).

6. Normierte Polarfunktionen 1. Art. Zunächst wollen wir die Polarfunktion als Funktion der unabhängigen Veränderlichen α ausdrücken.

Da die Funktion $\alpha(t)$ im Intervall j ständig wächst ($\alpha' > 0$) oder abnimmt ($\alpha' < 0$), läßt sie die inverse Funktion α^{-1} zu. Dieselbe ist in dem Wertevorrat J_1 der Funktion α im Intervall j definiert. J_1 ist also ein offenes Intervall, und es gilt $\alpha_0 \in J_1$.

Wir bemerken noch: Ist die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus, so ist das Intervall J_1 beschränkt. Ist die Differentialgleichung (q) linksseitig (rechtsseitig) oszillatorisch und $\alpha' > 0$ ($\alpha' < 0$), so ist das Intervall J_1 von der Art $(-\infty, A)$, A endlich; ist die Differentialgleichung (q) linksseitig (rechtsseitig) oszillatorisch und $\alpha' < 0$ ($\alpha' > 0$), so ist das Intervall J_1 von der Art (A, ∞) , A endlich. Ist schließlich die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so ist das Intervall J_1 von beiden Seiten unbeschränkt.

Die Funktion α^{-1} gehört offenbar der Klasse C_3 an: $\alpha^{-1} \in C_3$. Ferner bildet sie das Intervall J_1 auf j schlicht ab; insbesondere haben wir $\alpha^{-1}(\alpha_0) = t_0$. Aus der Definition von α^{-1} folgt: Für $\alpha \in J_1$ ist $\alpha^{-1}(\alpha) = t \in j$ diejenige Zahl, für die $\alpha(t) = \alpha$ gilt. Wir bezeichnen wiederum zwei solche Zahlen $t = \alpha^{-1}(\alpha) \in j$ und $\alpha = \alpha(t) \in J_1$ als *homolog*.

Nun definieren wir im Intervall J_1 die Funktion $h(\alpha)$, kürzer: $h\alpha$, indem wir ihr an jeder Stelle $\alpha \in J_1$ den Wert der Funktion ϑ an der homologen Stelle $t \in j$ zuordnen:

$$h(\alpha) = \vartheta \alpha^{-1}(\alpha) = \vartheta(t). \quad (24)$$

$h\alpha$ ist also die auf die unabhängige Veränderliche α bezogene Polarfunktion ϑ . Wir nennen h *normierte Polarfunktion 1. Art* der Basis (u, v) , kürzer: *1-normierte Polarfunktion* der Basis (u, v) .

Offenbar hat die Funktion h im Intervall J_1 folgende Eigenschaften:

1. $h \in C_1$;
2. $n\pi < h < (n+1)\pi$, n ganz.

Wir betonen: Ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so ist das Definitionsintervall J_1 der 1-normierten Polarfunktion h das Intervall $(-\infty, \infty)$.

Aus (8) und § 5, (14) haben wir im Intervall j die Formeln

$$r(t) = r_0 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho, \quad (25)$$

$$\alpha'(t) = \alpha'_0 \exp \left(-2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho \right). \quad (26)$$

Bei einer Funktion von α ($\in J_1$) wollen wir ihre Ableitungen nach α mit dem Strich \wedge kennzeichnen.

Aus (26) folgt

$$t^\wedge(\alpha) = \frac{1}{\alpha'_0} \exp 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho, \quad (27)$$

und diese Beziehung ergibt

$$t = t_0 + \frac{1}{\alpha'_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot h(\varrho) d\varrho \right) d\sigma. \quad (28)$$

Offenbar drückt diese Formel die zu der ersten Phase $\alpha(t)$ inverse Funktion $t = \alpha^{-1}(\alpha)$ aus.

Aus § 5, (16) und (26) erhalten wir die für je zwei homologe Stellen $t \in j$, $\alpha \in J_1$ gültige Formel

$$q(t) = -\alpha_0'^2 \frac{1 + h^\wedge(\alpha)}{\sin^2 h(\alpha)} \exp \left(-4 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho \right). \quad (29)$$

Den rechts in dieser Formel stehenden Ausdruck bezeichnen wir als die *erste Polarform* des Trägers q . Man spricht von der ersten Polarform der *Differentialgleichung* (q), wenn der Träger q in der ersten Polarform vorliegt.

Offenbar gilt im Intervall J_1 die Ungleichung

$$h^\wedge(\alpha) \geq -1,$$

je nachdem, ob $-q > 0$ oder $-q < 0$ ist.

Wir bemerken, daß die Formel (25) die Gleichung der Integralkurve $x(t) = [u(t), v(t)]$ in Polarkoordinaten darstellt.

7. Unter einer normierten Polarfunktion 1. Art des Trägers q bzw. der *Differentialgleichung* (q), kürzer: 1-normierten Polarfunktion des Trägers q bzw. der Differentialgleichung (q), verstehen wir eine 1-normierte Polarfunktion irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Jede 1-normierte Polarfunktion h der Differentialgleichung (q) hat in ihrem Definitionsintervall J_1 folgende Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} 1. h \in C_1; \\ 2. n\pi < h < (n+1)\pi \quad (n \text{ ganz}); \\ 3. h^\wedge > -1 \text{ oder } h^\wedge < -1. \end{array} \right\} \quad (30)$$

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit durch eine 1-normierte Polarfunktion die Differentialgleichung (q) bestimmt ist.

Es sei h eine in einem (offenen) Intervall J_1 definierte Funktion mit den obigen Eigenschaften (30).

Wir wählen eine Zahl t_0 und weitere Zahlen $\alpha_0 \in J_1$, $\alpha'_0 \neq 0$.

Nun gilt der folgende

Satz. Es gibt genau eine in einem (offenen) Intervall j definierte und stets von Null verschiedene Funktion q so beschaffen, daß die Differentialgleichung (q) die Funktion h als 1-normierte Polarfunktion zuläßt, und zwar ist diese Polarfunktion von einer ersten Phase α der Differentialgleichung (q) mit den Anfangswerten $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\alpha'(t_0) = \alpha'_0$ erzeugt.

Wir wollen den Beweis, der im wesentlichen dem von Nr. 3 ähnlich ist, nur kurz skizzieren.

Wenn es eine dem Satz entsprechende Differentialgleichung (q) und erste Phase $\alpha(t)$ gibt, so ist diese letztere eindeutig bestimmt, und zwar als die inverse Funktion zu der im Sinne der Formel (28) definierten Funktion $t(\alpha)$. Wir sehen, daß es höchstens eine dem Satz entsprechende Differentialgleichung (q) geben kann.

Nun definieren wir vermöge der Funktion h und der Zahlen α_0 , α'_0 die Funktion $t(\alpha)$ im Sinne der Formel (28). Diese Funktion bildet das Intervall J_1 auf ein offenes Intervall j ab. Es sei $\alpha(t)$ die im Intervall j definierte zu $t(\alpha)$ inverse Funktion. Dieselbe ist offenbar eine Phasenfunktion. Es sei $q(t)$ der (im Sinne von § 5, (16) definierte) Träger der Differentialgleichung (q), für die die Funktion $\alpha(t)$ eine erste Phase darstellt. Dann gilt eine zu (29) analoge Formel, aus der wegen (30), 3. $q(t) \neq 0$ für alle $t \in j$ folgt. Ferner sei ϑ die von der ersten Phase α erzeugte und zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegende Polarfunktion der Differentialgleichung (q). Nach (26) haben wir an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $\alpha \in J_1$

$$\begin{aligned} \cot \vartheta(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'} \right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha'_0} \left[\exp \left(2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho \right) \right]' \cdot \alpha'_0 \exp \left(-2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho) d\varrho \right) \\ &= \cot h(\alpha). \end{aligned}$$

Es gilt also $\vartheta(t) = h(\alpha)$, und der Beweis ist beendet.

8. Normierte Polarfunktionen 2. Art. An zweiter Stelle wollen wir die Polarfunktion ϑ als Funktion der unabhängigen Veränderlichen β ausdrücken.

Analog zu den Betrachtungen in Nr. 6 betrachten wir nun die zu der Funktion β inverse Funktion β^{-1} . Dieselbe ist in einem offenen Intervall J_2 erklärt, und es gilt $\beta_0 \in J_2$. Über die Art des Intervalls J_2 gilt eine ähnliche Bemerkung wie die von Nr. 6 über das Intervall J_1 .

Wir definieren nun im Intervall J_2 die Funktion $-k(\beta)$, kürzer: $-k\beta$, so daß wir ihr an jeder Stelle $\beta \in J_2$ den Wert der Funktion ϑ an der homologen Stelle $(\beta^{-1}(\beta) =) t \in j$ zuordnen:

$$-k(\beta) = \vartheta\beta^{-1}(\beta) = \vartheta(t). \quad (31)$$

$-k\beta$ ist also die auf die unabhängige Veränderliche β bezogene Polarfunktion ϑ . Wir nennen $-k$ *normierte Polarfunktion 2. Art* der Basis (u, v) , kürzer: *2-normierte Polarfunktion* der Basis (u, v) .

Offenbar hat die Funktion $-k$ im Intervall J_2 folgende Eigenschaften:

1. $-k \in C_1$;
2. $n\pi < -k < (n+1)\pi$, n ganz.

Wir betonen: Ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so ist das Definitionsintervall J_2 der 2-normierten Polarfunktion $-k$ das Intervall $(-\infty, \infty)$.

Die Ableitung einer Funktion von β ($\in J_2$) in bezug auf β wollen wir ähnlich wie in Nr. 6 mit \backslash bezeichnen.

Nun gilt nach (1), (31) an zwei homologen Stellen $t \in j$, $\beta \in J_2$ die Beziehung

$$\alpha(t) = \beta + k(\beta) \quad (32)$$

und folglich auch

$$\alpha'(t) = [1 + k\backslash(\beta)] \beta'(t). \quad (33)$$

Ferner haben wir offenbar

$$\int_{t_0}^t \alpha'(\tau) \cot \vartheta(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t [1 + k\backslash(\tau)] \cot \vartheta(\tau) \cdot \beta'(\tau) d\tau = - \int_{\beta_0}^{\beta} [1 + k\backslash(\varrho)] \cot k(\varrho) d\varrho$$

und folglich, nach (8), (33),

$$t\backslash(\beta) = \frac{1}{\alpha_0'} [1 + k\backslash(\beta)] \exp \left(-2 \int_{\beta_0}^{\beta} [1 + k\backslash(\varrho)] \cot k(\varrho) d\varrho \right). \quad (34)$$

Diese Beziehung ergibt

$$t = t_0 + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\beta_0}^{\beta} [1 + k\backslash(\sigma)] \exp \left(-2 \int_{\beta_0}^{\sigma} [1 + k\backslash(\varrho)] \cot k(\varrho) d\varrho \right) d\sigma. \quad (35)$$

Offenbar stellt diese Formel die zu der zweiten Phase $\beta(t)$ inverse Funktion $t = \beta^{-1}(\beta)$ dar.

Aus § 5, (31) und (33), (34) erhalten wir die für je zwei homologe Stellen $t \in j$, $\beta \in J_2$ gültige Formel

$$q(t) = - \frac{\alpha_0'^2}{\sin^2 k(\beta)} \cdot \frac{\exp 4 \int_{\beta_0}^{\beta} [1 + k\backslash(\varrho)] \cot k(\varrho) d\varrho}{1 + k\backslash(\beta)}. \quad (36)$$

Den rechts in dieser Formel stehenden Ausdruck bezeichnen wir als die *zweite Polarform* des Trägers q . Man spricht von der zweiten Polarform der *Differentialgleichung* (q), wenn der Träger q in der zweiten Polarform vorliegt.

Im Intervall J_2 gilt also die Ungleichung

$$-k\backslash(\beta) \leq 1,$$

je nachdem, ob $-q > 0$ oder $-q < 0$ ist.

9. Unter einer normierten Polarfunktion 2. Art des Trägers q bzw. der *Differentialgleichung* (q), kürzer: 2-normierten Polarfunktion des Trägers q bzw. der

Differentialgleichung (q), verstehen wir eine normierte Polarfunktion 2. Art irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Jede 2-normierte Polarfunktion $-k$ der Differentialgleichung (q) hat in ihrem Definitionsintervall J_2 folgende Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} 1. -k \in C_1; \\ 2. n\pi < -k < (n+1)\pi \quad (n \text{ ganz}); \\ 3. -k \setminus < 1 \text{ oder } > 1. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Ähnlich wie bei den 1-normierten Polarfunktionen (Nr. 7) kann man sich für die Bestimmung von Differentialgleichungen (q) durch ihre 2-normierten Polarfunktionen interessieren. Tatsächlich gilt in dieser Richtung ein dem in Nr. 7 angeführten Satz analoges Resultat. Wir wollen jedoch die diesbezüglichen Betrachtungen unterlassen, da sie im wesentlichen keine neuen Ideen enthalten und für ihr Ergebnis in den folgenden Untersuchungen keine Anwendung vorgesehen ist.

10. Normierte Polarfunktionen 3. Art. An dritter Stelle kehren wir zu der in Nr. 4 betrachteten Situation zurück und setzen uns zum Ziel, die Polarfunktion $\vartheta = \beta - \alpha$ als Funktion des Radonschen Parameters $\zeta = \beta + \alpha$ auszudrücken. Wir wissen, daß $\zeta \in C_1$ ist und ferner $\zeta' > 0$ oder $\zeta' < 0$, je nachdem, ob $-w > 0$ oder $-w < 0$ gilt.

Wir betrachten die zu ζ inverse Funktion ζ^{-1} . Dieselbe ist in einem offenen Intervall J_3 erklärt, und es gilt: $\zeta_0 \in J_3$. Über die Art des Intervalls J_3 gilt eine der in Nr. 6 über das Intervall J_1 gemachten ähnliche Bemerkung.

Wir definieren im Intervall J_3 die Funktion $p(\zeta)$, kürzer: $p\zeta$, indem wir ihr an jeder Stelle $\zeta \in J_3$ den Wert der Funktion ϑ an der mit ζ homologen Stelle ($\zeta^{-1}(\zeta) = t \in j$) zuordnen:

$$p(\zeta) = \vartheta\zeta^{-1}(\zeta) = \vartheta(t). \quad (38)$$

$p\zeta$ ist also die auf die unabhängige Veränderliche ζ bezogene Polarfunktion ϑ . Wir nennen p *normierte Polarfunktion 3. Art* der Basis (u, v) , kürzer: *3-normierte Polarfunktion* der Basis (u, v) .

Offenbar hat die 3-normierte Polarfunktion p im Intervall J_3 folgende Eigenschaften:

1. $p \in C_1$;
2. $n\pi < p < (n+1)\pi$, n ganz.

Die Ableitung einer Funktion von ζ ($\in J_3$) in bezug auf ζ wollen wir mit \setminus bezeichnen.

Nun haben wir im Intervall j

$$\zeta = \vartheta + 2\alpha$$

und folglich, nach (21) und § 5, (14)

$$\zeta' = \vartheta' + 2 \frac{\alpha'_0}{\sin \vartheta_0} \sin \vartheta \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t \zeta'(\tau) \cot \vartheta(\tau) d\tau \right).$$

Diese Formel ergibt, zusammen mit (38), für je zwei homologe Stellen $t = \zeta^{-1}\zeta' \in j$, $\zeta = \zeta(t) \in J_3$

$$\zeta'(t) = 2 \frac{\alpha'_0}{\sin p_0} \frac{\sin p(\zeta)}{1 - p'(\zeta)} \exp\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \cot p(\varrho) d\varrho\right). \quad (39)$$

Aus (39) finden wir

$$t = t_0 + \frac{1}{2} \frac{\sin p_0}{\alpha'_0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1 - p'(\sigma)}{\sin p(\sigma)} \left(\exp \int_{\zeta_0}^{\sigma} \cot p(\varrho) d\varrho\right) d\sigma. \quad (40)$$

Offenbar stellt diese Formel die zu dem Radonschen Parameter $\zeta(t)$ inverse Funktion $\zeta^{-1}(\zeta)$ dar.

Aus (23) erhalten wir die für je zwei homologe Stellen $t \in j$, $\zeta \in J_3$ gültige Formel

$$q(t) = -\frac{\alpha_0'^2}{\sin^2 p_0} \frac{1 + p'(\zeta)}{1 - p'(\zeta)} \exp\left(-2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \cot p(\varrho) d\varrho\right). \quad (41)$$

Den rechts in dieser Formel stehenden Ausdruck bezeichnen wir als die *dritte* bzw. die *Radonsche Polarform* des Trägers q . Man spricht von der dritten bzw. von der Radonschen Polarform der *Differentialgleichung* (q), wenn der Träger q in dieser Form vorliegt.

Im Intervall J_3 gelten somit die Ungleichungen $-1 < p'(\zeta) < 1$.

11. Unter einer normierten Polarfunktion 3. Art des Trägers q bzw. der *Differentialgleichung* (q), kürzer: 3-normierten Polarfunktion des Trägers q bzw. der Differentialgleichung (q) verstehen wir eine normierte Polarfunktion 3. Art irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Jede 3-normierte Polarfunktion p der Differentialgleichung (q) hat offenbar in ihrem Definitionsintervall J_3 folgende Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} 1. p \in C_1; \\ 2. n\pi < p < (n+1)\pi \quad (n \text{ ganz}); \\ 3. -1 < p' < 1. \end{array} \right\} \quad (42)$$

Über die Bestimmung von Differentialgleichungen (q) durch Angabe ihrer 3-normierten Polarfunktionen gilt Ähnliches wie im Falle der 2-normierten Polarfunktionen (Nr. 9).

12. Anwendung der Polarfunktionen. Wir wollen zunächst die obigen Ergebnisse zur Beantwortung der folgenden Frage anwenden:

Welches sind die durch eine konstante Polarfunktion mit dem Werte $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, n ganz, bestimmten Träger q ?

Jede der Formeln (12), (23), (29), (36), (41) ergibt

$$q(t) = -\alpha_0'^2.$$

Die Differentialgleichungen (q) mit konstanten negativen Trägern q sind also die einzigen, die konstante Polarfunktionen mit dem Wert $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ zulassen.

Bei einer Differentialgleichung $(-k^2)$, deren Träger $-k^2$ konstant und negativ ist, gehen durch jeden Punkt (t_0, α_0) genau zwei erste Phasen von $(-k^2)$, und zwar in den Richtungen $\alpha'_0 = k$ und $\alpha'_0 = -k$ derart, daß die von ihnen erzeugten Polarfunktionen den konstanten Wert $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ besitzen.

Wegen ihrer geometrischen Deutung (Nr. 1) kommen Polarfunktionen und insbesondere normierte Polarfunktionen von Differentialgleichungen (q) in Untersuchungen von Kurven mit speziellen Eigenschaften zentroaffiner Natur vor.

Dies mag etwa durch die folgenden Betrachtungen näher erläutert werden.

Es seien $(P =) P(t)$, $(\bar{P} =) P(\bar{t})$, $t \neq \bar{t}$, beliebige Punkte der Integralkurve \mathfrak{K} mit der vektoriellen Darstellung $x = [u, v]$, und p, \bar{p} seien die entsprechenden Kurventangenten. Die Geraden $OP, O\bar{P}$ wollen wir kürzer mit g, \bar{g} bezeichnen. Ferner sei $\vartheta = \beta - \alpha$ eine Polarfunktion der Basis (u, v) . Wir wissen (Nr. 1), daß die Werte $\vartheta(t), \vartheta(\bar{t})$ die Winkel mod 2π der geeignet orientierten Geraden g, \bar{g} bzw. \bar{g}, \bar{p} darstellen.

Wenn die Punkte P, \bar{P} auf derselben Geraden g liegen ($\bar{g} = g$), also Schnittpunkte der Integralkurve \mathfrak{K} mit g sind, so unterscheiden sich die Werte $(\alpha =) \alpha(t)$, $(\bar{\alpha} =) \alpha(\bar{t})$ voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi: \bar{\alpha} = \alpha + n\pi$ (n ganz); und umgekehrt.

Wenn die Kurventangenten p, \bar{p} parallel sind, so unterscheiden sich die Werte $(\beta =) \beta(t)$, $(\bar{\beta} =) \beta(\bar{t})$ voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi: \bar{\beta} = \beta + n\pi$ (n ganz); und umgekehrt.

Sind die Geraden \bar{g}, p bzw. g, \bar{p} parallel, so gilt $\bar{\alpha} = \beta + m\pi$ bzw. $\bar{\beta} = \alpha + n\pi$ (m, n ganz); und umgekehrt.

Ist die 1-normierte Polarfunktion h der Basis (u, v) mit π periodisch, so haben wir die folgende Situation: Es gibt durch den Punkt O gehende Geraden, die die Kurve \mathfrak{K} wenigstens in zwei Punkten schneiden; ferner sind die Tangenten in allen Schnittpunkten einer solchen Geraden mit der Kurve \mathfrak{K} untereinander parallel und umgekehrt.

Ist die 2-normierte Polarfunktion $-k$ der Basis (u, v) mit π periodisch, so haben wir folgende Situation: Es gibt Tangenten an die Kurve \mathfrak{K} , zu denen parallele Tangenten existieren; ferner liegen die Berührungspunkte aller untereinander parallelen Tangenten auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden. Und umgekehrt.

Etwas ausführlicher haben wir uns mit der 3-normierten Polarfunktion p der Basis (u, v) zu befassen.

Wir nehmen an, die Funktion p sei in einem Intervall J_3 von einer Länge $> \pi$ definiert und erfülle die Funktionalgleichung

$$p(\zeta) + p(\zeta + \pi) = \pi. \quad (43)$$

Dabei kommen natürlich nur solche Stellen $\zeta, \zeta + \pi$ in Betracht, die beide im Intervall J_3 liegen: $\zeta, \zeta + \pi \in J_3$.

An einer Stelle ζ bzw. $\bar{\zeta} = \zeta + \pi$ haben die Komponenten von p gewisse Werte α, β bzw. $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, und es gilt offenbar

$$\bar{\beta} + \bar{\alpha} = \beta + \alpha + \pi. \quad (44)$$

Ferner folgt aus (43)

$$\bar{\beta} - \bar{\alpha} = -\beta + \alpha + \pi. \quad (45)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\bar{\alpha} = \beta; \quad \bar{\beta} = \alpha + \pi. \quad (46)$$

Umgekehrt folgen aus (46) die Beziehungen (44), (45).

Erfüllt also die 3-normierte Polarfunktion p der Basis (u, v) die Funktionalgleichung (43), so haben wir folgende Situation: Es gibt Tangenten p an die Kurve \mathfrak{K} derart, daß die durch den Punkt O gehende und zu der Tangente p parallele Gerade \bar{g} die Kurve \mathfrak{K} wenigstens einmal schneidet; ferner sind die Tangenten an die Kurve \mathfrak{K} in den Schnittpunkten mit \bar{g} der durch den Punkt O und den Berührungspunkt von p gehenden Geraden g parallel (Ellipseneigenschaft) und umgekehrt.

§ 7. Lokal- und Randeigenschaften der Phasen

In diesem Paragraphen werden wir weitere Eigenschaften der Phasen einer Differentialgleichung (q) behandeln. Vorwiegend wird es sich um erste Phasen handeln. Aus diesem Grunde wollen wir schlechthin von Phasen sprechen. Sofern es sich um zweite Phasen handeln sollte, werden wir dies stets ausdrücklich anführen und in diesem Fall voraussetzen, daß die Funktion q im Intervall j nirgends verschwindet.

1. Eindeutige Bestimmung der Phasen durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen. Wir betrachten eine Differentialgleichung (q).

Es gilt der folgende

Satz. Es seien $t_0 \in j$; $X_0, X'_0 \neq 0, X''_0$ beliebige Zahlen. Es gibt genau eine Phase α der Differentialgleichung (q), die an der Stelle t_0 die Cauchyschen Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\alpha(t_0) = X_0, \quad \alpha'(t_0) = X'_0, \quad \alpha''(t_0) = X''_0. \quad (1)$$

Diese Phase α ist in dem Phasensystem der Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) enthalten:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \left(X'_0 \cos X_0 - \frac{1}{2} \frac{X''_0}{X'_0} \sin X_0 \right) u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t), \\ v(t) &= - \left(X'_0 \sin X_0 + \frac{1}{2} \frac{X''_0}{X'_0} \cos X_0 \right) u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei u_0, v_0 die durch die Anfangswerte

$$u_0(t_0) = 0, \quad u'_0(t_0) = 1; \quad v_0(t_0) = 1, \quad v'_0(t_0) = 0$$

bestimmten Integrale von (q) sind.

Beweis. Es ist rechnerisch vorteilhaft, den Beweis für den Fall $X_0 = 0$ durchzuführen und nachher die gefundene Basis vermöge der orthogonalen Substitution von § 5, (41) mit dem Wert $\lambda = X_0$ zu transformieren.

Nehmen wir also an, es gäbe eine Phase α der Differentialgleichung (q) mit den Anfangswerten $0, X'_0 (\neq 0), X''_0$ und es seien

$$u(t) = c_{11}u_0(t) + c_{12}v_0(t),$$

$$v(t) = c_{21}u_0(t) + c_{22}v_0(t)$$

die Glieder einer zugehörigen Basis; die u_0, v_0 haben die obige Bedeutung, während natürlich die $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ geeignete Konstanten darstellen. Man rechnet leicht nach, daß an der Stelle t_0 die folgenden Formeln gelten:

$$r^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2; \quad rr' = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}; \quad -w = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

$$(r^2 = u^2 + v^2; w = uv' - u'v).$$

Nun nehmen nach unserer Voraussetzung die Funktionen $\alpha, \alpha', \alpha''$ an der Stelle t_0 die Werte $0, X'_0, X''_0$ an. Daraus folgt, im Hinblick auf die Formeln § 5, (14),

$$c_{12} = 0, \quad X'_0 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad X''_0 = -2 \frac{c_{11}}{c_{22}} \frac{c_{21}}{c_{22}}.$$

Offenbar ist $c_{22} \neq 0$. Man darf $c_{22} = 1$ annehmen, da die mit $1 : c_{22}$ multiplizierten Integrale u, v eine zu (u, v) proportionale Basis und folglich dasselbe Phasensystem ergeben (§ 5, Nr. 17). Dann haben wir

$$u(t) = X'_0 u_0(t), \quad v(t) = -\frac{1}{2} \frac{X''_0}{X'_0} u_0(t) + v_0(t). \quad (3)$$

Wir sehen, daß es höchstens eine Phase α mit den Anfangswerten $0, X'_0, X''_0$ gibt und daß dieselbe in dem durch die Formeln (3) bestimmten Phasensystem enthalten sein muß. Nun rechnet man leicht nach, daß die an der Stelle t_0 verschwindende und in diesem Phasensystem enthaltene Phase α die betrachteten Anfangsbedingungen tatsächlich erfüllt. Damit ist der Beweis beendet.

Es sei bemerkt, daß der obige Satz die folgende Formel enthält:

$$\tan \alpha(t) = \frac{\sin X_0 + \left(X'_0 \cos X_0 - \frac{1}{2} \frac{X''_0}{X'_0} \sin X_0 \right) \tan \alpha_0(t)}{\cos X_0 - \left(X'_0 \sin X_0 + \frac{1}{2} \frac{X''_0}{X'_0} \cos X_0 \right) \tan \alpha_0(t)}. \quad (4)$$

Dabei stellt $\alpha_0(t)$ eine beliebige Phase der Basis (u_0, v_0) dar. Diese Formel besteht für alle Werte $t \in j$ mit Ausnahme der Nullstellen von $\cot \alpha_0(t)$, $\cot \alpha(t)$, in denen sie den Sinn verliert.

2. Randwerte der Phasen. Es sei α eine Phase der Differentialgleichung (q).

Wir wissen, daß α eine im Intervall $j (= (a, b))$ wachsende oder abnehmende Funktion ist. Folglich existieren die endlichen oder unendlichen Grenzwerte

$$c = \lim_{t \rightarrow a+} \alpha(t), \quad d = \lim_{t \rightarrow b-} \alpha(t). \quad (5)$$

Wir nennen die (eventuell unendliche) Zahl c bzw. d den *links-* bzw. *rechtsseitigen Randwert* der Phase α . Offenbar ist der Randwert c (d) endlich, wenn die Phase α in einer rechtsseitigen (linksseitigen) Umgebung des linken (rechten) Endpunktes a (b) von j beschränkt ist.

Wie man sieht (§ 5, Nr. 4), ist der linksseitige (rechtsseitige) Randwert c (d) von α endlich, wenn die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus oder rechtsseitig (linksseitig) oszillatorisch ist; derselbe ist unendlich, wenn (q) linksseitig (rechtsseitig) oszillatorisch oder oszillatorisch ist.

Ferner gilt (§ 3, Nr. 4): Besitzt die Differentialgleichung (q) 1-konjugierte Zahlen, so ist der Randwert c (d) von α genau dann endlich, wenn die linksseitige (rechtsseitige) 1-Grundzahl r_1 (s_1) von (q) eigentlich ist.

Offenbar ist $c < d$ oder $c > d$, je nachdem, ob die Phase α wächst oder abnimmt: $\operatorname{sgn}(d - c) = \operatorname{sgn} \alpha'$.

Bei jedem Wert λ hat offensichtlich die Phase $\alpha + \lambda$ von (q) die Randwerte $c + \lambda$, $d + \lambda$. Insbesondere unterscheiden sich also die linksseitigen (rechtsseitigen) Randwerte der Phasen des Phasensystems jeder Basis von (q) voneinander um ganzzahlige Vielfache der Zahl π .

Die Zahl $|c - d|$ nennen wir die *Oszillation* der Phase α im Intervall j . Bezeichnung: $O(\alpha | j)$, kürzer: $O(\alpha)$.

Die Oszillation $O(\alpha)$ ist endlich und positiv oder gleich ∞ , je nachdem, ob α im Intervall j beschränkt ist oder nicht. Offenbar haben alle Phasen des vollständigen Phasensystems $[\alpha]$ (§ 5, Nr. 17) dieselbe Oszillation $O(\alpha)$.

Zwei Phasen α , $\bar{\alpha}$ der Differentialgleichung (q) hängen, wie wir wissen, im Sinne der Formel § 5, (39) zusammen. Unterscheiden sich also die Randwerte c , d der Phase α voneinander um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π , so gilt dasselbe für die Randwerte \bar{c} , \bar{d} von $\bar{\alpha}$.

Ist also die Oszillation $O(\alpha)$ von α ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π , so gilt dasselbe von der Oszillation jeder Phase der Differentialgleichung (q).

Ein solcher Wert von $O(\alpha)$ kann natürlich nur dann vorkommen, wenn die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$ ist.

Im Fall $m \geq 2$ wird sich zeigen (Nr. 16): Die Differentialgleichung (q) ist allgemein oder speziell, je nachdem, ob für die Oszillation $O(\alpha)$ jeder ihrer Phasen α

$$(m - 1)\pi < O(\alpha) < m\pi \quad \text{oder} \quad O(\alpha) = m\pi$$

gilt.

Dieser Sachverhalt führt zu der folgenden Definition:

Wir nennen eine Differentialgleichung (q) vom Typus (1) *allgemein* oder *speziell*, je nachdem, ob für die Oszillation $O(\alpha)$ jeder ihrer Phasen α gilt: $0 < O(\alpha) < \pi$ oder $O(\alpha) = \pi$.

Dann gilt der

Satz. Die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$, ist allgemein oder speziell, je nachdem, ob für die Oszillation jeder ihrer Phasen gilt: $(m - 1)\pi < O(\alpha) < m\pi$ oder $O(\alpha) = m\pi$.

3. Normierte Randwerte von Phasen. Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

Es seien \bar{a} , \bar{b} die Zahlen a , b oder b , a , je nachdem, ob $\operatorname{sgn} \alpha' > 0$ oder < 0 ist. Entsprechend sollen \bar{c} , \bar{d} die Zahlen c , d oder d , c bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)a + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)b; & \bar{b} &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)a + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)b; \\ \bar{c} &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)c + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)d; & \bar{d} &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)c + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)d \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$(\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha').$

Wir nennen \bar{c} , \bar{d} *normierte Randwerte* der Phase α .

Offenbar haben wir

$$\lim_{t \rightarrow \bar{a}} \alpha(t) = \bar{c}; \quad \lim_{t \rightarrow \bar{b}} \alpha(t) = \bar{d}, \quad (7)$$

wobei es sich natürlich um entsprechende rechts- oder linksseitige Grenzwerte handelt, und ferner

$$\bar{c} < \bar{d}. \quad (8)$$

Gelegentlich werden die Zahlen \bar{a} , \bar{b} als die *normierten Enden* des Intervalls j in bezug auf die Phase α bezeichnet.

4. Ausgezeichnete Phasen. In dieser und den folgenden Nr. 5–16 geht es, wie wir einleitend bemerkt haben, um erste Phasen und in diesem Zusammenhang um konjugierte Zahlen, Grundzahlen, Grundintegrale, Grundfolgen und ausgezeichnete Basen stets von I. Art.

Unter einer *ausgezeichneten Phase* der Differentialgleichung (q) verstehen wir die Phase einer ausgezeichneten Basis von (q), d. h. einer Basis (u, v) , deren erstes Glied u ein links- oder rechtsseitiges und eventuell das zweite, v , ein rechts- oder linksseitiges Grundintegral von (q) ist (§ 3, Nr. 9).

In der zu behandelnden Transformationstheorie ist der Phasenbegriff von grundlegender Bedeutung. Es scheint deshalb zweckmäßig, Phasen zu betrachten, die mit den untersuchten Differentialgleichungen (q) aufs engste verbunden sind. Dieser Forderung dürften insbesondere die ausgezeichneten Phasen entsprechen, da die zugehörigen (ausgezeichneten) Basen durch Typus und Art einer Differentialgleichung (q) weitgehend bestimmt sind.

Es sei (q) eine Differentialgleichung mit konjugierten Zahlen und der eigentlichen linksseitigen (rechtsseitigen) Grundzahl r_1 (s_1).

Die Differentialgleichung (q) läßt also linksseitige (rechtsseitige) Grundintegrale, die linksseitige (rechtsseitige) Grundfolge $r_1 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ ($s_1 = b_{-1} > b_{-2} > b_{-3} > \dots$) und natürlich auch linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasen bzw. Hauptbasen zu.

Grundlegend ist der folgende

Satz. Die linksseitigen (rechtsseitigen) Randwerte der in dem Phasensystem (α) einer Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) enthaltenen Phasen sind ganzzahlige Vielfache der Zahl π dann und nur dann, wenn (u, v) eine linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasis ist.

Beweis. a) Nehmen wir an, die linksseitigen (rechtsseitigen) Randwerte von Phasen der Basis (u, v) seien ganzzahlige Vielfache von π .

In diesem Fall ist der linksseitige (rechtsseitige) Randwert von genau einer Phase α von (u, v) gleich Null. Wir wollen der Kürze halber diese Phase die linksseitige (rechtsseitige) *Nullphase* von (u, v) nennen.

Wir behaupten: α nimmt an der Stelle r_1 (s_1) den Wert $\varepsilon\pi$ ($-\varepsilon\pi$) an: $\alpha(r_1) = \varepsilon\pi$ ($\alpha(s_1) = -\varepsilon\pi$); dabei ist $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha'$.

Ist diese Behauptung richtig, so ist r_1 (s_1) eine Nullstelle von u (§ 5, Nr. 3), und folglich stellt (u, v) eine linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasis von (q) dar.

Zwecks Vereinfachung unserer Betrachtungen nehmen wir z. B. an, daß α die linksseitige Nullphase von (u, v) ist.

Wir wissen (§ 5, Nr. 13), daß die mit beliebigen Konstanten k_1, k_2 gebildete Funktion

$$y(t) = k_1 \frac{\sin(\alpha(t) + k_2)}{|\alpha'(t)|}$$

das allgemeine Integral von (q) darstellt.

Da die Differentialgleichung (q) konjugierte Zahlen zuläßt, ist $O(\alpha) > \pi$; ferner haben wir nach unserer Annahme $c = 0$. Daraus folgt, daß die Funktion α an einer Stelle $x \in j$ den Wert $\varepsilon\pi$ annimmt. Wir haben zu zeigen, daß es zu jeder Zahl $t_0 \in j$, $t_0 > x$ linksseitig konjugierte Zahlen gibt, während zu keiner Zahl $t_0 \in (a, x)$ solche Zahlen existieren.

Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl und $n \geq 0$ die durch die Ungleichungen

$$n\varepsilon\pi \leq \alpha(t_0) \leq (n+1)\varepsilon\pi$$

bestimmte ganze Zahl. Das Symbol \leq bedeutet $<$ oder $>$, je nachdem, ob $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

Wir ordnen der Zahl t_0 das mit den Konstanten

$$k_1 = 1, \quad k_2 = (n+1)\varepsilon\pi - \alpha(t_0)$$

gebildete Integral y ($= y_0$) zu. Es ist also $0 \leq k_2 \leq \varepsilon\pi$, und das Integral y_0 verschwindet an der Stelle t_0 .

Es sei $t_0 > x$. Ist $k_2 = 0$, so hat wegen $\alpha(x) = \varepsilon\pi$ das Integral y_0 an der Stelle x eine Nullstelle; daraus folgt, daß x eine mit t_0 linksseitig konjugierte Zahl ist. Im Fall $0 \leq k_2 \leq \varepsilon\pi$ haben wir $\alpha(x) + k_2 \geq \varepsilon\pi$ und zugleich, wegen $c = 0$, für geeignete Zahlen $t \in (a, x)$: $\alpha(t) + k_2 \leq \varepsilon\pi$. Die Funktion $\alpha + k_2 - \varepsilon\pi$ hat also im Intervall (a, x) eine Nullstelle, die offenbar eine Nullstelle von y_0 ist und folglich eine mit t_0 linksseitig konjugierte Zahl darstellt.

Es sei nun $t_0 < x$. Dann haben wir $\alpha(t_0) + k_2 = \varepsilon\pi$. Daraus folgt für $t \in (a, t_0)$: $0 \leq \alpha(t) + k_2 \leq \varepsilon\pi$ und ferner $y_0(t) \neq 0$. Es gibt also keine mit t_0 linksseitig konjugierten Zahlen.

b) Es sei nun (u, v) eine linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasis von (q).

Wir betrachten eine Phase α von (u, v) und setzen $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha'$. Ferner sei c (d) der linksseitige (rechtsseitige) Randwert von α .

Da u ein linksseitiges (rechtsseitiges) Grundintegral von (q) ist, haben wir (§ 5, Nr. 3) $\alpha(r_1) = n\varepsilon\pi$ ($\alpha(s_1) = -n\varepsilon\pi$); $0 \leq n$ ganz.

Nun ist aber $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - c$ ($\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - d$) die linksseitige (rechtsseitige) Nullphase einer Basis (\bar{u}, \bar{v}) von (q). Folglich haben wir nach a)

$$\varepsilon\pi = \bar{\alpha}(r_1) = \alpha(r_1) - c = n\varepsilon\pi - c \quad (-\varepsilon\pi = \bar{\alpha}(s_1) = \alpha(s_1) - d = -n\varepsilon\pi - d),$$

also

$$c = (n - 1)\varepsilon\pi \quad (d = -(n - 1)\varepsilon\pi).$$

Damit ist der Beweis beendet.

5. Wir wollen nun die Eigenschaften ausgezeichneter Phasen genauer untersuchen.

Es sei (u, v) eine linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasis der Differentialgleichung (q) und (α) ihr erstes Phasensystem.

u ist also ein linksseitiges (rechtsseitiges) und folglich an den Stellen $a_1 < a_2 < \dots$ ($b_{-1} > b_{-2} > \dots$) verschwindendes Grundintegral, während v ein von u unabhängiges Integral der Differentialgleichung (q) darstellt. Dieses Integral v hat in jedem Intervall $(a_\mu, a_{\mu+1})$ ($(b_{-\mu-1}, b_{-\mu})$) genau eine Nullstelle x_μ ($x_{-\mu}$); $\mu = 0, 1, \dots$; $a_0 = a$ ($b_0 = b$):

$$(a =) a_0 < x_0 < a_1 < x_1 < a_2 < \dots \quad ((b =) b_0 > x_0 > b_{-1} > x_{-1} > b_{-2} > \dots). \quad (9)$$

Die Phasen $\alpha \in (\alpha)$ wachsen oder nehmen ab, je nachdem, ob die Wronskische Determinante w von (u, v) negativ oder positiv ist: $\operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} (-w)$ (§ 5, (14)). Wir setzen $\varepsilon = \operatorname{sgn} (-w)$.

6. Nach dem Satz von Nr. 4 gibt es in dem System (α) genau eine linksseitige (rechtsseitige) Nullphase α_0 ; dieselbe nimmt an der Stelle $a_1 (= r_1)$ ($b_{-1} (= s_1)$) den Wert $\varepsilon\pi$ ($-\varepsilon\pi$) und folglich an den Stellen (9) die Werte

$$0, \frac{1}{2}\varepsilon\pi, \varepsilon\pi, \frac{3}{2}\varepsilon\pi, 2\varepsilon\pi, \dots \quad \left(0, -\frac{1}{2}\varepsilon\pi, -\varepsilon\pi, -\frac{3}{2}\varepsilon\pi, -2\varepsilon\pi, \dots\right)$$

an:

$$\alpha_0(a_\mu) = \mu\varepsilon\pi, \quad \alpha_0(x_\mu) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \quad \left(\alpha_0(b_{-\mu}) = -\mu\varepsilon\pi, \alpha_0(x_{-\mu}) = -\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi\right); \quad (10)$$

$\mu = 0, 1, \dots$; bei $\alpha_0(a_0)$ ($\alpha_0(b_0)$) handelt es sich natürlich um den linksseitigen (rechtsseitigen) Grenzwert.

Wir wollen nun den rechtsseitigen (linksseitigen) Randwert d_0 (c_0) der Nullphase α_0 bestimmen. Dieser Randwert hängt von Typus und Art der Differentialgleichung (q) ab.

I. Zunächst sei die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 2$.

In diesem Fall sind beide Grundzahlen r_1, s_1 eigentlich, die beiden Grundfolgen $(r_1 =) a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$, $(s_1 =) b_{-1} > b_{-2} > \dots > b_{-m+1}$ bestehen aus je $m - 1$ Gliedern, und es gelten Beziehungen wie in § 3, (2).

Aus (10) erhalten wir

$$(m - 1)\varepsilon\pi \leq d_0 \leq m\varepsilon\pi \quad (-m\varepsilon\pi \leq c_0 \leq -(m - 1)\varepsilon\pi). \quad (11)$$

Wir zeigen, daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Differentialgleichung (q) speziell ist.

In der Tat, ist $d_0 = m\varepsilon\pi$ ($c_0 = -m\varepsilon\pi$), so ergibt der Satz von Nr. 4, daß u ein rechtsseitiges (linksseitiges) Grundintegral von (q) ist und folglich an beiden Stellen r_1, s_1 (s_1, r_1) verschwindet. Die Grundzahlen r_1, s_1 sind also miteinander konjugiert, und dies besagt, daß die Differentialgleichung (q) speziell ist. Ist umgekehrt die Differentialgleichung (q) speziell, so sind die Grundzahlen r_1, s_1 miteinander konjugiert, und folglich ist das linksseitige (rechtsseitige) Grundintegral u zugleich ein rechtsseitiges (linksseitiges). Dem erwähnten Satz von Nr. 4 entnehmen wir, daß d_0 (c_0) ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, und aus (11) erhalten wir $d_0 = m\varepsilon\pi$ ($c_0 = -m\varepsilon\pi$).

a) Allgemeine Differentialgleichung (q). In diesem Fall gelten die Beziehungen (11) mit Ausschluß der Gleichheitszeichen. Der rechtsseitige (linksseitige) Randwert d_0 (c_0) von α_0 hängt von der Wahl des zweiten Gliedes v der linksseitigen (rechtsseitigen) Hauptbasis (u, v) ab.

Wir zeigen nun: Ist v ein rechtsseitiges (linksseitiges) Grundintegral, also (u, v) eine Hauptbasis der Differentialgleichung (q), so ist

$$d_0 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \quad \left(c_0 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi\right). \quad (12)$$

In der Tat, in diesem Fall haben wir $x_\mu = b_{-m+\mu+1}$ ($x_{-\mu} = a_{m-\mu-1}$); $\mu = 0, \dots, m-2$. Die Phase α_0 hat nach (10) an der Stelle b_{-1} (a_1) den Wert $(m - \frac{3}{2})\varepsilon\pi$ ($-(m - \frac{3}{2})\varepsilon\pi$). Die Funktion $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - d_0$ ($\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - c_0$) ist offenbar eine rechtsseitige (linksseitige) Nullphase von (q), und folglich hat sie nach (10) an der Stelle b_{-1} (a_1) den Wert $-\varepsilon\pi$ ($\varepsilon\pi$). Es gilt also

$$-\varepsilon\pi = \left(m - \frac{3}{2}\right)\varepsilon\pi - d_0 \quad \left(\varepsilon\pi = -\left(m - \frac{3}{2}\right)\varepsilon\pi - c_0\right),$$

und daraus folgt (12).

b) Spezielle Differentialgleichung (q). In diesem Fall haben wir, wie oben gezeigt wurde,

$$d_0 = m\varepsilon\pi \quad (c_0 = -m\varepsilon\pi), \quad (13)$$

und zwar unabhängig von der Wahl des zweiten Gliedes v der zugleich links- und rechtsseitigen Hauptbasis (u, v).

II. Zweitens sei die Differentialgleichung (q) von unendlichem Typus.

Ist (q) rechtsseitig (linksseitig) oszillatorisch, so läßt sie nur die linksseitige (rechtsseitige), und zwar unendliche Grundfolge $a_1 < a_2 < \dots$ ($b_{-1} > b_{-2} > \dots$) zu; (9) ist eine unendliche Folge.

In diesem Fall ist offenbar

$$d_0 = \varepsilon\infty \quad (c_0 = -\varepsilon\infty). \quad (14)$$

7. Wir kehren nun zu dem in Nr. 5 betrachteten Phasensystem (α) der linksseitigen (rechtsseitigen) Hauptbasis (u, v) der Differentialgleichung (q) zurück.

Das System (α) besteht offenbar aus den Phasen

$$\alpha_\nu(t) = \alpha_0(t) - \nu \varepsilon \pi \quad (\alpha_\nu(t) = \alpha_0(t) + \nu \varepsilon \pi) \\ (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die Phase α_ν nimmt an den Stellen a_μ, x_μ ($b_{-\mu}, x_{-\mu}$) die folgenden Werte an:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\nu(a_\mu) &= (\mu - \nu) \varepsilon \pi, & \alpha_\nu(x_\mu) &= \left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) \varepsilon \pi \\ \left(\alpha_\nu(b_{-\mu}) &= -(\mu - \nu) \varepsilon \pi, & \alpha_\nu(x_{-\mu}) &= -\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) \varepsilon \pi \right) \\ & & (\mu &= 0, 1, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Der linksseitige (rechtsseitige) Randwert c_ν (d_ν) der Phase α_ν ist

$$c_\nu = -\nu \varepsilon \pi \quad (d_\nu = \nu \varepsilon \pi). \quad (16)$$

Der rechtsseitige (linksseitige) Randwert d_ν (c_ν) der Phase α_ν verhält sich je nach Typus und Art der Differentialgleichung (q) wie folgt:

I. Endlicher Typus (m), $m \geq 2$.

a) Allgemeine Differentialgleichung (q):

$$(m - \nu - 1) \varepsilon \pi \leq d_\nu \leq (m - \nu) \varepsilon \pi \quad (-(m - \nu) \varepsilon \pi \leq c_\nu \leq -(m - \nu - 1) \varepsilon \pi) \quad (17)$$

Ist insbesondere ν ein rechtsseitiges (linksseitiges) Grundintegral und folglich (u, ν) eine Hauptbasis der Differentialgleichung (q), so ist unabhängig von der Wahl des Grundintegrals ν

$$d_\nu = \left(m - \nu - \frac{1}{2}\right) \varepsilon \pi \quad \left(c_\nu = -\left(m - \nu - \frac{1}{2}\right) \varepsilon \pi\right). \quad (18)$$

b) Spezielle Differentialgleichung (q):

$$d_\nu = (m - \nu) \varepsilon \pi \quad (c_\nu = -(m - \nu) \varepsilon \pi). \quad (19)$$

II. Unendlicher Typus.

a) Rechtsseitig oszillatorische Differentialgleichung (q):

$$d_\nu = \varepsilon \infty. \quad (20)$$

b) Linksseitig oszillatorische Differentialgleichung (q):

$$c_\nu = -\varepsilon \infty. \quad (21)$$

8. Normalphasen. Die Nullphasen einer Differentialgleichung (q) haben die Eigenschaft, daß sie im Intervall j stets von Null verschieden sind. Wir wollen nun umgekehrt Phasen betrachten, die im Intervall j eine (und natürlich nur eine) Nullstelle besitzen. Eine Phase der Differentialgleichung (q), die an einer Stelle von j verschwindet, soll im folgenden *Normalphase* genannt werden.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (q).

Es sei (u, ν) eine Basis von (q) und (α) das Phasensystem dieser Basis (u, ν) .

Zunächst sehen wir, daß es in dem Phasensystem (α) dann und nur dann Normalphasen gibt, wenn das Integral u im Intervall j Nullstellen besitzt. In diesem Fall ist jede Nullstelle des Integrals u die Nullstelle einer Normalphase aus (α) und umgekehrt, die Nullstelle jeder Normalphase aus (α) fällt mit einer Nullstelle des Integrals u zusammen.

Daraus folgt:

Ist die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$, bzw. von unendlichem Typus, so enthält das Phasensystem (α) $m - 1$ oder m bzw. abzählbar viele Normalphasen, deren Nullstellen mit denen des Integrals u zusammenfallen. Ist insbesondere die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so besteht das System (α) aus lauter Normalphasen.

9. Struktur der Menge ausgezeichnete Normalphasen einer Differentialgleichung (q). Unter einer *ausgezeichneten Normalphase* der Differentialgleichung (q) verstehen wir natürlich (Nr. 4) die Normalphase einer ausgezeichneten Basis von (q). Ausgezeichnete Normalphasen kommen also bei Differentialgleichungen (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 2$, ferner bei links- bzw. rechtsseitig oszillatorischen Differentialgleichungen (q) und nur in diesen Fällen vor.

Es sei (q) eine Differentialgleichung mit konjugierten Zahlen und der eigentlichen linksseitigen (rechtsseitigen) Grundzahl r_1 (s_1).

Wir gehen von der in Nr. 5 betrachteten Situation aus. Insbesondere sei also (u, v) eine linksseitige (rechtsseitige) Hauptbasis der Differentialgleichung (q) und (α) ihr erstes Phasensystem.

Da die Nullstellen des Integrals u genau mit den ausgezeichneten Zahlen $a_1 < a_2 < \dots$ ($b_{-1} > b_{-2} > \dots$) der Differentialgleichung (q) zusammenfallen, gibt es zu jeder Zahl a_r (b_{-r}) ($r = 1, 2, \dots$) in dem Phasensystem (α) genau eine Normalphase mit der Nullstelle a_r (b_{-r}). Aus (15) sehen wir, daß dies die Phase

$$\alpha_r(t) = \alpha_0(t) - r\epsilon\pi \quad (\alpha_r(t) = \alpha_0(t) + r\epsilon\pi) \quad (22)$$

ist. Umgekehrt ist jede im Phasensystem (α) enthaltene Normalphase eine von diesen Phasen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Unter dem *Phasenbündel mit dem Scheitel a_r (b_{-r})*, kürzer: a_r -Bündel (b_{-r} -Bündel) der Differentialgleichung (q) verstehen wir die aus den an der Stelle a_r (b_{-r}) verschwindenden Normalphasen aller linksseitigen (rechtsseitigen) Hauptbasen von (q) bestehende Menge; $r = 1, 2, \dots$.

Offenbar besteht die Menge aller ausgezeichneten Normalphasen der Differentialgleichung (q) aus den Phasenbündeln mit den Scheiteln a_1, a_2, \dots (b_{-1}, b_{-2}, \dots).

10. Wir wollen nun die Struktur der Phasenbündel untersuchen. Der Kürze halber beschränken wir uns auf linksseitige Hauptbasen. Diese kommen, wie wir wissen, genau bei den Differentialgleichungen (q) von endlichen Typen (m), $m \geq 2$, und bei den rechtsseitig oszillatorischen Differentialgleichungen (q) vor. Die Untersuchung im Fall rechtsseitiger Hauptbasen ist ganz analog.

Es sei also (u, v) eine linksseitige Hauptbasis der Differentialgleichung (q) und a_r ein Glied der linksseitigen Grundfolge von (q).

Wir wissen (§ 3, Nr. 9), daß die linksseitigen Hauptbasen von (q) genau das dreiparametrische System $(\rho u, \sigma v + \bar{\sigma} u)$, $\rho\sigma \neq 0$, bilden. Nun sind bei jeder Wahl

der Parameterwerte $\varrho, \sigma, \bar{\sigma}$ die Basen $(\varrho u, \sigma v + \bar{\sigma}u)$ und $\left(\frac{\varrho}{\sigma}u, v + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}u\right)$ proportional. Sie haben also dasselbe Phasensystem und folglich auch dieselbe an der Stelle a_r verschwindende Normalphase.

Das Phasenbündel der Differentialgleichung (q) mit dem Scheitel a_r besteht offenbar genau aus den Normalphasen des zweiparametrischen Basensystems $(\varrho u, v + \sigma u)$, $\varrho \neq 0$, die an der Stelle a_r verschwinden.

Natürlich gibt es für jede Basis dieses zweiparametrischen Systems genau eine Normalphase von (q) mit der Nullstelle a_r .

Nun zerfällt das Basensystem $(\varrho u, v + \sigma u)$ in einparametrische Systeme, von denen jedes durch einen festen Wert σ_0 von σ bestimmt ist. Ein solches einparametrisches System besteht also aus den linksseitigen Hauptbasen $(\varrho u, v + \sigma_0 u)$, $\varrho \neq 0$. Die in dem a_r -Bündel enthaltenen Normalphasen der linksseitigen Hauptbasen dieses einparametrischen Systems bilden ein einparametrisches Untersystem $P(a_r|\sigma_0)$ des a_r -Bündels. Wir nennen $P(a_r|\sigma_0)$ *Phasenbüschel mit dem Scheitel a_r* , kürzer: *a_r -Büschel*, der Differentialgleichung (q).

Das Phasenbündel der Differentialgleichung (q) mit dem Scheitel a_r besteht also aus einem einparametrischen System von a_r -Büscheln $P(a_r|\sigma)$, von denen jedes von den an der Stelle a_r verschwindenden Normalphasen der linksseitigen Hauptbasen $(\varrho u, v + \sigma u)$, $0 \neq \varrho$ beliebig und σ fest, gebildet ist.

Damit ist die Untersuchung der Struktur der Phasenbündel auf die der Phasenbüschel zurückgeführt.

11. Wir wollen also die Struktur der Phasenbüschel untersuchen.

Wir betrachten ein Phasenbüschel $P(a_r|\sigma)$ mit dem Scheitel a_r der Differentialgleichung (q). Offenbar können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sigma = 0$ und ferner $w (= uv' - u'v) < 0$ annehmen. Der Kürze halber schreiben wir $P(a_r)$ statt $P(a_r|0)$.

Das Phasenbüschel $P(a_r)$ besteht aus den an der Stelle a_r verschwindenden Normalphasen der linksseitigen Hauptbasen $(\varrho u, v)$, $\varrho \neq 0$.

Bei jedem Wert $\varrho (\neq 0)$ ist ϱu ein linksseitiges und folglich an den Stellen $a_1 < a_2 < \dots$ verschwindendes Grundintegral, während v ein von u unabhängiges Integral der Differentialgleichung (q) darstellt. Dieses Integral v hat in jedem Intervall $(a_\mu, a_{\mu+1})$ genau eine Nullstelle x_μ ; $\mu = 0, 1, \dots$, und es bestehen Beziehungen wie (9). Der Kürze halber wollen wir die Intervalle (a_μ, x_μ) , $(x_\mu, a_{\mu+1})$ mit j_μ bzw. j'_μ bezeichnen: $j_\mu = (a_\mu, x_\mu)$, $j'_\mu = (x_\mu, a_{\mu+1})$; ist die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m) ($m \geq 2$), so kommen natürlich nur die Intervalle $j_0, j'_0, j_1, j'_1, \dots, j_{m-1}$ in Betracht, wobei unter x_{m-1} die Endzahl b von j zu verstehen ist.

Bei jeder Zahl $\varrho (\neq 0)$ bezeichnen wir mit $\alpha_{r,\zeta}$, kürzer: α_ϱ , die in dem Phasenbüschel $P(a_r)$ enthaltene Normalphase der Basis $(\varrho u, v)$, und mit $c_{r,\varrho}$ bzw. $d_{r,\varrho}$, kürzer: c_ϱ bzw. d_ϱ , ihren links- bzw. rechtsseitigen Randwert.

Offenbar haben wir $\tan \alpha_\varrho = \varrho u : v$ und folglich

$$\tan \alpha_\varrho = \varrho \tan \alpha_1. \quad (23)$$

Die Wronskische Determinante der Basis $(\varrho u, v)$ ist offenbar ϱw . Daraus schließen wir, im Hinblick auf unsere Annahme $w < 0$, daß die Phase α_ϱ bei positivem ϱ wächst und bei negativem ϱ abnimmt: $\operatorname{sgn} \alpha'_\varrho = \operatorname{sgn} \varrho (= \varepsilon)$.

Die Phase α_ϱ nimmt an den Stellen

$$x_0, a_1, x_1, \dots, x_{r-1}, a_r, x_r, \dots$$

die von $|\varrho|$ unabhängigen Werte

$$-\left(r - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi, -(r-1)\varepsilon\pi, -\left(r - \frac{3}{2}\right)\varepsilon\pi, \dots, -\frac{1}{2}\varepsilon\pi, 0, \frac{1}{2}\varepsilon\pi, \dots$$

an, also

$$\alpha_\varrho(a_{\mu+1}) = -(r - \mu - 1)\varepsilon\pi, \quad \alpha_\varrho(x_\mu) = -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \quad (24)$$

$$(\mu = 0, 1, \dots).$$

Nach (16) haben wir

$$c_\varrho = -r\varepsilon\pi. \quad (25)$$

Für den rechtsseitigen Randwert d_ϱ von α_ϱ bestehen, nach (17), (18), (19), (20), je nach Typus und Art der Differentialgleichung (q), die folgenden Beziehungen:

I. Endlicher Typus (m), $m \geq 2$:

a) Allgemeine Differentialgleichung (q):

$$(m - r - 1)\varepsilon\pi \leq d_\varrho \leq (m - r)\varepsilon\pi. \quad (26)$$

Ist insbesondere v ein rechtsseitiges Grundintegral und folglich $(\varrho u, v)$ eine Hauptbasis der Differentialgleichung (q), so ist $x_\mu = b_{-m+\mu+1}$ ($\mu = 0, \dots, m-2$) und ferner

$$d_\varrho = \left(m - r - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi. \quad (27)$$

b) Spezielle Differentialgleichung (q):

$$d_\varrho = (m - r)\varepsilon\pi. \quad (28)$$

II. Unendlicher Typus. Rechtsseitig oszillatorische Differentialgleichung (q):

$$d_\varrho = \varepsilon\infty. \quad (29)$$

Das Phasenbüschel $P(a_r)$ zerfällt also in zwei Unterbüschel, von denen eines, $P_1(a_r)$, aus wachsenden und das andere, $P_{-1}(a_r)$ aus abnehmenden Phasen besteht. Die Phasen aus $P_1(a_r)$ bzw. $P_{-1}(a_r)$ haben an den Stellen $a_{\mu+1}$, x_μ ($\mu = 0, 1, \dots$) dieselben Werte $-(r - \mu - 1)\pi$, $-(r - \mu - \frac{1}{2})\pi$ bzw. $(r - \mu - 1)\pi$, $(r - \mu - \frac{1}{2})\pi$ und denselben linksseitigen Randwert $-r\pi$ bzw. $r\pi$. Ihre rechtsseitigen Randwerte hängen im allgemeinen von den einzelnen Phasen ab, aber in den folgenden Fällen nicht:

Die Differentialgleichung (q) ist von

I. endlichem Typus (m), $m \geq 2$:

a) allgemein, und v ist ein rechtsseitiges Grundintegral von (q);

b) speziell;

II. Unendlicher Typus. Rechtsseitig oszillatorisch.

In diesen Fällen haben die Phasen aus $P_1(a_r)$ bzw. $P_{-1}(a_r)$ auch denselben rechtsseitigen Randwert, und zwar: Ia): $(m - r - \frac{1}{2})\pi$ bzw. $-(m - r - \frac{1}{2})\pi$; Ib): $(m - r)\pi$ bzw. $-(m - r)\pi$; II: ∞ bzw. $-\infty$.

Anschaulich kann diese Situation wie folgt beschrieben werden:

Alle durch die Phasen α_ε des Unterbüschels $P_\varepsilon(a_r)$ ($\varepsilon = \pm 1$) bestimmten Kurven $[t, \alpha_\varepsilon(t)]$, $t \in j$, gehen durch die Punkte

$$\left(x_\mu, -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \right), \quad (a_{\mu+1}, -(r - \mu - 1)\varepsilon\pi) \quad (\mu = 0, 1, \dots) \quad (30)$$

hindurch und streben links nach dem Punkt $(a, -r\varepsilon\pi)$. In den Fällen Ia), Ib), II streben sie auch rechts nach demselben Punkt, und zwar nach $(b, (m - r - \frac{1}{2})\varepsilon\pi)$, $(b, (m - r)\varepsilon\pi)$ bzw. $(b, \varepsilon\infty)$. Im übrigen liegen alle diese Kurven in dem durch Vereinigung der rechteckigen offenen Gebiete

$$\left. \begin{aligned} j_\mu \times \left(-(r - \mu)\varepsilon\pi, -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \right), \\ j'_\mu \times \left(-\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi, -(r - \mu - 1)\varepsilon\pi \right) \quad (\mu = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

gebildeten Bereich B_ε .

Dieses Bild wollen wir noch durch die folgende Tatsache vervollständigen:

Durch jeden Punkt des Bereiches B_ε geht genau eine Kurve $[t, \alpha_\varepsilon(t)]$ hindurch. Mit anderen Worten, die betrachteten Kurven $[t, \alpha_\varepsilon(t)]$ bedecken den Bereich B_ε voll und schlicht.

In der Tat, es sei $P_0(t_0, X_0)$ ein Punkt z. B. in dem rechteckigen Gebiet $j_\mu \times \left(-(r - \mu)\varepsilon\pi, -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \right)$, also $t_0 \in (a_\mu, x_\mu)$, $X_0 \in \left(-(r - \mu)\varepsilon\pi, -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \right)$.

Geht die durch eine Phase $\alpha_\varepsilon \in P_\varepsilon(a_r)$ bestimmte Kurve $[t, \alpha_\varepsilon(t)]$ durch den Punkt P_0 , so haben wir $\alpha_\varepsilon(t_0) = X_0$ und ferner $\varrho = \tan X_0$; $\tan \alpha_1(t_0) (= \varrho_0)$. Es kommt also höchstens die Phase $\alpha_{\varrho_0}(t)$ in Betracht. Ferner gilt nach (23) $\tan \alpha_{\varrho_0}(t_0) = \tan X_0$ und ferner, da beide Zahlen $\alpha_{\varrho_0}(t_0)$, X_0 in dem Intervall $\left(-(r - \mu)\varepsilon\pi, -\left(r - \mu - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \right)$ liegen, $\alpha_{\varrho_0}(t_0) = X_0$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ferner sehen wir: Für je zwei Phasen $\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}} \in P_\varepsilon(a_r)$ besteht im Intervall j die Beziehung

$$|\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}| < \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

Abb. 2 zeigt die Situation im Fall Ia).

12. Wir wollen noch die Abbildung $L: \varrho \rightarrow \alpha_\varrho$ genauer untersuchen.

Es sei I_1 bzw. I_{-1} das Intervall aller positiven bzw. negativen Zahlen.

1. Die Abbildung L bildet das Intervall I_ε auf das Unterbüschel $P_\varepsilon(a_r)$ ab ($\varepsilon = \pm 1$).

2. Die Abbildung L ist schlicht.

In der Tat, aus $\varrho, \bar{\varrho} \in I_\varepsilon$, $\varrho \neq \bar{\varrho}$, folgt offenbar $\alpha_\varrho \neq \alpha_{\bar{\varrho}}$. Gilt umgekehrt $\alpha_\varrho \neq \alpha_{\bar{\varrho}}$ für zwei Phasen $\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}} \in P_\varepsilon(a_r)$ und zugleich $\varrho = \bar{\varrho}$, so ergibt die Formel (23) $\alpha_\varrho = \alpha_{\bar{\varrho}} + k\pi$, $0 \neq k$ ganz. Dies ist unmöglich, da beide Phasen $\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}}$ an der Stelle a_r verschwinden.

3. Für $\varrho, \bar{\varrho} \in I_\varepsilon$, $\varrho < \bar{\varrho}$ gilt in jedem Intervall j_μ bzw. j'_μ ($\mu = 0, 1, \dots$)

$$\alpha_\varrho < \alpha_{\bar{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_\varrho > \alpha_{\bar{\varrho}}.$$

In der Tat, in jedem Intervall j_μ bzw. j'_μ ist offenbar $\tan \alpha_1 > 0$ bzw. $\tan \alpha_1 < 0$. Daraus folgt im Hinblick auf (23) unsere Behauptung.

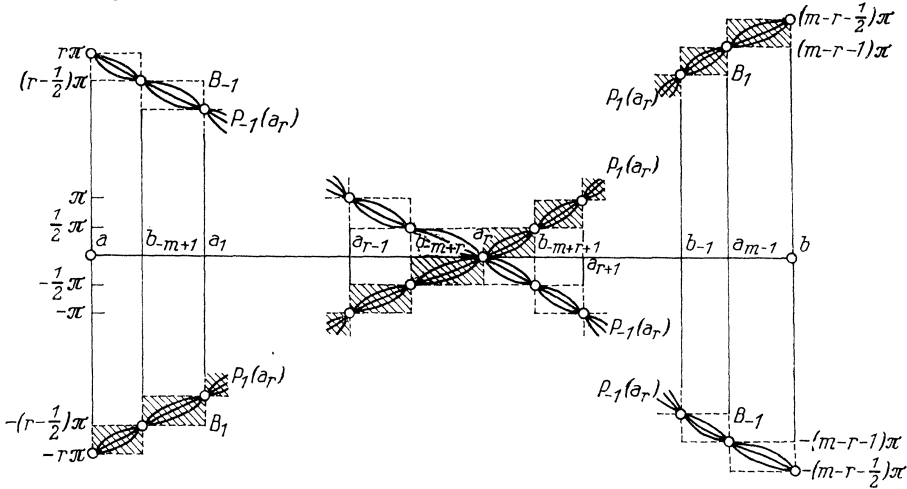


Abb. 2

Das Unterbündel $P_\varepsilon(a_r)$ läßt die folgende Ordnung ($<$) zu: Für $\alpha, \bar{\alpha} \in P_\varepsilon(a_r)$ ist $\alpha < \bar{\alpha}$ genau dann, wenn in jedem Intervall j_μ bzw. j'_μ die Beziehung $\alpha < \bar{\alpha}$ bzw. $\alpha > \bar{\alpha}$ besteht.

Die Abbildung L ist in bezug auf diese Ordnung ordnungstreu.

4. Wir definieren in der Menge $P_\varepsilon(a_r)$ eine Metrik, und zwar im Sinne der Formel

$$d(\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}}) = \sup_{t \in j} |\alpha_\varrho(t) - \alpha_{\bar{\varrho}}(t)|.$$

Im Intervall I_ε nehmen wir die euklidische Metrik an.

Wir zeigen:

Die Abbildung L ist homeomorph.

Beweis. a) Es seien $\varrho, \bar{\varrho} \in I_\varepsilon$ beliebige Zahlen. Offenbar haben wir an jeder von den Zahlen $a_{\mu+1}$, x_μ ($\mu = 0, 1, \dots$) verschiedenen Stelle $t \in j$

$$\tan(\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}) = \frac{\tan \alpha_\varrho - \tan \alpha_{\bar{\varrho}}}{1 + \tan \alpha_\varrho \tan \alpha_{\bar{\varrho}}} = \frac{\varrho - \bar{\varrho}}{\frac{v}{u} + \varrho \bar{\varrho} \frac{u}{v}}$$

und ferner, im Hinblick auf (32),

$$|\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}| \leq \tan |\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}| = \frac{|\varrho - \bar{\varrho}|}{\left| \frac{v}{u} + \varrho \bar{\varrho} \frac{u}{v} \right|} = \frac{|\varrho - \bar{\varrho}|}{\left(\sqrt{\left| \frac{v}{u} \right|} - \sqrt{\varrho \bar{\varrho}} \sqrt{\left| \frac{u}{v} \right|} \right)^2 + 2\sqrt{\varrho \bar{\varrho}}}$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$d(\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}}) \leq \frac{1}{2} \frac{|\varrho - \bar{\varrho}|}{\sqrt{\varrho\bar{\varrho}}}. \quad (33)$$

Wir sehen, daß die Abbildung L an jeder Stelle $\bar{\varrho} \in I_\varepsilon$ stetig ist.

b) Es seien $\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}} \in P_\varepsilon(a_r)$ beliebige Phasen. Offenbar gibt es eine Zahl $t_0 \in j$ so, daß $\tan \alpha_1(t_0) = \delta (= \pm 1)$ ist. An der Stelle t_0 haben wir (nach (23))

$$\delta(\varrho - \bar{\varrho}) = \tan \alpha_\varrho - \tan \alpha_{\bar{\varrho}} = (1 + \varrho\bar{\varrho}) \tan(\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}})$$

und ferner

$$\frac{|\varrho - \bar{\varrho}|}{1 + \varrho\bar{\varrho}} = \tan |\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}| \leq \tan d(\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}}).$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$\frac{|\varrho - \bar{\varrho}|}{1 + \varrho\bar{\varrho}} \leq \tan d(\alpha_\varrho, \alpha_{\bar{\varrho}}). \quad (34)$$

Wir sehen, daß die Abbildung L^{-1} an jeder Stelle $\alpha_\varrho \in P_\varepsilon(a_r)$ stetig ist. Damit ist der Beweis beendet.

13. Beziehungen zwischen Nullstellen und Randwerten der Normalphasen. Im Laufe der obigen Untersuchungen über ausgezeichnete Normalphasen sind wir gewissen Beziehungen zwischen den Nullstellen und Randwerten dieser Phasen begegnet. So zeigt z. B. Abb. 2, daß in dem betreffenden Fall jede wachsende bzw. abnehmende Normalphase mit der Nullstelle a_r die Randwerte $-\pi$, $(m - r - \frac{1}{2})\pi$ bzw. π , $-(m - r - \frac{1}{2})\pi$ aufweist. Wir wollen nun in voller Allgemeinheit Beziehungen zwischen Nullstellen und Randwerten der Normalphasen untersuchen.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$, oder eine links- oder rechtsseitig oszillatorische Differentialgleichung. Die links- bzw. rechtsseitigen 1-Grundfolgen von (q), sofern sie existieren, wollen wir wieder mit

$$(a <) r_1 = a_1 < a_2 < \dots \quad \text{bzw.} \quad (b >) s_1 = b_{-1} > b_{-2} > \dots$$

bezeichnen.

Es sei α eine Normalphase von (q), $t_0 \in j$ ihre Nullstelle und c bzw. d ihr links- bzw. rechtsseitiger Randwert.

Zwecks Vereinfachung unserer Schreibweise wollen wir $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha'$ setzen und unter dem Symbol \leq (\geq) das Symbol $<$ ($>$) oder $>$ ($<$) verstehen, je nachdem, ob $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

a) Nehmen wir zunächst an, die Differentialgleichung (q) sei von endlichem Typus oder rechtsseitig oszillatorisch. In diesen Fällen ist der Randwert c endlich.

Ist die Differentialgleichung (q) vom Typus (1), also ohne konjugierte Zahlen 1. Art, so bestehen offenbar die Beziehungen

$$-\pi\varepsilon \leq c \leq 0.$$

Wir nehmen nun an, die Differentialgleichung (q) lasse 1-konjugierte Zahlen zu.

Es sei $r \geq 0$ die vermöge von $t_0 \in (a_r, a_{r+1}]$ bestimmte ganze Zahl; $\alpha_0 = \alpha$. Wir betrachten die im System $[\alpha]$ enthaltene linksseitige Nullphase α_0 :

$$\alpha_0(t) = \alpha(t) - c.$$

Offenbar gelten die Beziehungen

$$\alpha_0(a_r) \leq \alpha_0(t_0) \leq \alpha_0(a_{r+1}),$$

wobei das Gleichheitszeichen genau in dem Fall $t_0 = a_{r+1}$ anzuwenden ist. Daraus folgen wegen der Monotonie von α_0 und im Hinblick auf (10) die gleichzeitig bestehenden Formeln

$$a_r < t_0 \leq a_{r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon.$$

b) Zweitens nehmen wir an, die Differentialgleichung (q) sei von endlichem Typus oder linksseitig oszillatorisch. In diesem Fall ist der Randwert d endlich. Ähnlich wie oben findet man:

Ist die Differentialgleichung (q) vom Typus (1), so gilt

$$0 \leq d \leq \pi\varepsilon.$$

Läßt die Differentialgleichung (q) 1-konjugierte Zahlen zu, so bestehen gleichzeitig die Formeln

$$b_{-s-1} \leq t_0 < b_{-s}; \quad s\pi\varepsilon \leq d \leq (s+1)\pi\varepsilon \quad (s \geq 0; b_0 = b),$$

wobei beide Gleichheitszeichen gleichzeitig anzuwenden sind.

Diese Resultate fassen wir zusammen in dem

Satz. Zwischen der Nullstelle $t_0 \in j$ und den Randwerten c, d einer Normalphase α der Differentialgleichung (q) bestehen je nach Typus und Art der Differentialgleichung (q):

I. *endlicher Typus (m), $m \geq 1$; a) allgemein, b) speziell;*

II. *unendlicher Typus; a) rechtsseitig oszillatorisch, b) linksseitig oszillatorisch, c) oszillatorisch,*

folgende Beziehungen:

I. *Die Randwerte c, d sind endlich.*

a) *Es gilt $(m-1)\pi\varepsilon \leq d - c \leq m\pi\varepsilon$ und ferner*

im Fall $m = 1$: $t_0 \in j$, $-\pi\varepsilon \leq c \leq 0 \leq d \leq \pi\varepsilon$;

im Fall $m \geq 2$:

$$a_r < t_0 \leq b_{-m+r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon;$$

$$(m-r-1)\pi\varepsilon \leq d \leq (m-r)\pi\varepsilon$$

oder

$$b_{-m+r+1} < t_0 \leq a_{r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon;$$

$$(m-r-2)\pi\varepsilon \leq d \leq (m-r-1)\pi\varepsilon.$$

b) Es gilt $d - c = m\pi\varepsilon$ und ferner

$$a_r < t_0 \leq a_{r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon; \quad d = c + m\pi\varepsilon.$$

II. Wenigstens einer von den Randwerten c, d ist unendlich.

a) $a_r < t_0 \leq a_{r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon; \quad d = \varepsilon\infty.$

b) $b_{-r-1} \leq t_0 < b_{-r}; \quad r\pi\varepsilon \leq d \leq (r+1)\pi\varepsilon; \quad c = -\varepsilon\infty.$

c) $t_0 \in j; \quad c = -\varepsilon\infty, \quad d = \varepsilon\infty.$

14. Randcharakteristiken der Normalphasen. Es sei α eine Normalphase der Differentialgleichung (q), $t_0 \in j$ ihre Nullstelle und c bzw. d ihr links- bzw. rechtsseitiger Randwert.

Die dreigliedrige Zahlenfolge $(t_0; c, d)$ nennen wir die *Randcharakteristik* der Normalphase α . Bezeichnung: $\chi(\alpha)$, kürzer: χ . Die c, d sind die *wesentlichen Glieder* von $\chi(\alpha)$. Wir sprechen gelegentlich auch dann von Zahlen c, d , wenn es sich um die Symbole $\pm\infty$ handelt.

Nach den obigen Resultaten bestehen zwischen den Gliedern von $\chi(\alpha)$, je nach dem Typus der Differentialgleichung (q), gewisse Beziehungen. Insbesondere haben wir für alle Typen von Differentialgleichungen (q): $\alpha(t_0) = 0$, $\operatorname{sgn} \alpha' = -\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} d$.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit durch diese Beziehungen die Normalphase α bestimmt ist.

Unter einem *charakteristischen Tripel* der Differentialgleichung (q) verstehen wir eine dreigliedrige Zahlenfolge $(\bar{t}_0; \bar{c}, \bar{d})$, deren Glieder die obigen, dem Typus und der Art der Differentialgleichung (q) entsprechenden Beziehungen (I.a)-II.c) erfüllen. Dabei ist natürlich $\bar{t}_0 \in j$, und als \bar{c}, \bar{d} sind auch die Symbole $\pm\infty$ zugelassen; $\varepsilon = \operatorname{sgn}(d - c)$.

Offenbar stellt die Randcharakteristik $\chi(\alpha)$ ein charakteristisches Tripel von (q) dar. Unsere Frage, die wir nun entscheiden wollen, ist die folgende: *Gibt es zu jedem charakteristischen Tripel χ der Differentialgleichung (q) Normalphasen mit der Randcharakteristik χ ? Wenn ja, so sollen alle solche Normalphasen bestimmt werden.*

15. Es sei $\chi = (t_0; c, d)$ ein charakteristisches Tripel der Differentialgleichung (q).

Wir nehmen an, daß es eine Normalphase α von (q) mit der Randcharakteristik χ tatsächlich gibt. Es sei (u_0, v_0) die durch die Anfangswerte

$$u_0(t_0) = 0, \quad u'_0(t_0) = -\operatorname{sgn} c; \quad v_0(t_0) = 1, \quad v'_0(t_0) = 0$$

bestimmte Basis der Differentialgleichung (q) und $\bar{\alpha}_0$ die an der Stelle t_0 verschwindende Phase von (u_0, v_0) : $\bar{\alpha}_0(t_0) = 0$. Offenbar ist $\bar{\alpha}_0$ eine Normalphase von (q), und es gilt $\operatorname{sgn} \bar{\alpha}'_0 = -\operatorname{sgn} c$. Wir bezeichnen mit $\chi(\bar{\alpha}_0) = (\bar{t}_0; \bar{c}_0, \bar{d}_0)$ die Randcharakteristik von $\bar{\alpha}_0$. Es gilt $-\operatorname{sgn} \bar{c}_0 = \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'_0 = -\operatorname{sgn} c$ und folglich $\operatorname{sgn} \bar{c}_0 = \operatorname{sgn} c$, $\operatorname{sgn} \bar{d}_0 = \operatorname{sgn} d$.

Nun sind aber die Funktionen $\alpha, \bar{\alpha}_0$ Phasen derselben Differentialgleichung (q).

Daraus folgt: Ist eine der Zahlen c , \bar{c}_0 bzw. d , \bar{d}_0 endlich, so gilt dies auch von der anderen.

Ferner besteht im Intervall j , mit Ausnahme der singulären Stellen von $\tan \alpha(t)$, $\tan \bar{\alpha}_0(t)$, die mit geeigneten Konstanten c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} gebildete Formel (§ 5, Nr. 17.4)

$$\tan \alpha(t) = \frac{c_{11} \tan \bar{\alpha}_0(t) + c_{12}}{c_{21} \tan \bar{\alpha}_0(t) + c_{22}}.$$

Nun ist $c_{12} = 0$, da beide Phasen α , $\bar{\alpha}_0$ an der Stelle t_0 verschwinden. Ferner ist offenbar $c_{22} \neq 0$, und man darf (da im Zähler und Nenner durch c_{22} dividiert werden darf) $c_{22} = 1$ annehmen. Folglich haben wir

$$\tan \alpha(t) = \frac{c_{11} \tan \bar{\alpha}_0(t)}{c_{21} \tan \bar{\alpha}_0(t) + 1}.$$

Diese Formel kann durch die folgende, für alle $t \in j$ gültige Beziehung ersetzt werden:

$$\sin \bar{\alpha}_0(t) \cdot [c_{11} \cos \alpha(t) - c_{21} \sin \alpha(t)] = \cos \bar{\alpha}_0(t) \sin \alpha(t).$$

Sind die Zahlen c , \bar{c}_0 bzw. d , \bar{d}_0 endlich, so ergibt diese Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \sin \bar{c}_0 \cdot [c_{11} \cos c - c_{21} \sin c] &= \cos \bar{c}_0 \cdot \sin c, \\ \sin \bar{d}_0 \cdot [c_{11} \cos d - c_{21} \sin d] &= \cos \bar{d}_0 \cdot \sin d. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wir sehen, daß die Konstanten c_{11} , c_{21} , je nach Typus und Art der Differentialgleichung (q), eine oder zwei lineare Gleichungen (35) erfüllen und durch die Randwerte c , \bar{c}_0 ; d , \bar{d}_0 in einem gewissen Maße bestimmt sind.

Wir wollen nun diesen Sachverhalt in den einzelnen Fällen genauer untersuchen.

Wir übernehmen die Bezeichnungen von Nr. 13. Insbesondere setzen wir $\varepsilon = \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'_0 = \operatorname{sgn} \alpha'$ und bezeichnen die 1-Grundfolgen, sofern sie existieren, mit $(a <) r_1 = a_1 < a_2 < \dots$, $(b >) s_1 = b_{-1} > b_{-2} > \dots$.

I. Endlicher Typus (m), $m \geq 1$:

$$c, d \text{ endlich, } (m-1)\pi\varepsilon \leq d - c \leq m\pi\varepsilon.$$

a) Allgemeiner Fall:

$$(m-1)\pi\varepsilon \leq d - c \leq m\pi\varepsilon. \quad (36)$$

1. $m = 1$: $\sin c \cdot \sin d \neq 0$, $t_0 \in j$, $\sin \bar{c}_0 \sin \bar{d}_0 \neq 0$.

2. $m \geq 2$:

α) $\sin c \cdot \sin d \neq 0$, $b_{-m+r+1} \neq t_0 \neq a_{r+1}$, $\sin \bar{c}_0 \sin \bar{d}_0 \neq 0$,

β) $\sin c \neq 0$, $\sin d = 0$; $t_0 = b_{-m+r+1} < a_{r+1}$; $\sin \bar{c}_0 \neq 0$, $\sin \bar{d}_0 = 0$,

γ) $\sin c = 0$, $\sin d \neq 0$; $b_{-m+r+1} < t_0 = a_{r+1}$; $\sin \bar{c}_0 = 0$, $\sin \bar{d}_0 \neq 0$.

In den Fällen 1 und 2 α) können die Gleichungen (35) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \cot c - c_{21} &= \cot \bar{c}_0, \\ c_{11} \cot d - c_{21} &= \cot \bar{d}_0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Wegen (36) haben wir $\cot c - \cot d \neq 0$.

Man sieht: Die Konstanten c_{11} , c_{21} sind eindeutig bestimmt.

In dem Fall 2 β) (2 γ)) kann die erste (zweite) Gleichung (35) durch die erste (zweite) Gleichung (37) ersetzt werden, während die zweite (erste) Gleichung (35) identisch erfüllt ist.

Man sieht: Von den Konstanten c_{11} , c_{21} ist eine unbestimmt.

b) Spezieller Fall:

$$d - c = m\pi\varepsilon = \bar{d}_0 - \bar{c}_0.$$

1. $m = 1$: $\sin c \cdot \sin d \neq 0$, $t_0 \in j$, $\sin \bar{c}_0 \cdot \sin \bar{d}_0 \neq 0$.

2. $m \geq 2$:

α) $\sin c \cdot \sin d \neq 0$; $a_r < t_0 < a_{r+1}$, $\sin \bar{c}_0 \cdot \sin \bar{d}_0 \neq 0$.

β) $\sin c = \sin d = 0$; $t_0 = a_{r+1}$, $\sin \bar{c}_0 = \sin \bar{d}_0 = 0$.

In den Fällen 1 und 2 α) sind die Gleichungen (35) voneinander linear abhängig und können durch eine der Gleichungen (37) ersetzt werden.

Man sieht: Von den Konstanten c_{11} , c_{21} ist eine unbestimmt.

Im Fall 2 β) sind die Gleichungen (35) identisch erfüllt:

Die Konstanten c_{11} , c_{21} sind beliebig.

II. Unendlicher Typus:

Wenigstens einer der Randwerte c , d ist unendlich.

a) Rechtsseitig oszillatorische Differentialgleichung:

$$-(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon; \quad d = \varepsilon\infty.$$

1. $\sin c \neq 0$, $a_r < t_0 < a_{r+1}$; $\sin \bar{c}_0 \neq 0$.

2. $\sin c = 0$, $t_0 = a_{r+1}$; $\sin \bar{c}_0 = 0$.

Wie man sieht, ist im Fall 1 eine von den Konstanten c_{11} , c_{21} unbestimmt, im Fall 2 sind beide beliebig.

b) Linksseitig oszillatorische Differentialgleichung:

$$s\pi\varepsilon \leq d \leq (s+1)\pi\varepsilon; \quad c = -\varepsilon\infty.$$

1. $\sin d \neq 0$, $b_{-s-1} < t_0 < b_{-s}$; $\sin \bar{d}_0 \neq 0$.

2. $\sin d = 0$, $t_0 = b_{-s-1}$; $\sin \bar{d}_0 = 0$.

Wie man sieht, ist im Fall 1 eine von den Konstanten c_{11} , c_{21} unbestimmt, im Fall 2 sind beide beliebig.

c) Oszillatorische Differentialgleichung:

$$t_0 \in j; \quad c = -\varepsilon\infty, \quad d = \varepsilon\infty.$$

In diesem Fall sind die Konstanten c_{11} , c_{21} beliebig.

Wir fassen zusammen:

Satz. Zu jedem charakteristischen Tripel $\chi = (t_0; c, d)$ der Differentialgleichung (q) gibt es Normalphasen von (q) mit der Randcharakteristik χ . Je nach Typus und Art der Differentialgleichung (q) und je nachdem, ob die Zahl t_0 ausgezeichnet ist oder nicht, gibt es genau eine Normalphase oder genau ein ein- oder zweiparametrisches System von Normalphasen der Differentialgleichung (q) mit der Randcharakteristik χ .

Es gibt genau eine Normalphase der Differentialgleichung (q) mit der Randcharakteristik χ , wenn (q) eine allgemeine Differentialgleichung entweder vom Typus (1) ist oder vom Typus (m), $m \geq 2$, wobei t_0 nicht ausgezeichnet ist.

Es gibt genau ∞^1 Normalphasen der Differentialgleichung (q) mit der Randcharakteristik χ , wenn (q) eine allgemeine Differentialgleichung vom Typus (m), $m \geq 2$, und t_0 ausgezeichnet ist, oder wenn die Differentialgleichung (q) speziell vom Typus (1) ist oder vom Typus (m), $m \geq 2$, wobei t_0 keine ausgezeichnete Zahl darstellt; ferner dann, wenn die Differentialgleichung (q) links- oder rechtsseitig oszillatorisch ist und die Zahl t_0 nicht ausgezeichnet ist.

Es gibt genau ∞^2 Normalphasen der Differentialgleichung (q) mit der Randcharakteristik χ , wenn (q) vom Typus (m), $m \geq 2$, speziell ist und t_0 eine ausgezeichnete Zahl darstellt; ferner dann, wenn die Differentialgleichung (q) links- oder rechtsseitig oszillatorisch ist und die Zahl t_0 ausgezeichnet ist; schließlich dann, wenn die Differentialgleichung (q) oszillatorisch ist.

16. Bestimmung des Typus und der Art der Differentialgleichung (q) durch die Randwerte einer Phase von (q). Wir wollen zeigen, daß durch die Randwerte einer Phase der Differentialgleichung (q) Typus und Art dieser letzteren eindeutig bestimmt sind.

Es sei (q) eine Differentialgleichung, α eine Phase von (q) und c bzw. d der links- bzw. rechtsseitige Randwert von α .

Satz. Sind die Zahlen c, d endlich, so ist die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$, und zwar allgemein mit $m = [|d - c| : \pi] + 1$ oder speziell mit $m = |d - c| : \pi$, je nachdem, ob die Zahl $|d - c|$ durch π nicht teilbar oder teilbar ist. Ist c endlich und d unendlich, so ist die Differentialgleichung (q) rechtsseitig oszillatorisch; ist c unendlich und d endlich, so ist (q) linksseitig oszillatorisch. Sind beide Zahlen c, d unendlich, so ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch.

Beweis. Wir nehmen zunächst die Zahlen c, d als endlich an.

In diesem Fall ist nach dem Satz von Nr. 13 die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 1$.

Wir wählen eine Zahl λ so, daß $c^* = c + \lambda$, $d^* = d + \lambda$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann sind c^*, d^* die Randwerte der Normalphase $\alpha^* = \alpha + \lambda$ von (q). t_0 sei die Nullstelle von α^* .

Ist die Differentialgleichung (q) allgemein, so haben wir nach dem Satz von Nr. 13

$$(m - 1) \pi \varepsilon \leq d^* - c^* \leq m \pi \varepsilon \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn}(d^* - c^*));$$

daraus folgt, daß $|d - c|$ durch π nicht teilbar ist und m den Wert $[|d - c| : \pi] + 1$ hat.

Ist die Differentialgleichung speziell, so gilt nach demselben Satz

$$d^* - c^* = m\pi\varepsilon;$$

in diesem Fall ist $|d - c|$ durch π teilbar, und m hat den Wert $|d - c| : \pi$.

Zweitens nehmen wir an, wenigstens eine von den Zahlen c, d sei unendlich.

In diesem Fall folgt die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar aus dem Satz von Nr. 13.

Insbesondere haben wir:

Eine Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geq 2$, ist allgemein oder speziell, je nachdem, ob für die Oszillation $O(\alpha)$ jeder ihrer Phase α

$$(m - 1)\pi < O(\alpha) < m\pi \quad \text{oder} \quad O(\alpha) = m\pi$$

gilt.

Nach der Definition von Nr. 2 gilt die Aussage auch für $m = 1$.

17. Eigenschaften der zweiten Phasen. Bei der Besprechung von Lokal- und Randeigenschaften der zweiten Phasen der Differentialgleichung (q) kommen analoge Begriffe und Methoden, die wir oben bei der Betrachtung der ersten Phasen angewendet haben, in Betracht. Aus diesem Grunde wollen wir uns kürzer fassen und nur einige diesbezügliche Begriffe und Resultate anführen. Wir nehmen von vornherein an, daß der Träger q der Differentialgleichung (q) im Intervall j stets von Null verschieden ist und unter Umständen weitere Eigenschaften besitzt. Insbesondere wollen wir daran erinnern, daß im Fall $q \in C_2$ die begleitende Differentialgleichung (\hat{q}_1) von (q) existiert und die ersten Phasen dieser Differentialgleichung (\hat{q}_1) die zweiten Phasen von (q) darstellen (§ 5, Nr. 11).

a) Satz von der eindeutigen Bestimmung einer zweiten Phase durch Cauchysche Anfangsbedingungen.

Es seien $t_0 \in j$; $Z_0, Z'_0 \neq 0, Z''_0$ beliebige Zahlen. Wir setzen die Existenz von $q'(t_0)$ voraus.

Es gibt genau eine zweite Phase β der Differentialgleichung (q), die an der Stelle t_0 die Cauchyschen Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\beta(t_0) = Z_0, \quad \beta'(t_0) = Z'_0, \quad \beta''(t_0) = Z''_0. \quad (38)$$

Diese Phase β ist in dem zweiten Phasensystem der Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) enthalten,

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \sin Z_0 \cdot u_0(t) + \frac{1}{q(t_0)} \left[Z'_0 \cos Z_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{q'(t_0)}{q(t_0)} - \frac{Z''_0}{Z'_0} \right) \sin Z_0 \right] v_0(t), \\ v(t) &= \cos Z_0 \cdot u_0(t) + \frac{1}{q(t_0)} \left[-Z'_0 \sin Z_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{q'(t_0)}{q(t_0)} - \frac{Z''_0}{Z'_0} \right) \cos Z_0 \right] v_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

wobei die u_0, v_0 die durch die Anfangswerte

$$u_0(t_0) = 0, \quad u'_0(t_0) = 1; \quad v_0(t_0) = 1, \quad v'_0(t_0) = 0$$

bestimmten Integrale von (q) sind.

b) Es sei β eine zweite Phase der Differentialgleichung (q).

Unter der obigen Annahme $q(t) \neq 0, t \in j$, ist β eine im Intervall $j (= (a, b))$ wachsende oder abnehmende Funktion. Der endliche oder unendliche Grenzwert

$$c' = \lim_{t \rightarrow a+} \beta(t) \quad \text{bzw.} \quad d' = \lim_{t \rightarrow b-} \beta(t)$$

heißt der *links-* bzw. *rechtsseitige Randwert* von β .

Die Umstände, unter denen diese Randwerte endlich sind oder nicht, sind denjenigen bei den ersten Phasen analog. Insbesondere gilt:

Besitzt die Differentialgleichung (q) 2-konjugierte Zahlen, so ist der Randwert c' (d') von β genau dann endlich, wenn die linksseitige (rechtsseitige) 2-Grundzahl r_2 (s_2) von (q) eigentlich ist.

Die Zahl $|c' - d'|$ wird die *Oszillation* der Phase β im Intervall j genannt. Bezeichnung: $O(\beta|j)$, kürzer: $O(\beta)$.

c) Die linksseitigen (rechtsseitigen) Randwerte der zweiten Phasen einer linksseitigen (rechtsseitigen) Hauptbasis 2. Art der Differentialgleichung (q) sind genau die ganzzahligen Vielfachen der Zahl π .

Die rechtsseitigen (linksseitigen) Randwerte der zweiten Phasen einer 2-Hauptbasis, deren erstes Glied ein linksseitiges (rechtsseitiges) 2-Grundintegral ist, sind genau die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

d) Analog wie bei den ersten Phasen definiert man die zweiten Normalphasen der Differentialgleichung (q) und ihre Randcharakteristiken. Über die Struktur der Menge ausgezeichneter zweiter Normalphasen und über die Bestimmung der zweiten Normalphasen durch ihre Randcharakteristiken gelten im Vergleich mit den ersten Phasen analoge Resultate (Nr. 9–15).

18. Beziehungen zwischen den Randwerten einer ersten und zweiten Phase derselben Basis. Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q) und α, β eine erste bzw. zweite Phase von (u, v) . Wir wählen diese Phasen so, daß sie im Intervall j die Beziehung

$$0 < \beta(t) - \alpha(t) < \pi \tag{40}$$

erfüllen. Es geht also um zwei benachbarte Phasen des gemischten Phasensystems von (u, v) (§ 5, Nr. 14).

Wir wissen, daß die mit beliebigen Konstanten k_1, k_2 gebildeten Funktionen

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= k_1 \frac{\sin [\alpha(t) + k_2]}{V|\alpha'(t)|}, \\ y'(t) &= \pm k_1 \frac{\sin [\beta(t) + k_2]}{V|\beta'(t)|} \sqrt{|q(t)|} \end{aligned} \right\} \tag{41}$$

das allgemeine Integral von (q) und seine Ableitung darstellen.

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Funktion q im Intervall j stets negativ ist. Dann wachsen beide Phasen α, β oder beide nehmen ab: $\text{sgn } \alpha' \text{sgn } \beta' = 1$.

Es seien c, c' bzw. d, d' die links- bzw. rechtsseitigen Randwerte von α, β . Wir wissen, daß die beiden Zahlen c, c' und desgleichen d, d' gleichzeitig endlich sind oder nicht.

Wir betrachten den ersten Fall und nehmen folglich an, daß die Randwerte c, c' bzw. d, d' endlich sind.

Dann folgt aus (40)

$$0 \leq c' - c \leq \pi \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq d' - d \leq \pi.$$

Wir wollen beweisen:

Die Beziehung $c' = c$ ($d' = d$) gilt genau dann, wenn die linksseitige (rechtsseitige) 3-Grundzahl r_3 (s_3) von (q) uneigentlich ist. In diesem Fall hat man also die in § 3, Nr. 8 beschriebene Situation: $a = r_3, r_4 = r_2 < r_1$ ($b = s_3, s_4 = s_2 > s_1$).

Die Beziehung $c' = c + \pi$ ($d' = d + \pi$) gilt genau dann, wenn die linksseitige (rechtsseitige) 4-Grundzahl r_4 (s_4) von (q) uneigentlich ist. In diesem Fall haben wir $a = r_4, r_3 = r_1 < r_2$ ($b = s_4, s_3 = s_1 > s_2$).

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis der Aussagen z. B. über die linksseitigen Randwerte c, c' .

Zunächst sei bemerkt, daß jede der Beziehungen $c' = c, c' = c + \pi$ gegenüber einer beliebigen Schiebung $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda, \bar{\beta}(t) = \beta(t) + \lambda$ der Phasen α, β invariant ist (λ beliebig). Man kann insbesondere $\lambda = -c$ wählen und folglich ohne Verlust an Allgemeinheit $c = 0$ voraussetzen. Ferner nehmen wir z. B. $\text{sgn } \alpha' = \text{sgn } \beta' = 1$ an.

a) Es sei $c' = c = 0$. Wir wählen eine Zahl $x \in j$. Es ist zu zeigen, daß es eine mit x linksseitig 3-konjugierte Zahl gibt.

Wegen $c = 0$ und $\text{sgn } \alpha' = 1$ haben wir $\alpha(x) > 0$.

Wir wählen in den Formeln (41) die Konstanten k_1, k_2 folgendermaßen: $k_1 = 1, k_2 = -\alpha(x)$. Dann haben wir ein an der Stelle x verschwindendes Integral y von (q) und seine Ableitung y' .

Nach (40) gilt die Ungleichung

$$\beta(x) - \alpha(x) > 0. \quad (42)$$

Wegen $c' = 0$ und $\text{sgn } \beta' = 1$ besteht für alle $t \in j$ in einer rechtsseitigen Umgebung von a die Ungleichung $\beta(t) < \frac{1}{2} \alpha(x)$, und folglich ist auch

$$\beta(t) - \alpha(x) < 0. \quad (43)$$

Aus (42) und (43) schließen wir: Die links in (43) stehende Funktion von t nimmt an einer Stelle $t_0 \in (a, x)$ den Wert 0 an. Die Zahl t_0 ist offenbar eine Nullstelle von y' und stellt folglich eine mit x linksseitig 3-konjugierte Zahl dar.

b) Es sei $a = r_3$. Dann gibt es zu jeder Zahl $x \in j$ eine mit ihr linksseitig 3-konjugierte Zahl. Es ist zu zeigen, daß $c' = 0$ gilt.

Wir nehmen an, es sei $c' > 0$ und wählen eine der Ungleichung $\alpha(x) < \frac{1}{2} c'$ genügende Zahl $x \in j$; wegen $c = 0$ und $\text{sgn } \alpha' = 1$ ist eine solche Wahl möglich.

Ferner wählen wir in den Formeln (41) die Konstanten k_1, k_2 wie folgt: $k_1 = 1, k_2 = -\alpha(x)$. Dann haben wir ein an der Stelle x verschwindendes Integral y von (q) und seine Ableitung y' .

Nun gilt aber nach der Bedeutung von c' und wegen $\text{sgn } \beta' = 1$ an jeder Stelle $t \in (a, x)$

$$0 < \frac{1}{2} c' = c' - \frac{1}{2} c' < \beta(t) - \alpha(x) < \beta(x) - \alpha(x) < \pi,$$

also $0 < \beta(t) - \alpha(x) < \pi$.

Wie man sieht, hat die Ableitung y' von y links von x keine Nullstelle. Folglich gibt es keine mit x linksseitig 3-konjugierte Zahl, und wir haben einen Widerspruch.

c) Es sei $c' = \pi$. Wir wählen eine Zahl $x \in j$. Es ist zu zeigen, daß es eine mit x linksseitig 4-konjugierte Zahl gibt.

Wegen $c' = \pi$ und $\operatorname{sgn} \beta' = 1$ haben wir $\beta(x) > \pi$.

Wir wählen in den Formeln (41) die Konstanten k_1, k_2 : $k_1 = 1, k_2 = -\beta(x)$. Dann haben wir ein Integral y von (q), dessen Ableitung y' an der Stelle x verschwindet.

Nach (40) gilt die Ungleichung

$$\alpha(x) - \beta(x) > -\pi. \quad (44)$$

Wegen $c = 0$ und $\operatorname{sgn} \alpha' = 1$ besteht für alle t in einer linksseitigen Umgebung von a die Ungleichung $\alpha(t) < \frac{1}{2}(\beta(x) - \pi)$, und folglich gilt auch

$$\alpha(t) - \beta(x) < -\pi. \quad (45)$$

Aus (44) und (45) schließen wir: Die links in (45) stehende Funktion von t nimmt an einer Stelle $t_0 \in (a, x)$ den Wert $-\pi$ an. Die Zahl t_0 ist offenbar eine Nullstelle von y und stellt folglich eine mit x linksseitig 4-konjugierte Zahl dar.

d) Es sei $a = r_4$. Dann gibt es zu jeder Zahl $x \in j$ eine mit ihr linksseitig 4-konjugierte Zahl. Es ist zu zeigen, daß $c' = \pi$ ist.

Wir nehmen an, es sei $c' < \pi$ und wählen eine der Ungleichung $c' < \beta(x) < \pi$ genügende Zahl $x \in j$; wegen $c' < \pi$ und $\operatorname{sgn} \beta' = 1$ ist eine solche Wahl möglich.

Ferner wählen wir in den Formeln (41) die Konstanten k_1, k_2 wie folgt: $k_1 = 1, k_2 = -\beta(x)$. Dann haben wir ein Integral y von (q), dessen Ableitung y' an der Stelle x verschwindet.

Nun gilt aber wegen $c = 0$ und $\operatorname{sgn} \alpha' = 1$ an jeder Stelle $t \in (a, x)$

$$-\pi < \alpha(t) - \pi < \alpha(t) - \beta(x) < \alpha(x) - \beta(x) < 0,$$

also $-\pi < \alpha(t) - \beta(x) < 0$.

Das Integral y hat demnach links von x keine Nullstelle. Folglich gibt es keine mit x linksseitig 4-konjugierte Zahl, und wir haben einen Widerspruch.

§ 8. Elementare Phasen

In diesem Paragraphen werden wir Phasen mit gewissen speziellen Eigenschaften, die sogenannten elementaren Phasen betrachten. Im Laufe unserer Überlegungen werden wir öfter diesen Phasen begegnen. Um die Betrachtungen möglichst einfach zu gestalten, wollen wir den Begriff der elementaren Phase in engerem, unseren Zwecken aber vollkommen entsprechendem Sinne einführen. In diesem Zusammenhang setzen wir in diesem Paragraphen voraus, daß die Längen der Definitionsintervalle $j = (a, b)$ der zu betrachtenden Differentialgleichungen (q) stets größer als π sind: $b - a > \pi$. Diese Voraussetzung kommt natürlich nur für beschränkte Intervalle j zur Geltung, da sie für unbeschränkte Intervalle j von selbst erfüllt ist: $b - a = \infty$. Ferner setzen wir in allen Betrachtungen

tungen über die *zweiten* Phasen voraus, daß der entsprechende Träger q im Intervall j stets negativ ist: $q(t) < 0$, $t \in j$.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (q).

1. Einleitung. Eine erste oder zweite Phase $\gamma(t)$ von (q) nennen wir *elementar*, wenn für je zwei im Intervall j liegende Werte t , $t + \pi$ die Beziehung

$$\gamma(t + \pi) = \gamma(t) + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn} \gamma') \quad (1)$$

besteht. Wir sprechen auch gelegentlich von elementaren Phasen des Trägers q .

Beispielsweise sind die erste und zweite Phase des Trägers $q(t) = -1$, $\alpha(t) = t$ und $\beta(t) = \frac{\pi}{2} + t$, elementar.

Es sei $\gamma(t)$ eine elementare erste oder zweite Phase von (q).

Wie man sieht, ist die Phase γ in der Form

$$\gamma(t) = \varepsilon t + G(t) \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn} \gamma')$$

darstellbar, wobei $G(t)$, $t \in j$, eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften bedeutet:

1. G ist mit π periodisch,
2. $G \in C_3$ oder $G \in C_1$, je nachdem, ob γ eine erste oder zweite Phase ist,
3. $\operatorname{sgn}[\varepsilon + G'(t)] = \varepsilon$ für alle $t \in j$.

Ferner erhalten wir aus (1) und wegen der Monotonie von γ :

Die Werte $\gamma(t)$, $\gamma(t + \pi)$ sind entweder beide ganzzahlige Vielfache von π oder beide sind es nicht. Im ersten Fall gibt es zwischen den Zahlen t , $t + \pi$ keine, im zweiten aber genau eine Stelle, an der die Funktion γ den Wert eines ganzzahligen Vielfachen von π annimmt.

Weitere Eigenschaften sind:

Jede Phase des vollständigen Phasensystems $[\gamma]$, also jede Phase von der Form $\gamma(t) + \lambda$, λ beliebig, ist ebenfalls elementar.

Die Ableitung γ' ist eine mit π periodische Funktion.

2. Nun kommen wir zu dem folgenden

Satz. *Alle ersten bzw. zweiten Phasen der Differentialgleichung (q) sind elementar, wenn nur eine erste bzw. zweite Phase von (q) diese Eigenschaft besitzt.*

Beweis. Wir nehmen an, daß z. B. eine erste Phase α_0 der Differentialgleichung (q) elementar ist. Es sei α eine beliebige erste Phase von (q). Dann besteht für alle $t \in j$ mit Ausnahme von singulären Stellen der Funktionen $\tan \alpha_0(t)$, $\tan \alpha(t)$ eine Formel wie in § 5, (39), wobei α bzw. α_0 statt $\bar{\alpha}$ bzw. α zu lesen ist und die c_{ij} geeignete Konstanten bedeuten. Nimmt man in dieser Formel beiderseits den Wert an zwei Stellen t , $t + \pi \in j$, so ergibt sich $\tan \alpha(t + \pi) = \tan \alpha(t)$ und folglich $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + n\pi$, $0 \neq n$ ganz. Wir haben zu zeigen, daß $|n| = 1$ ist.

Zu diesem Zwecke wählen wir zwei beliebige Werte x , $x + \pi \in j$ und betrachten die folgenden (ersten) Phasen von (q):

$$\bar{\alpha}_0(t) = \alpha_0(t) - \alpha_0(x), \quad \bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha(x).$$

Zunächst sehen wir, daß die Phasen $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}$ die gemeinsame Nullstelle x besitzen. Daraus folgt, daß die Integrale

$$y(t) = \sin \bar{\alpha}_0(t) : \sqrt{|\bar{\alpha}'_0(t)|}, \quad \bar{y}(t) = \sin \bar{\alpha}(t) : \sqrt{|\bar{\alpha}'(t)|}$$

der Differentialgleichung (q) an der Stelle x verschwinden und folglich alle Nullstellen gemeinsam haben.

Ferner ist offenbar die Phase $\bar{\alpha}_0$ elementar; wir haben also

$$\bar{\alpha}_0(x) = 0, \quad \bar{\alpha}_0(x + \pi) = \pi \cdot \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'_0; \quad y(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \in (x, x + \pi).$$

Für die Phase $\bar{\alpha}$ gelten die Beziehungen

$$\bar{\alpha}(x) = 0, \quad \bar{\alpha}(x + \pi) = |n| \pi \cdot \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'.$$

Ist $|n| \neq 1$, so nimmt die Funktion $\bar{\alpha}$ an einer Stelle $t_0 \in (x, x + \pi)$ den Wert $\pi \cdot \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'$ an. In diesem Fall ist t_0 eine Nullstelle von \bar{y} und folglich auch eine solche von y . Dies ist jedoch nicht möglich, da nach dem Obigen das Integral y im Intervall $(x, x + \pi)$ stets von Null verschieden ist. Wir haben also $|n| = 1$, und der Beweis ist beendet.

Nach diesem Satz sind bei einer Differentialgleichung (q) entweder alle ersten (zweiten) Phasen elementar oder keine von ihnen. Eine Differentialgleichung (q), deren erste (zweite) Phasen elementar sind, wollen wir *Differentialgleichung mit elementaren ersten (zweiten) Phasen* nennen, und dieselbe Benennung übertragen wir auf den entsprechenden Träger. Gelegentlich sprechen wir auch von elementaren Differentialgleichungen und Trägern bezüglich der ersten (zweiten) Phasen.

Es sei nun (q) eine Differentialgleichung mit elementaren *ersten (zweiten) Phasen*.

Welche Eigenschaften haben die *zweiten (ersten) Phasen* von (q)?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir eine erste und zweite Phase α und β derselben Basis von (q). Zwischen den Phasen α, β besteht also eine Beziehung wie in § 5, (34), und aus ihr folgt für je zwei Werte $t, t + \pi \in j$

$$\begin{aligned} \beta(t + \pi) - \beta(t) - \varepsilon\pi &= \alpha(t + \pi) - \alpha(t) - \varepsilon\pi \\ &+ \operatorname{Arccot} \left[\frac{1}{2} (1 : \alpha'(t + \pi))' \right] - \operatorname{Arccot} \left[\frac{1}{2} (1 : \alpha'(t))' \right] \quad (2) \\ &(\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'). \end{aligned}$$

Ist die Phase α elementar, so ist α' und folglich auch $\operatorname{Arccot} [\frac{1}{2} (1 : \alpha')']$ eine mit π periodische Funktion, und die Formel (2) ergibt, daß auch die Phase β elementar ist.

Ist umgekehrt die Phase β elementar, so ist die linke Seite von (2) identisch Null, und man sieht, daß die Phase α dann und nur dann elementar ist, wenn die Funktion $(1 : \alpha)'$ mit π periodisch ist.

Wir fassen zusammen:

Bei einer Differentialgleichung (q) mit elementaren ersten Phasen sind auch die zweiten Phasen elementar.

Bei einer Differentialgleichung (q) mit elementaren zweiten Phasen sind die ersten Phasen α dann und nur dann elementar, wenn die aus ihnen gebildeten Funktionen $(1 : \alpha)'$ mit π periodisch sind.

3. Eigenschaften von Integralen und ihren Ableitungen bei Differentialgleichungen (q) mit elementaren Phasen. Die Integrale bzw. ihre Ableitungen der Differentialgleichungen (q) mit elementaren ersten bzw. zweiten Phasen zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus, die wir nun untersuchen wollen. In unseren Überlegungen werden wir uns hauptsächlich mit Differentialgleichungen (q) mit elementaren ersten Phasen befassen. Für die Differentialgleichungen (q) mit elementaren zweiten Phasen werden wir uns mit Anführung der Resultate begnügen.

Wir zeigen:

Ist die Differentialgleichung (q) bezüglich ihrer ersten Phasen elementar, so sind die Werte eines jeden Integrals y von (q) an zwei beliebigen Stellen $t, t + \pi \in j$ entgegengesetzt, also

$$y(t + \pi) = -y(t). \quad (3)$$

In der Tat, nehmen wir an, die ersten Phasen von (q) seien elementar. Wir betrachten ein Integral y und eine erste Phase α von (q). Dann gilt bei geeigneter Wahl der Konstanten k_1, k_2 eine Formel wie die erste Formel in § 5, (27). Da die Phase α elementar ist, stellt α' eine mit π periodische Funktion dar. Folglich gilt an zwei beliebigen Stellen $t, t + \pi \in j$ die Beziehung (3).

Ferner gilt der

Satz. Die Differentialgleichung (q) ist bezüglich ihrer ersten Phasen elementar dann und nur dann, wenn je zwei Zahlen $t, t + \pi \in j$ 1-konjugierte benachbarte Zahlen darstellen.

Beweis. a) Die Differentialgleichung (q) sei in bezug auf ihre ersten Phasen elementar.

Es seien $t, t + \pi \in j$ beliebige Zahlen. Wir wählen eine erste Phase α und ein in t verschwindendes Integral y von (q). Dann haben wir eine Formel wie in § 5, (27), wobei $\alpha(t) + k_2 = n\pi$, n ganz, ist. Da die Phase α elementar ist, haben wir $\alpha(t + \pi) + k_2 = (n + \varepsilon)\pi$, $\varepsilon = \text{sgn } \alpha'$, und es gibt zwischen den Zahlen $t, t + \pi$ keine Stelle, an der die Funktion $\alpha + k_2$ den Wert eines ganzzahligen Vielfachen von π annimmt. Folglich ist $t + \pi$ eine, und zwar die erste nach t folgende Nullstelle von y .

b) Zwei beliebige Zahlen $t, t + \pi \in j$ seien miteinander 1-konjugiert und benachbart.

Wir betrachten eine erste Phase α von (q). Es seien $t, t + \pi \in j$ beliebige Zahlen, und sei y ein in t verschwindendes Integral von (q). Dann haben wir eine Formel wie in § 5, (27), wobei $\alpha(t) + k_2 = n\pi$, n ganz, ist. Nach unserer Annahme ist $t + \pi$ eine, und zwar die erste nach t folgende Nullstelle von y ; daraus folgt $\alpha(t + \pi) + k_2 = (n + \varepsilon)\pi$, $\varepsilon = \text{sgn } \alpha'$. Wir haben also $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \varepsilon\pi$, w. z. b. w.

Der soeben bewiesene Satz kann offenbar auch so formuliert werden:

Die Differentialgleichung (q) ist in bezug auf ihre ersten Phasen elementar dann und nur dann, wenn die Nullstellen aller ihrer Integrale π -äquidistant ver-

teilt sind, d. h., wenn zwei benachbarte Nullstellen stets denselben Abstand π haben.

Wir wollen noch die folgende Eigenschaft einer Differentialgleichung (q) mit elementaren ersten Phasen im Fall $b - a > 2\pi$ erwähnen:

Die Integrale einer solchen Differentialgleichung (q) sind periodische Funktionen mit der Grundperiode 2π .

In der Tat, zunächst sieht man aus (3), daß die Integrale von (q) mit 2π periodisch sind. Für die Grundperiode $p > 0$ eines Integrals y von (q) haben wir $0 < p \leq 2\pi$. Ist $p < 2\pi$, so gilt für geeignete Werte $t, t + p \in j$ die Ungleichung $y(t)y(t + p) < 0$, und dies widerspricht der Definition von p .

Analoge Eigenschaften haben die Differentialgleichungen (q) mit (stets negativen Trägern und) elementaren zweiten Phasen:

Ist die Differentialgleichung (q) in bezug auf ihre zweiten Phasen elementar, so besteht für die Werte der Ableitung y' jedes Integrals y von (q) an zwei beliebigen Stellen $t, t + \pi$ die Beziehung

$$\frac{y'(t + \pi)}{\sqrt{|q(t + \pi)|}} = - \frac{y'(t)}{\sqrt{|q(t)|}}. \quad (4)$$

Die Differentialgleichung (q) ist in bezug auf ihre zweiten Phasen elementar dann und nur dann, wenn je zwei Zahlen $t, t + \pi \in j$ 2-konjugierte benachbarte Zahlen darstellen.

Die Differentialgleichung (q) ist in bezug auf ihre zweiten Phasen elementar dann und nur dann, wenn die Nullstellen der Ableitungen aller ihrer Integrale π -äquidistant verteilt sind.

Bei einer Differentialgleichung (q) mit elementaren zweiten Phasen sind im Fall $b - a > 2\pi$ die mit Hilfe von beliebigen Integralen y der Differentialgleichung (q) gebildeten Funktionen $y'(t): \sqrt{|q(t)|}$ periodisch mit der Grundperiode 2π .

Wir wissen, daß bei einer Differentialgleichung (q) mit elementaren ersten Phasen auch die zweiten Phasen elementar sind (Nr. 2). Daraus und aus den obigen Ergebnissen schließen wir:

Bei einer Differentialgleichung (q) mit (einem stets negativen Träger q und) elementaren ersten Phasen sind die Nullstellen sowie die Abszissen der Extremwerte der Integrale von (q) π -äquidistant verteilt.

4. Bestimmung aller Träger mit elementaren ersten Phasen. Unsere Erkenntnisse über elementare Phasen ermöglichen es, alle Träger mit elementaren ersten Phasen explizit zu bestimmen. Wir wollen der Kürze halber in Nr. 4-7 von Phasen und elementaren Trägern anstatt von ersten Phasen und Trägern mit elementaren ersten Phasen sprechen.

Nach Nr. 1 ist jede elementare Phase α einer Differentialgleichung (q) in der Form

$$\alpha(t) = \varepsilon t + A(t) \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha') \quad (5)$$

mit Hilfe einer Funktion $A(t)$, $t \in j$, mit den folgenden Eigenschaften darstellbar:

1. A ist mit π periodisch,
2. $A \in C_3$,
3. $\operatorname{sgn}[\varepsilon + A'(t)] = \varepsilon$ für alle $t \in j$.

Aus § 5, Nr. 5, wissen wir, daß durch die Phase α der Träger q eindeutig bestimmt ist, und zwar im Sinne der Formel § 5, (16), also

$$q(t) = -\frac{1}{2} \frac{A'''(t)}{\varepsilon + A'(t)} + \frac{3}{4} \frac{A''^2(t)}{(\varepsilon + A'(t))^2} - (\varepsilon + A'(t))^2. \quad (6)$$

Wählt man umgekehrt $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ und eine beliebige Funktion $A(t)$, $t \in j$, mit den obigen Eigenschaften 1-3, so stellt die nach (5) definierte Funktion α eine Phasenfunktion dar (§ 5, Nr. 7) mit der Eigenschaft $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \varepsilon\pi$. Folglich ist diese Funktion eine elementare Phase des vermöge der Formel (6) bestimmten Trägers q .

Somit haben wir alle elementaren Träger im Intervall j bestimmt:

Alle elementaren Träger q im Intervall j sind durch die Formel (6) bestimmt; ε bedeutet $+1$ oder -1 , und A stellt eine beliebige Funktion im Intervall j mit den obigen Eigenschaften 1-3 dar.

5. Im Hinblick auf unsere späteren Überlegungen wollen wir nun Differentialgleichungen (q) mit elementaren Phasen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ betrachten. Aus (5) sehen wir, daß jede Phase einer solchen Differentialgleichung (q) von unten und von oben unbeschränkt ist. Daraus folgt (§ 5, Nr. 4), daß die Differentialgleichungen (q) mit elementaren Phasen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ oscillatorisch sind. Die entsprechenden Träger q sind natürlich durch die Formel (6) bestimmt.

Ein für unsere Zwecke nützliches Beispiel eines Systems von elementaren Trägern q im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ ist durch die folgende Formel gegeben (F. NEUMAN [53]):

$$q(t|c) = \frac{\sin 4(t-c) + \frac{1}{3} \sin^4(t-c)}{\left(1 - \frac{1}{3} \sin 2(t-c) \cdot \sin^2(t-c)\right)^2} - 1; \quad (7)$$

c bedeutet eine beliebige Konstante.

Dieses System ergibt sich aus der Formel (6) bei der folgenden Wahl der Funktion $A(t)$:

$$A(t) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{6} \cos 2(t-c) - \cot(t-c)\right) - t + \nu\pi & \text{für } t \in (c + \nu\pi, c + (\nu+1)\pi), \\ -\frac{\pi}{2} - c & \text{für } t = \nu\pi; \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

\arctan bezeichnet den im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegenden Zweig dieser Funktion.

Später (§ 15, Nr. 8) werden wir zu diesem Trägersystem auf einem anderen Wege gelangen.

Man stellt leicht fest, daß je zwei durch verschiedene Werte $c_1, c_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ bestimmte elementare Träger $q(t|c_1)$, $q(t|c_2)$ des Systems (7) voneinander verschiedene Funktionen darstellen. Daraus folgt:

Das System der elementaren Träger (7) hat die Mächtigkeit des Kontinuums, \aleph .

6. Wir wollen nun die Mächtigkeit der Menge aller elementaren Träger im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ bestimmen.

Es sei E diese Menge. Da die Elemente von E vermöge beliebiger mit π periodischer Funktionen A von der Klasse C_3 im Sinne der Formel (6) bestimmt sind, ist vorauszusehen, daß die Mächtigkeit von E gleich \aleph ist. Daß dies tatsächlich zutrifft, läßt sich folgendermaßen beweisen:

Das obige durch die Formel (7) gegebene System von elementaren Trägern stellt eine Untermenge von E dar. Da es die Mächtigkeit \aleph besitzt, ist $\text{card } E \geq \aleph$. Ferner sind die Elemente von E stetige Funktionen im Intervall j . Daraus folgt $\text{card } E \leq \aleph$. Also:

Die Mächtigkeit der Menge aller elementaren Träger im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ ist gleich der Mächtigkeit des Kontinuums, \aleph .

7. Verallgemeinerung des Begriffes von elementaren Phasen. Wir wollen diesen Paragraphen mit der folgenden Bemerkung abschließen.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (\bar{q}) im Intervall $\bar{j} = (\bar{a}, \bar{b})$.

Es seien $c > 0, k > 0$ beliebige Zahlen und $\bar{b} - \bar{a} > c$.

Eine erste oder zweite Phase $\bar{\gamma}(t)$ von (\bar{q}) nennen wir *quasielementar*, wenn für je zwei im Intervall \bar{j} liegende Werte $t, t + c$ die Beziehung

$$\bar{\gamma}(t + c) = \bar{\gamma}(t) + \varepsilon k \quad (\varepsilon = \text{sgn } \bar{\gamma}')$$

besteht.

Man rechnet leicht nach, daß die vermöge einer quasielementaren Phase $\bar{\gamma}$ von (\bar{q}) im Intervall (a, b) , $a = (c : \pi) \bar{a}$, $b = (c : \pi) \bar{b}$, definierte Funktion

$$\gamma(t) = \frac{\pi}{k} \bar{\gamma}\left(\frac{c}{\pi} t\right)$$

die Beziehung $\gamma(t + \pi) = \gamma(t) + \varepsilon \pi$ ($\varepsilon = \text{sgn } \gamma'$) erfüllt.

Ist $\bar{\gamma}$ ($= \bar{\alpha}$) eine erste quasielementare Phase von (\bar{q}) , so ist die Funktion γ ($= \alpha$) aus der Klasse C_3 , und es gilt, im Hinblick auf die Formel § 1, (17),

$$\{\alpha, t\} = \frac{c^2}{\pi^2} \left\{ \bar{\alpha}, \frac{c}{\pi} t \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (q(t) =) -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) &= \frac{c^2}{\pi^2} \left[-\left\{ \bar{\alpha}, \frac{c}{\pi} t \right\} - \bar{\alpha}'^2\left(\frac{c}{\pi} t\right) \right] \\ &+ c^2 \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{k^2} \right) \bar{\alpha}'^2\left(\frac{c}{\pi} t\right) = \frac{c^2}{\pi^2} \bar{q}\left(\frac{c}{\pi} t\right) + c^2 \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{k^2} \right) \bar{\alpha}'^2\left(\frac{c}{\pi} t\right). \end{aligned}$$

Wir sehen also:

Ist $\bar{\alpha}(t)$ eine erste quasielementare Phase des Trägers $\bar{q}(t)$ im Intervall (\bar{a}, \bar{b}) , so stellt die Funktion

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{k} \bar{\alpha}\left(\frac{c}{\pi} t\right)$$

im Intervall (a, b) , $a = (c : \pi) \bar{a}$, $b = (c : \pi) \bar{b}$ eine erste elementare Phase des Trägers

$$q(t) = \frac{c^2}{\pi^2} \bar{q} \left(\frac{c}{\pi} t \right) + c^2 \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{k^2} \right) \bar{\alpha}'^2 \left(\frac{c}{\pi} t \right)$$

dar.

§ 9. Beziehungen zwischen ersten Phasen zweier Differentialgleichungen (q), (Q)

1. Einleitung. Wir betrachten zwei Differentialgleichungen (q), (Q) in den Intervallen $j = (a, b)$, $J = (A, B)$.

Unsere Überlegungen werden im allgemeinen von Typus und Art der Differentialgleichungen (q), (Q) abhängen. Falls diese Differentialgleichungen links- bzw. rechtsseitige 1-Grundfolgen zulassen, so wollen wir diese letzteren mit

$$(a <) a_1 < a_2 < \dots \quad \text{bzw.} \quad (b >) b_{-1} > b_{-2} > \dots$$

und

$$(A <) A_1 < A_2 < \dots \quad \text{bzw.} \quad (B >) B_{-1} > B_{-2} > \dots$$

bezeichnen.

2. Verknüpfte Phasen. Es seien α, A beliebige (erste) Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q) und c, d bzw. C, D ihre Randwerte.

Wir nennen die Phasen α, A *verknüpft*, wenn die folgenden Beziehungen gleichzeitig bestehen:

$$\min(c, d) < \max(C, D); \quad \min(C, D) < \max(c, d). \quad (1)$$

Wir zeigen, daß die Phasen α, A dann und nur dann gemeinsame Werte annehmen, wenn sie verknüpft sind. Mit anderen Worten, die Beziehung $\alpha(j) \cap A(J) \neq \emptyset$ und die Ungleichungen (1) bestehen gleichzeitig.

Beweis. a) Ist z. B. die erste Ungleichung (1) nicht erfüllt, so sind die Zahlen c, d größer oder gleich jeder der Zahlen C, D . Daraus folgt $\alpha(t) > A(T)$ für alle $t \in j, T \in J$.

b) Aus (1) folgt $\min(C, D) \leq \min(c, d) < \max(C, D)$ oder $\min(c, d) < \min(C, D) < \max(c, d)$. Im ersten Fall gilt $\min(C, D) < \alpha(t) < \max(C, D)$ an einer Stelle $t \in j$ und ferner, da die Funktion A im Intervall J alle Werte zwischen $\min(C, D)$ und $\max(C, D)$ durchläuft, $\alpha(t) = A(T)$, wobei $T \in J$ eine geeignete Zahl ist. Im zweiten Fall haben wir $\min(c, d) < A(T) < \max(c, d)$ an einer Stelle $T \in J$ und ferner, ähnlich wie oben, $A(T) = \alpha(t)$ mit einer geeigneten Zahl $t \in j$.

Wir wollen nun im folgenden voraussetzen, daß die Phasen α, A verknüpft sind. Dann stellt

$$L = \alpha(j) \cap A(J) \quad (2)$$

ein (offenes) Intervall dar. Dasselbe ist offenbar der Wertevorrat der Funktion α in einem (offenen) Intervall $k (\subset j)$ und zugleich ein solcher von A in einem (offenen) Intervall $K (\subset J)$: $L = \alpha(k) = A(K)$.

Wir wollen die Intervalle

$$k = \alpha^{-1}(L), \quad K = \mathbf{A}^{-1}(L) \quad (3)$$

bestimmen.

Es seien \bar{c}, \bar{d} bzw. \bar{C}, \bar{D} die normierten Randwerte der Phasen α bzw. \mathbf{A} und ferner \bar{a}, \bar{b} bzw. \bar{A}, \bar{B} die normierten Endpunkte der Intervalle j bzw. J in bezug auf diese Phasen (§ 7, Nr. 3).

Dann haben wir

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \bar{a}} \alpha(t) &= \bar{c}, & \lim_{t \rightarrow \bar{b}} \alpha(t) &= \bar{d}, \\ \lim_{T \rightarrow \bar{A}} \mathbf{A}(T) &= \bar{C}, & \lim_{T \rightarrow \bar{B}} \mathbf{A}(T) &= \bar{D} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und ferner

$$\bar{c} < \bar{d}, \quad \bar{C} < \bar{D}. \quad (5)$$

Die Ungleichungen (1) können wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{c} < \bar{D}, \quad \bar{C} < \bar{d}. \quad (6)$$

Nun sind im Hinblick auf die Beziehungen (5), (6) genau die folgenden fünf Fälle möglich:

- 1°. $\bar{C} \leq \bar{c} < \bar{D} < \bar{d}$, also $L = (\bar{c}, \bar{D})$;
- 2°. $\bar{C} < \bar{c} < \bar{d} \leq \bar{D}$, also $L = (\bar{c}, \bar{d})$;
- 3°. $\bar{c} < \bar{C} < \bar{D} \leq \bar{d}$, also $L = (\bar{C}, \bar{D})$;
- 4°. $\bar{c} \leq \bar{C} < \bar{d} < \bar{D}$, also $L = (\bar{C}, \bar{d})$;
- 5°. $\bar{C} = \bar{c} < \bar{D} = \bar{d}$, also $L = (\bar{c}, \bar{d}) = (\bar{C}, \bar{D})$.

Die Intervalle k, K sind folglich (im Hinblick auf (4)) in den einzelnen Fällen in folgender Weise bestimmt:

- 1°. $k = (\bar{a}, \alpha^{-1}(\bar{D}))$,
 $K = (\mathbf{A}^{-1}(\bar{c}), \bar{B})$ oder $= (\bar{A}, \bar{B})$, je nachdem, ob $\bar{C} < \bar{c}$ oder $\bar{C} = \bar{c}$ ist;
- 2°. $k = (\bar{a}, \bar{b})$,
 $K = (\mathbf{A}^{-1}(\bar{c}), \mathbf{A}^{-1}(\bar{d}))$ oder $= (\mathbf{A}^{-1}(\bar{c}), \bar{B})$, je nachdem, ob $\bar{d} < \bar{D}$ oder $\bar{d} = \bar{D}$ ist;
- 3°. $k = (\alpha^{-1}(\bar{C}), \alpha^{-1}(\bar{D}))$ oder $= (\alpha^{-1}(\bar{C}), \bar{b})$, je nachdem, ob $\bar{D} < \bar{d}$ oder $\bar{D} = \bar{d}$ ist;
 $K = (\bar{A}, \bar{B})$;
- 4°. $k = (\alpha^{-1}(\bar{C}), \bar{b})$ oder $= (\bar{a}, \bar{b})$, je nachdem, ob $\bar{c} < \bar{C}$ oder $\bar{c} = \bar{C}$ ist;
 $K = (\bar{A}, \mathbf{A}^{-1}(\bar{d}))$;
- 5°. $k = (\bar{a}, \bar{b})$, $K = (\bar{A}, \bar{B})$.

Somit kommen wir zu dem folgenden Resultat:

Entweder fällt wenigstens einer der Endpunkte des Intervalls k mit einem Endpunkt von j und zugleich wenigstens einer der Endpunkte des Intervall K

mit einem Endpunkt von J zusammen (1° ; 2° , $\bar{d} = \bar{D}$; 3° , $\bar{D} = \bar{d}$; 4° ; 5°); oder das Intervall k ist mit j identisch, und die Endpunkte von K liegen im Intervall J (2° , $\bar{d} < \bar{D}$); oder das Intervall K ist mit J identisch, und die Endpunkte von k liegen im Intervall j (3° , $\bar{D} < \bar{d}$).

Insbesondere sehen wir:

Dann und nur dann fällt das Intervall k mit j und zugleich das Intervall K mit J zusammen, wenn $\bar{c} = \bar{C}$, $\bar{d} = \bar{D}$ ist. Mit anderen Worten: Dann und nur dann fallen die Wertevorräte der Phasen α , A in ihren Definitionsintervallen j , J zusammen, wenn $C = c$, $D = d$ oder $C = d$, $D = c$ ist.

Wir nennen die Differentialgleichungen (q), (Q) *von demselben Charakter*, wenn entweder beide zu demselben endlichen Typus (m), $m \geq 1$ gehören und von derselben Art (also beide allgemein oder speziell) sind oder jede von ihnen einseitig oszillatorisch ist oder beide oszillatorisch sind.

Es gilt somit (§ 7, Nr. 2):

Die Wertevorräte der Phasen α , A in ihren Definitionsintervallen j , J können nur dann zusammenfallen, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) von demselben Charakter sind.

In Nr. 3–6 wollen wir diese Eigenschaft der Differentialgleichungen (q), (Q) voraussetzen. Wir nehmen also an, daß die Differentialgleichungen (q), (Q) von demselben Charakter sind.

3. Assoziierte Zahlen. Wir nennen zwei Zahlen $t_0 \in j$ und $T_0 \in J$ *direkt assoziiert* in bezug auf die Differentialgleichungen (q), (Q), kürzer: *direkt assoziiert*, wenn sie in bezug auf die Zahlen a_ν , $b_{-\nu}$ und A_ν , $B_{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots$; $a_0 = a$, $b_0 = b$; $A_0 = A$, $B_0 = B$) in denselben Beziehungen stehen.

Das bedeutet:

I. Im Fall eines endlichen Typus (m) der Differentialgleichungen (q), (Q), $m \geq 1$:

- a) $m = 1$: $t_0 \in j$ beliebig, $T_0 \in J$ beliebig;
- b) $m \geq 2$:
1. $t_0 = a_{r+1}$, $T_0 = A_{r+1}$;
 2. $t_0 = b_{-m+r+1}$, $T_0 = B_{-m+r+1}$;
 3. $a_r < t_0 < b_{-m+r+1}$, $A_r < T_0 < B_{-m+r+1}$;
 4. $b_{-m+r+1} < t_0 < a_{r+1}$, $B_{-m+r+1} < T_0 < A_{r+1}$,
- ($r = 0, 1, \dots, m-1$).

II. Im Fall eines unendlichen Typus der Differentialgleichungen (q), (Q):

a) Beide Differentialgleichungen (q), (Q) sind rechtsseitig oszillatorisch:

1. $t_0 = a_{r+1}$, $T_0 = A_{r+1}$;
2. $a_r < t_0 < a_{r+1}$, $A_r < T_0 < A_{r+1}$ ($r = 0, 1, \dots$);

b) beide sind linksseitig oszillatorisch:

1. $t_0 = b_{-r-1}$, $T_0 = B_{-r-1}$;
2. $b_{-r-1} < t_0 < b_{-r}$, $B_{-r-1} < T_0 < B_{-r}$ ($r = 0, 1, \dots$);

c) beide sind oszillatorisch: $t_0 \in j$ beliebig, $T_0 \in J$ beliebig.

Ferner nennen wir zwei Zahlen $t_0 \in j$ und $T_0 \in J$ *indirekt assoziiert* in bezug auf die Differentialgleichungen (q), (Q), kürzer: indirekt assoziiert, wenn sie in bezug auf die Zahlen a_v, b_v und A_v, B_v ($v = 0, 1, \dots; a_0 = a, b_0 = b; A_0 = A, B_0 = B$) in verkehrten Beziehungen stehen.

Das bedeutet folgendes:

I. Im Fall eines endlichen Typus (m) der Differentialgleichungen (q), (Q), $m \geq 1$:

- a) $m = 1$: $t_0 \in j$ beliebig, $T_0 \in J$ beliebig;
- b) $m \geq 2$:
1. $t_0 = a_{r+1}$, $T_0 = B_{-r-1}$;
 2. $t_0 = b_{-m+r+1}$, $T_0 = A_{m-r-1}$;
 3. $a_r < t_0 < b_{-m+r+1}$, $A_{m-r-1} < T_0 < B_{-r}$;
 4. $b_{-m+r+1} < t_0 < a_{r+1}$, $B_{-r-1} < T_0 < A_{m-r-1}$;
- ($r = 0, 1, \dots, m - 1$).

II. Im Fall eines unendlichen Typus der Differentialgleichungen (q), (Q):

a) Die Differentialgleichung (q) ist rechtsseitig und (Q) linksseitig oszillatorisch:

1. $t_0 = a_{r+1}$, $T_0 = B_{-r-1}$;
2. $a_r < t_0 < a_{r+1}$, $B_{-r-1} < T_0 < B_{-r}$ ($r = 0, 1, \dots$);

b) die Differentialgleichung (q) ist linksseitig und (Q) rechtsseitig oszillatorisch:

1. $t_0 = b_{-r-1}$, $T_0 = A_{r+1}$;
2. $b_{-r-1} < t_0 < b_{-r}$, $A_r < T_0 < A_{r+1}$ ($r = 0, 1, \dots$);

c) beide Differentialgleichungen (q), (Q) sind oszillatorisch:

$$t_0 \in j \text{ beliebig, } T_0 \in J \text{ beliebig.}$$

Wenn also die Differentialgleichungen (q), (Q) vom Typus (1) oder oszillatorisch sind, so sind je zwei Zahlen $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ zugleich direkt und indirekt assoziiert. Aber auch in anderen Fällen können zwei Zahlen $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ diese Eigenschaft haben. Dies tritt genau bei speziellen Differentialgleichungen (q), (Q) ein, wenn $m (> 0)$ gerade ist und $t_0 = a_{\frac{m}{2}} = b_{-\frac{m}{2}}$; $T_0 = A_{\frac{m}{2}} = B_{-\frac{m}{2}}$; ferner bei allgemeinen Differentialgleichungen (q), (Q), wenn m ungerade ist und $a_{\frac{m-1}{2}} < t_0 < b_{-\frac{m-1}{2}}$, $A_{\frac{m-1}{2}} < T_0 < B_{-\frac{m-1}{2}}$ oder wenn $m (> 0)$ gerade ist und $b_{-\frac{m}{2}} < t_0 < a_{\frac{m}{2}}$, $B_{-\frac{m}{2}} < T_0 < A_{\frac{m}{2}}$.

Ferner sehen wir: Ist $t_0 \in j$ eine ausgezeichnete Zahl der Differentialgleichung (q) (§ 3, Nr. 10), so gibt es genau eine mit ihr direkt oder indirekt assoziierte Zahl $T_0 \in J$, die eine ausgezeichnete Zahl von (Q) ist. Zu einer Zahl $t_0 \in j$, die nicht ausgezeichnet ist, gibt es stets ∞^1 mit ihr direkt oder indirekt assoziierte Zahlen $T_0 \in J$, deren Menge ein offenes Teilintervall von J darstellt.

4. Es seien $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ zwei direkt bzw. indirekt assoziierte Zahlen in bezug auf die Differentialgleichungen (q), (Q).

Es gilt der folgende

Satz. Ist t_0 ; c , d ein charakteristisches Tripel für die Differentialgleichung (q), so stellt T_0 ; c , d bzw. T_0 ; d , c ein solches für die Differentialgleichung (Q) dar.

Beweis. Es sei t_0 ; c , d ein charakteristisches Tripel für die Differentialgleichung (q). Die Zahlen t_0 ; c , d erfüllen also die in § 7, Nr. 13, angeführten, Typus und Art der Differentialgleichung (q) entsprechenden Beziehungen I–II c).

Es sei $C = c$, $D = d$ oder $C = d$, $D = c$, je nachdem, ob die Zahlen t_0 , T_0 direkt oder indirekt assoziiert sind.

Der Beweis ist erbracht, wenn wir zeigen können: Die Werte T_0 ; A_ν , $B_{-\nu}$; C , D ; \mathbf{E} ($= \text{sgn}(D - C)$) erfüllen die Typus und Art der Differentialgleichung (Q) entsprechenden Beziehungen I–II c) von § 7, Nr. 13 ($\nu = 0, 1, \dots$).

a) Die Zahlen t_0 , T_0 seien direkt assoziiert.

Dann steht die Zahl T_0 in bezug auf A_ν , $B_{-\nu}$ in denselben Beziehungen wie t_0 in bezug auf a_ν , $b_{-\nu}$. Da ferner $C = c$, $D = d$; $\mathbf{E} = \varepsilon$ ist, folgen die erwähnten Beziehungen für die Werte T_0 ; A_ν , $B_{-\nu}$; C , D ; \mathbf{E} aus denjenigen für t_0 ; a_ν , $b_{-\nu}$; c , d ; ε .

b) Die Zahlen t_0 , T_0 seien indirekt assoziiert.

Dann steht die Zahl T_0 in bezug auf A_ν , $B_{-\nu}$ in verkehrten Beziehungen wie t_0 in bezug auf a_ν , $b_{-\nu}$. Ferner haben wir $C = d$, $D = c$; $\mathbf{E} = -\varepsilon$.

Wir wollen z. B. den Fall I a), $m \geq 2$, und

$$a_r < t_0 < b_{-m+r+1}; \quad -(r+1)\pi\varepsilon \leq c \leq -r\pi\varepsilon; \quad (7)$$

betrachten.

$$(m-r-1)\pi\varepsilon \leq d \leq (m-r)\pi\varepsilon$$

Da die Zahlen t_0 , T_0 indirekt assoziiert sind, haben wir

$$A_{m-r-1} < T_0 < B_{-r}. \quad (8)$$

Aus den Beziehungen (7) folgt

$$-(r+1)\pi\varepsilon \leq D \leq -r\pi\varepsilon; \quad (m-r-1)\pi\varepsilon \leq C \leq (m-r)\pi\varepsilon;$$

in diesen Formeln ist für $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = -1$, d. h. für $\mathbf{E} = -1$ bzw. $\mathbf{E} = 1$ das Zeichen $<$ bzw. $>$ zu nehmen.

Wir haben also

$$(r+1)\pi\mathbf{E} \geq D \geq r\pi\mathbf{E}; \quad -(m-r-1)\pi\mathbf{E} \geq C \geq -(m-r)\pi\mathbf{E},$$

und diese Formeln können wie folgt geschrieben werden:

$$-(m-r)\pi\mathbf{E} \leq C \leq -(m-r-1)\pi\mathbf{E}; \quad r\pi\mathbf{E} \leq D \leq (r+1)\pi\mathbf{E}. \quad (9)$$

Schreibt man in (8) und (9) r anstatt $m-r-1$, so erhält man

$$A_r < T_0 < B_{-m+r+1}; \quad -(r+1)\pi\mathbf{E} \leq C \leq -r\pi\mathbf{E}; \\ (m-r-1)\pi\mathbf{E} \leq D \leq (m-r)\pi\mathbf{E}.$$

Dies sind genau die mit großen Buchstaben geschriebenen Beziehungen (7).

Ähnlich verläuft der Beweis in allen übrigen Fällen.

5. Ähnliche Phasen. Wir nennen zwei Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) *ähnlich*, wenn ihre normierten Randwerte \bar{c}, \bar{d} bzw. \bar{C}, \bar{D} dieselben sind: $\bar{c} = \bar{C}, \bar{d} = \bar{D}$. Dies trifft offenbar genau dann zu, wenn für die Randwerte c, d bzw. C, D von α bzw. A die Beziehungen $C = c, D = d$ oder $C = d, D = c$ bestehen.

Ist $C = c, D = d$, so nennen wir genauer die Phasen α, A *direkt ähnlich*; in diesem Fall ist $\text{sgn } \alpha' \cdot \text{sgn } \dot{A} = 1$.

Ist $C = d, D = c$, so nennen wir die Phasen α, A *indirekt ähnlich*; in diesem Fall ist $\text{sgn } \alpha' \cdot \text{sgn } \dot{A} = -1$.

Sind z. B. die Differentialgleichungen (q), (Q) oszillatorisch, so gilt für alle ihre Phasen α, A : $\bar{c} = \bar{C} = -\infty, \bar{d} = \bar{D} = \infty$. Daraus folgt, daß je zwei Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) ähnlich sind, und zwar direkt ähnlich, wenn beide Phasen wachsen oder abnehmen, und indirekt ähnlich, wenn eine von ihnen wächst und die andere abnimmt.

Insbesondere haben wir (Nr. 2):

Dann und nur dann fallen die Wertevorräte von zwei Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) in ihren Definitionsintervallen zusammen, wenn die Phasen α, A ähnlich sind.

Es seien nun α, A direkt bzw. indirekt ähnliche Phasen.

Wir zeigen:

1. Die Phasen α, A nehmen an je zwei direkt bzw. indirekt assoziierten ausgezeichneten Stellen der Differentialgleichungen (q), (Q) dieselben Werte an.

Beweis. Wir wenden auf die links- bzw. rechtsseitigen Nullphasen $\alpha - c, A - C$ bzw. $\alpha - d, A - D$ der Differentialgleichungen (q), (Q) die Formeln § 7, (10) an und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \alpha(a_\nu) &= c + \varepsilon\nu\pi, & \alpha(b_{-\nu}) &= d - \varepsilon\nu\pi; \\ \mathbf{A}(A_\nu) &= C + \mathbf{E}\nu\pi, & \mathbf{A}(B_{-\nu}) &= D - \mathbf{E}\nu\pi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$(\nu = 1, 2, \dots; \quad \varepsilon = \text{sgn } \alpha', \quad \mathbf{E} = \text{sgn } \dot{A}).$

a) Die Phasen α, A seien direkt ähnlich:

$$C = c, \quad D = d; \quad \mathbf{E} = \varepsilon. \quad (11)$$

Nach Nr. 3 sind je zwei direkt assoziierte ausgezeichnete Stellen t_0, T_0 der Differentialgleichungen (q), (Q) entweder $t_0 = a_\nu, T_0 = A_\nu$ oder $t_0 = b_{-\nu}, T_0 = B_{-\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$). In beiden Fällen folgt aus (10) und (11) $\alpha(t_0) = \mathbf{A}(T_0)$.

b) Die Phasen α, A seien indirekt ähnlich:

$$C = d, \quad D = c; \quad \mathbf{E} = -\varepsilon. \quad (12)$$

Nach Nr. 3 sind je zwei indirekt assoziierte ausgezeichnete Stellen t_0, T_0 der Differentialgleichungen (q), (Q) entweder $t_0 = a_\nu, T_0 = B_{-\nu}$ oder $t_0 = b_{-\nu}, T_0 = A_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$). In beiden Fällen folgt aus (10) und (11) $\alpha(t_0) = \mathbf{A}(T_0)$.

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nehmen nun an, daß α, A (ähnliche) Normalphasen sind. Mit t_0, T_0 bezeichnen wir ihre Nullstellen.

2. Je nachdem, ob die Phasen α , A direkt oder indirekt ähnlich sind, sind ihre Nullstellen t_0 , T_0 direkt oder indirekt assoziiert.

Beweis. a) Die Phasen α , A seien direkt ähnlich.

In diesem Fall gelten Formeln wie (11), und es bestehen für t_0 ; c , d ; ε und zugleich für T_0 ; C , D ; E Beziehungen wie im Satz von § 7, Nr. 13. Folglich stehen die Zahlen t_0 und T_0 in bezug auf die Zahlen a_ν , $b_{-\nu}$ und A_ν , $B_{-\nu}$ in denselben Beziehungen ($\nu = 0, 1, \dots$).

b) Die Phasen α , A seien indirekt ähnlich.

Dann gelten Formeln wie (12).

Man überzeugt sich leicht, daß in allen Fällen eines endlichen oder unendlichen Typus der Differentialgleichungen (q), (Q) die Zahlen t_0 und T_0 in bezug auf a_ν , $b_{-\nu}$ und A_ν , $B_{-\nu}$ in verkehrten Beziehungen stehen ($\nu = 0, 1, \dots$).

Wir wollen dies z. B. für Differentialgleichungen (q), (Q) eines endlichen Typus (m), $m \geq 2$, und etwa für $t_0 = a_{r+1}$ zeigen:

Ist $t_0 = a_{r+1}$, so haben wir nach dem Satz von § 7, Nr. 13 $-(r+1)\pi\varepsilon = c$. Daraus folgt wegen (12) $(r+1)\pi E = D$ und ferner (nach demselben Satz) $T_0 = B_{-r-1}$.

6. Wir wollen nun die Frage beantworten, ob und wieviel ähnliche Phasen die Differentialgleichungen (q), (Q) (von demselben Charakter) zulassen.

Darüber gilt der folgende

Satz. Es sei α eine Normalphase der Differentialgleichung (q) und t_0 ihre Nullstelle. Man wähle eine mit t_0 direkt bzw. indirekt assoziierte Zahl T_0 in bezug auf die Differentialgleichungen (q), (Q). Es gibt stets der Phase α direkt bzw. indirekt ähnliche Normalphasen A der Differentialgleichung (Q) mit der Nullstelle T_0 . Je nach Typus und Art der Differentialgleichungen (q), (Q) und je nachdem, ob die Zahlen t_0 , T_0 ausgezeichnet sind oder nicht, gibt es entweder genau eine Normalphase A oder genau ein ein- oder zweiparametrisches System von Normalphasen A .

Beweis. Es sei t_0 ; c , d die Randcharakteristik von α . Dann ist nach Nr. 4 T_0 ; c , d bzw. T_0 ; d , c ein charakteristisches Tripel für die Differentialgleichung (Q). Nach § 7, Nr. 15, gibt es zu diesem letzteren Normalphasen A von (Q) mit der Randcharakteristik T_0 ; c , d bzw. T_0 ; d , c . Je nach Typus und Art der Differentialgleichung (Q) und je nachdem, ob die Zahl T_0 ausgezeichnet ist oder nicht, gibt es entweder genau eine Normalphase A oder genau ein ein- oder zweiparametrisches System von Normalphasen der Differentialgleichung (Q) mit der erwähnten Randcharakteristik. Jede Normalphase A ist offenbar der Phase α direkt bzw. indirekt ähnlich, und ihre Nullstelle ist T_0 .

Damit ist der Beweis beendet.

Genauer liegt (nach § 7, Nr. 15) die folgende Situation vor:

Es gibt genau eine Normalphase A , wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) allgemein entweder vom Typus (1) sind oder vom Typus (m), $m \geq 2$, wobei die Zahlen t_0 , T_0 nicht ausgezeichnet sind.

Es gibt genau ∞^1 Normalphasen A , wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) allgemein sind vom Typus (m), $m \geq 2$, und die Zahlen t_0 , T_0 ausgezeichnet sind; ferner dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) speziell sind vom

Typus (1) oder vom Typus (m) , $m \geq 2$, wobei die Zahlen t_0, T_0 nicht ausgezeichnet sind; schließlich dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) einseitig oszillatorisch und die Zahlen t_0, T_0 nicht ausgezeichnet sind.

Es gibt genau ∞^2 Normalphasen **A**, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) speziell sind vom Typus (m) , $m \geq 2$, wobei die Zahlen t_0, T_0 ausgezeichnet sind; ferner dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) einseitig oszillatorisch und die Zahlen t_0, T_0 ausgezeichnet sind; schließlich dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) oszillatorisch sind.

In § 9, Nr. 2 haben wir gesehen, daß die Wertevorräte von zwei Phasen α, \mathbf{A} in den Definitionsintervallen j, J dieser letzteren nur dann zusammenfallen können, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) von demselben Charakter sind. Diese Erkenntnis zusammen mit dem obigen Resultat zeigt, daß die *Differentialgleichungen (q), (Q) dann und nur dann ähnliche Phasen zulassen, wenn sie von demselben Charakter sind.*

§ 10. Die algebraische Struktur der Phasenmenge oszillatorischer Differentialgleichungen (q) im Intervall $(-\infty, \infty)$

In diesem Paragraphen wollen wir die algebraische Struktur der aus allen ersten Phasen oszillatorischer Differentialgleichungen (q) mit dem Definitionsintervall $j = (-\infty, \infty)$ gebildeten Menge untersuchen.

In diesem Paragraphen verstehen wir unter Phasenfunktion stets eine Phasenfunktion (§ 5, Nr. 7) von der Klasse C_3 .

Wir wissen (§ 5, Nr. 5, 7; 4), daß jede erste Phase einer Differentialgleichung (q) eine Phasenfunktion darstellt, die im oszillatorischen Falle von beiden Seiten unbeschränkt ist. Ferner wissen wir (§ 5, Nr. 7; 4), daß umgekehrt jede von beiden Seiten unbeschränkte Phasenfunktion α in ihrem Definitionsintervall j eine erste Phase der im Sinne der Formel § 5, (16) gebildeten oszillatorischen Differentialgleichung (q) ist. Es geht also in diesem Paragraphen um die algebraische Struktur der aus allen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ definierten und von beiden Seiten unbeschränkten Phasenfunktionen gebildeten Menge. Wir wollen diese Menge als die *Phasenmenge* der oszillatorischen Differentialgleichungen (q) im Intervall ($j =$) $(-\infty, \infty)$, kürzer: die Phasenmenge, bezeichnen.

Statt von Phasenfunktionen sprechen wir kürzer von Phasen; außerdem nennen wir den Träger q einer oszillatorischen Differentialgleichung (q) *oszillatorischen Träger*. Die oszillatorischen Träger sind also im Sinne der Formel § 5, (16) bzw. (18) mit Hilfe von beiderseits unbeschränkten Phasenfunktionen α gebildet.

Wir bemerken, daß die Mächtigkeit der von allen oszillatorischen Trägern gebildeten Menge M gleich der des Kontinuums ist. In der Tat, da M aus stetigen Funktionen besteht, ist $\text{card } M \leq \aleph$, und da sie alle aus beliebigen Konstanten $-k^2$ ($\neq 0$) bestehende Träger enthält, ist auch $\text{card } M \geq \aleph$. Daraus folgt $\text{card } M = \aleph$.

1. Die Phasengruppe \mathfrak{G} . Es sei G die Phasenmenge der oszillatorischen Differentialgleichungen (q) im Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Die Phasenmenge G enthält offenbar die identische Phase $\varphi_0(t) = t$. Ferner sieht man, daß die aus zwei beliebigen Phasen $\alpha, \gamma \in G$ zusammengesetzte Funk-

tion $\alpha[\gamma(t)]$ sowie die zu α inverse Funktion α^{-1} ebenfalls Elemente von G sind. Wir führen nun in der Menge G eine Multiplikation (Verknüpfungsregel) ein, und zwar auf Grund der Zusammensetzung von Funktionen. Für beliebige Phasen $\alpha, \gamma \in G$ definieren wir also als das Produkt $\alpha\gamma$ die zusammengesetzte Funktion $\alpha[\gamma(t)]$. Wir sehen, daß die Menge G mit dieser Multiplikation eine Gruppe \mathfrak{G} mit dem Einselement $\varphi_0(t)$ bildet. Wir wollen diese Gruppe \mathfrak{G} als die *Phasengruppe* bezeichnen.

Das zu einem Element $\alpha \in \mathfrak{G}$ inverse Element α^{-1} stellt eine wachsende oder abnehmende Phase dar, je nachdem, ob α eine wachsende oder abnehmende Funktion ist. Ferner ist das Produkt $\alpha\gamma$ von zwei Elementen $\alpha, \gamma \in \mathfrak{G}$ eine wachsende oder abnehmende Funktion, je nachdem, ob beide Phasen α, γ wachsen bzw. abnehmen oder eine von ihnen wächst und die andere abnimmt.

Die von allen wachsenden Phasen gebildete Menge \mathfrak{N} stellt somit einen Normalteiler von \mathfrak{G} dar: $\alpha^{-1}\mathfrak{N}\alpha = \mathfrak{N}$; $\alpha \in \mathfrak{G}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ besteht aus zwei Elementen, und zwar aus \mathfrak{N} und aus der von allen abnehmenden Phasen gebildeten Klasse A .

2. Äquivalenzrelation Q . Als zweiten Schritt wollen wir in der Phasengruppe \mathfrak{G} eine Äquivalenzrelation einführen, und zwar folgendermaßen:

Zwei Phasen $\alpha, \gamma \in \mathfrak{G}$ sind äquivalent, wenn sie durch eine Beziehung der Form

$$\tan \gamma(t) = \frac{c_{11} \tan \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \tan \alpha(t) + c_{22}} \quad (1)$$

zusammenhängen. Die $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ sind Konstanten mit einer von Null verschiedenen Determinante $|c_{ij}| \neq 0$, und die Beziehung (1) soll für alle Werte $t \in j$ mit Ausnahme der singulären Stellen der Funktionen $\tan \alpha(t), \tan \gamma(t)$ bestehen. Man sieht leicht ein, daß die im Sinne von (1) in der Phasengruppe \mathfrak{G} erklärte Beziehung reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und folglich tatsächlich eine Äquivalenzrelation darstellt. Wir wollen diese letztere mit Q bezeichnen.

Die Phasengruppe \mathfrak{G} zerfällt also in ein System von Klassen mod Q , das wir etwa mit \bar{Q} bezeichnen. \bar{Q} ist also eine Zerlegung der Phasengruppe \mathfrak{G} ; jedes Element $\bar{a} \in \bar{Q}$ besteht aus Phasen, von denen je zwei miteinander äquivalent sind, während keine zwei in verschiedenen Elementen $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{Q}$ liegende Phasen diese Eigenschaft haben.

Nun stellen beliebige Phasenfunktionen $\alpha, \gamma \in \mathfrak{G}$ erste Phasen von geeigneten, durch Formeln wie in § 5, (18) definierten Trägern q, p dar. Sind die α, γ miteinander äquivalent, liegen sie also in demselben Element $\bar{a} \in \bar{Q}$, so gilt eine Beziehung wie (1), und aus ihr folgt, im Hinblick auf den Satz in § 1, Nr. 8,

$$p(t) = -\{\tan \gamma, t\} = -\left\{ \frac{c_{11} \tan \alpha + c_{12}}{c_{21} \tan \alpha + c_{22}}, t \right\} = -\{\tan \alpha, t\} = q(t),$$

also $p(t) = q(t)$. Umgekehrt gilt (§ 5, Nr. 17) für je zwei erste Phasen α, γ eines Trägers $q(t), t \in j$, die Beziehung (1); daraus folgt, daß die Phasenfunktionen α, γ miteinander äquivalent sind und folglich demselben Element $\bar{a} \in \bar{Q}$ angehören.

Wir sehen also, daß *jedes Element $\bar{a} \in \bar{Q}$ aus allen ersten Phasen ein und desselben Trägers $q(t)$ besteht.*

Wir ordnen jedem Element $\bar{a} \in \bar{Q}$ den entsprechenden Träger $q(t)$ zu. Dann haben wir eine schlichte Abbildung \mathcal{A} der Zerlegung \bar{Q} auf die Menge aller oszillatorischen Träger.

Die Mächtigkeit der Zerlegung \bar{Q} ist die des Kontinuums, also $\text{card } \bar{Q} = \aleph$.

Zu dem obigen Äquivalenzbegriff von Phasen wollen wir die folgende Bemerkung hinzufügen: Ist von zwei miteinander äquivalenten Phasen α, γ eine elementar, so sind α, γ erste Phasen desselben Trägers q , und folglich ist (§ 8, Nr. 2) auch die andere Phase elementar.

Das heißt, alle mit einer elementaren Phase äquivalenten Phasen sind ebenfalls elementar.

3. Fundamentaluntergruppe \mathfrak{G} . Den nächsten Schritt in unseren Überlegungen bildet die Erforschung der algebraischen Struktur der Zerlegung \bar{Q} .

Zu diesem Zweck betrachten wir dasjenige Element $\mathfrak{E} \in \bar{Q}$, in dem das Einselement φ_0 von \mathfrak{G} enthalten ist. Dieses Element besteht offenbar aus allen mit dem Einselement φ_0 äquivalenten Phasen $\zeta(t)$, also aus allen Phasen der Form

$$\tan \zeta(t) = \frac{c_{11} \tan t + c_{12}}{c_{21} \tan t + c_{22}}, \quad (2)$$

$|c_{ij}| \neq 0$.

Nun ist es auf Grund von (2) leicht einzusehen, daß mit je zwei Phasen $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{E}$ auch die zusammengesetzte Funktion $\zeta_1 \zeta_2$ sowie die zu ζ_1 inverse Funktion ζ_1^{-1} der Klasse \mathfrak{E} angehören. Diese letztere stellt also eine Untergruppe von \mathfrak{G} dar: $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$. Wir nennen diese Untergruppe \mathfrak{E} die *Fundamentaluntergruppe* von \mathfrak{G} .

Wir wollen zeigen, daß *die Zerlegung \bar{Q} mit der rechtsseitigen Restklassenzerlegung $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ der Phasengruppe \mathfrak{G} in bezug auf \mathfrak{E} zusammenfällt.*

Es sei $\bar{a} \in \bar{Q}$ ein beliebiges Element und $\alpha \in \bar{a}$ eine in ihm liegende Phase. Wir haben zu zeigen, daß $\bar{a} = \mathfrak{E}\alpha$ ist.

Nun gilt für jedes Element $\zeta(t) \in \mathfrak{E}$ eine Formel wie (2). Ersetzt man in ihr t durch $\alpha(t)$, so erkennt man, daß $\zeta\alpha$ mit α äquivalent ist. Daraus folgt $\zeta\alpha \in \bar{a}$, und wir haben $\mathfrak{E}\alpha \subset \bar{a}$.

Ferner gilt für jedes Element $\gamma \in \bar{a}$ eine Formel wie (1). Ersetzt man in ihr t durch $\alpha^{-1}(t)$, so erkennt man, daß $\gamma\alpha^{-1}$ mit t äquivalent ist. Daraus folgt $\gamma\alpha^{-1} \in \mathfrak{E}$, ferner $\gamma \in \mathfrak{E}\alpha$, und wir haben $\bar{a} \subset \mathfrak{E}\alpha$.

Damit ist die Gültigkeit von $\bar{a} = \mathfrak{E}\alpha$ bewiesen.

Nach einem Satz der Gruppentheorie ist die Mächtigkeit aller rechtsseitigen Restklassen in einer Gruppe in bezug auf eine Untergruppe stets dieselbe. Folglich ist die Mächtigkeit aller Elemente der Zerlegung \bar{Q} stets dieselbe, also gleich der Mächtigkeit von \mathfrak{E} . Diese letztere ist offenbar gleich \aleph , also $\text{card } \bar{Q} = \aleph$.

Das heißt, *die Mächtigkeit der aus allen ersten Phasen eines Trägers $q(t)$ bestehenden Menge \bar{a} ist die des Kontinuums: $\text{card } \bar{a} = \aleph$.*

Wir bemerken, daß das Einselement $\varphi_0(t) = t \in \mathfrak{E}$ offenbar eine elementare Phase darstellt. Da alle mit einer elementaren Phase äquivalenten Phasen ebenfalls elementar sind, folgt:

Die Fundamentaluntergruppe \mathfrak{E} besteht aus lauter elementaren Phasen.

Ferner bemerken wir, daß die Abbildung \mathcal{A} die Fundamentaluntergruppe \mathfrak{E} auf den oszillatorischen Träger $q(t) = -1$ abbildet.

4. Untergruppe \mathfrak{H} der elementaren Phasen. Es sei \mathfrak{H} die von allen elementaren Phasen gebildete Menge.

Wir wollen zeigen, daß \mathfrak{H} eine Untergruppe von \mathfrak{G} darstellt: $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$.

Beweis. Wir haben bereits bemerkt, daß das Einselement φ_0 eine elementare Phase ist.

Es seien $\alpha, \gamma \in \mathfrak{G}$ beliebige elementare Phasen.

Zunächst sieht man, daß die zusammengesetzte Phase $\alpha\gamma$ ebenfalls elementar ist, denn es gilt

$$\alpha\gamma(t + \pi) = \alpha(\gamma(t + \pi)) = \alpha(\gamma(t) + \varepsilon_2\pi) = \alpha(\gamma(t)) + \varepsilon_1\varepsilon_2\pi = \alpha\gamma(t) + \operatorname{sgn}(\alpha\gamma)' \pi$$

$$(\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} \alpha', \varepsilon_2 = \operatorname{sgn} \gamma').$$

Ferner stellt auch die zu α inverse Funktion $\bar{\alpha} (= \alpha^{-1})$ eine elementare Phase dar. In der Tat, man hat für $\bar{t} \in j$ die Beziehungen

$$\bar{\alpha}(\alpha(\bar{t}) + \pi) = \bar{\alpha}(\alpha(\bar{t} + \varepsilon\pi)) = \bar{t} + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \bar{\alpha}'),$$

und aus ihnen folgt für $t = \alpha(\bar{t})$, $\bar{t} = \bar{\alpha}(t)$

$$\bar{\alpha}(t + \pi) = \bar{\alpha}(t) + \varepsilon\pi.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Oben haben wir gezeigt, daß die Fundamentaluntergruppe \mathfrak{E} aus lauter elementaren Phasen besteht. Daraus folgt, daß \mathfrak{E} eine Untergruppe von \mathfrak{H} ist, also

$$\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}. \quad (3)$$

Es sei nun $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ die rechtsseitige Restklassenzerlegung der Gruppe \mathfrak{G} in bezug auf \mathfrak{H} . Die Elemente dieser Zerlegung sind also die rechtsseitigen Restklassen $\mathfrak{H}\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe \mathfrak{H} .

Aus (3) folgt, daß die Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ darstellt, also ([81])

$$\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}. \quad (4)$$

Die Formel (4) besagt, daß jedes Element $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ die Vereinigung von einigen Elementen der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ ist. Insbesondere ist auch die Untergruppe \mathfrak{H} die Vereinigung einiger Elemente der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$. Nach einem Satz der Gruppentheorie ist die Mächtigkeit der Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$, durch deren Vereinigung das Element $\mathfrak{H}\alpha$ entsteht, von der Wahl dieses Elementes unabhängig. Mit anderen Worten, bei jeder Wahl des Elementes $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ ist die Mächtigkeit der Menge von Elementen der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$, die durch ihre Vereinigung das Element $\mathfrak{H}\alpha$ ergeben, stets dieselbe.

Wir betrachten nun die Untergruppe \mathfrak{H} und ein weiteres Element $\mathfrak{H}\alpha$ der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ von \mathfrak{G} . Es sei \bar{A}_0 bzw. \bar{A} die Menge aller Elemente der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$, die durch ihre Vereinigung \mathfrak{H} bzw. $\mathfrak{H}\alpha$ ergeben: $s\bar{A}_0 = \mathfrak{H}$, $s\bar{A} = \mathfrak{H}\alpha$. Nach dem Obigen ist die Mächtigkeit der beiden Mengen \bar{A}_0 , \bar{A} dieselbe: $\operatorname{card} \bar{A}_0 = \operatorname{card} \bar{A}$. Vermöge der Abbildung \mathcal{A} werden die Mengen \bar{A}_0 , \bar{A} auf gewisse

Mengen $\mathcal{A}\bar{A}_0$, $\mathcal{A}\bar{A}$ oszillatorischer Träger abgebildet. Nach der Definition von \mathcal{A} besteht die Menge $\mathcal{A}\bar{A}_0$ bzw. $\mathcal{A}\bar{A}$ genau aus denjenigen Trägern, deren erste Phasen in \mathfrak{S} bzw. $\mathfrak{S}\alpha$ liegen. Insbesondere besteht die Menge $\mathcal{A}\bar{A}_0$ genau aus denjenigen Trägern, deren erste Phasen elementar sind, d. h. genau aus den elementaren Trägern. Nach § 7, Nr. 6 ist also die Mächtigkeit von $\mathcal{A}\bar{A}_0$ gleich der des Kontinuums: $\text{card } \mathcal{A}\bar{A}_0 = \aleph$. Nun ist aber die Abbildung \mathcal{A} schlicht; daraus folgt $\text{card } \mathcal{A}\bar{A}_0 = \text{card } \bar{A}_0$, $\text{card } \mathcal{A}\bar{A} = \text{card } \bar{A}$. Es gilt also

$$\text{card } \mathcal{A}\bar{A} = \text{card } \bar{A} = \text{card } \bar{A}_0 = \text{card } \mathcal{A}\bar{A}_0 = \aleph,$$

und wir haben das folgende Resultat:

Die Mächtigkeit der Menge aller oszillatorischen Träger, deren erste Phasen in ein und demselben Element $\mathfrak{S}\alpha \in \mathfrak{G}/\mathfrak{r}\mathfrak{S}$ liegen, ist für alle Elemente von $\mathfrak{G}/\mathfrak{r}\mathfrak{S}$ dieselbe und gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.