§ 25. Faktorgruppen

1. Definition. Wir betrachten ein Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$. Nach Definition des Faktoroids ist das Feld von $\overline{\mathfrak{G}}$ eine erzeugende Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$; folglich stimmt es mit der Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ überein (§ 24, Nr. 3, 2). Nach Definition der Multiplikation in $\overline{\mathfrak{G}}$ ist das Produkt $p\mathfrak{A} \circ q\mathfrak{A}$ aus einem Element $p\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit einem Element $q\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ $(p, q \in \mathfrak{G})$ durch das den Komplex $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A}$ enthaltende Element von $\overline{\mathfrak{G}}$ dargestellt; da aber dieser Komplex mit dem Element $pq\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ identisch ist (§ 24, Nr. 3, 1), gilt für die Multiplikation im Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$

$$p\mathfrak{A} \circ q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Nun wollen wir zeigen, daß *das Faktoroid* $\overline{\mathfrak{G}}$ *eine Gruppe ist, in der das Einselement durch das Feld A der invarianten Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *und das zu jedem Element* $p\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ *inverse Element durch die zu der Nebenklasse* $p\mathfrak{A}$ *inverse Nebenklasse* $p^{-1}\mathfrak{A}$ *dargestellt wird.*

Beweis. Zunächst ist das Gruppoid $\overline{\mathfrak{G}}$ assoziativ (§ 15, Nr. 6, 3). Ferner stellt das Feld A von $\mathfrak{A}$ das Einselement von $\overline{\mathfrak{G}}$ dar (§ 18, Nr. 7, 5). Schließlich gilt

$$p\mathfrak{A} \circ p^{-1}\mathfrak{A} = pp^{-1}\mathfrak{A} = \underline{1}\mathfrak{A} = A,$$

woraus zu ersehen ist, daß $p^{-1}\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ das zu dem Element $p\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ inverse Element ist.

Jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also eine Gruppe und wird durch eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt; und zwar ist das Feld von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit der Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ identisch und die Multiplikation durch die Formel (1) gegeben. Wir nennen das Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ die *durch die invariante Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *bestimmte Faktorgruppe* und schreiben $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

2. Faktoroide auf Gruppen. Auf Grund des in § 24, Nr. 3, 2 gewonnenen Resultats kommen wir zu der folgenden Übersicht über alle Faktoroide auf einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$:

Alle Faktoroide auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ *sind genau die durch die einzelnen in der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *invarianten Untergruppen bestimmten Faktorgruppen.*

Wir wollen beachten, daß *das größte* (*kleinste*) *Faktoroid auf* $\mathfrak{G}$ *durch die sogenannte größte* (*kleinste*) *Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G}/\{\underline{1}\})$ *dargestellt wird,* die wiederum durch die größte (kleinste) in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{G}$ $(\{\underline{1}\})$ bestimmt ist.

3. Eigenschaften der Faktorgruppen. Das Verhalten der Faktorgruppen ist durch die Eigenschaften der erzeugenden Zerlegungen auf Gruppen (§ 24, Nr. 4) gegeben.

Es seien $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ beliebige Faktorgruppen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *ist dann und nur dann eine Überdeckung* (*Verfeinerung*) *der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$, *wenn* $\mathfrak{A}$ *eine Obergruppe auf der Gruppe* $\mathfrak{B}$ *darstellt, wenn also* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ *ist.*

Die größte gemeinsame Verfeinerung $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *der Faktorgruppen* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *ist die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}]$ *der Faktorgruppen* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *ist die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *sind zueinander komplementär.*

Das aus allen Faktorgruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ *bestehende System ist in bezug auf die Operationen* (), [] *abgeschlossen und stellt zusammen mit den mittels dieser Operationen definierten Multiplikationen einen modularen Verband mit extremen Elementen* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}, \mathfrak{G}/\{\underline{1}\}$ *dar. Dieser Verband ist zu demjenigen, der von allen in* $\mathfrak{G}$ *invarianten Untergruppen gebildet wird* (§ 24, Nr. 2), *isomorph.*

Wir wollen insbesondere beachten, daß *die Gruppen derjenigen Klasse von Gruppoiden angehören, auf denen alle Faktoroide paarweise komplementär sind.*

4. Faktorgruppen in Gruppen. 1. *Durchdringungen und Hüllen.* Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ invariant ist.

Wir betrachten die Faktoroide $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Aus § 24, Nr. 5, Satz 1 wissen wir, daß die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar und ferner die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ invariant sind. Außerdem folgt aus den erwähnten Überlegungen, daß die Felder der betrachteten Faktoroide mit den (erzeugenden) Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$ identisch sind (§ 21, Nr. 2, 1). Aus diesen Tatsachen ergibt sich unmittelbar

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}), \qquad \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/\mathfrak{B}, \tag{1}$$

und wir kommen zu dem Resultat: *Die Faktoroide* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *sind mit den in den Formeln* (1) *beschriebenen Faktorgruppen identisch.*

Insbesondere gilt (für $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$) der folgende

Satz. *Es seien* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *Untergruppen in* $\mathfrak{G}$, *wobei* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant ist. Dann sind die Faktoroide* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *Faktorgruppen im Sinn der Formeln*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}), \qquad \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}.$$

2. *Der spezielle Fünfgruppensatz.* Wir kehren zu den in § 24, Nr. 5, Satz 2 gemachten Voraussetzungen zurück und betrachten die Faktoroide $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ (§ 15, Nr. 3, 3), die als die durch die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{U}$ erzwungenen Überdeckungen der beiden Faktorgruppen

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \sqcap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}),$$

$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \sqcap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$$

erklärt sind. Die Felder von $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ sind mit den (erzeugenden) Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ identisch. Folglich haben wir

$$\mathring{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B}, \qquad \mathring{\mathfrak{C}} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}$$

und sehen, daß die Faktoroide $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ mit den in diesen Formeln auftretenden Faktorgruppen zusammenfallen.

Aus § 15, Nr. 3, 3 wissen wir, daß die Faktorgruppen $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ verknüpft und folglich (§ 16, Nr. 1, 2) isomorph sind.

Somit haben wir den sogenannten *speziellen Fünfgruppensatz* bewiesen. Zusammengefaßt lautet er:

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ *Untergruppen in* $\mathfrak{G}$, *wobei die Untergruppe* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{A}$ *und die Untergruppe* $\mathfrak{D}$ *in* $\mathfrak{C}$ *invariant ist. Dann sind die Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *invariant. Ist ferner* $\mathfrak{U}$ *eine den Beziehungen*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$$

genügende invariante Untergruppe in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, *so sind die Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{U}$ *mit jeder der beiden Untergruppen* $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ *vertauschbar, und die Untergruppe* $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ *bzw.* $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ *ist in* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ *bzw. in* $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ *invariant. Ferner sind die Faktorgruppen* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ *und* $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ *verknüpft und somit isomorph, also*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}.$$

Insbesondere gilt (für $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$) der folgende *Viergruppensatz von* Zassenhaus:

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ *Untergruppen in* $\mathfrak{G}$, *wobei die Untergruppe* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{A}$ *und die Untergruppe* $\mathfrak{D}$ *in* $\mathfrak{C}$ *invariant ist. Dann sind die Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *invariant. Ferner sind die Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ *mit* $\mathfrak{B}$ *und analog die Untergruppen* $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *mit* $\mathfrak{D}$ *vertauschbar. Außerdem ist die Untergruppe* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}$ *in* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ *und die Untergruppe* $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D}$ *in* $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ *invariant. Ferner sind die Faktorgruppen* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}$ *und* $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D}$ *verknüpft und folglich isomorph, also*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D}.$$

5. Weitere Eigenschaften der Faktorgruppen. 1. *Erzwungene Überdeckungen von Faktorgruppen.* Es sei $\mathfrak{B}$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}_1$ eine solche in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Die einzelnen Elemente von $\mathfrak{B}_1$ sind also Nebenklassen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die invariante Untergruppe $\mathfrak{B}$. Unter den Elementen von $\mathfrak{B}_1$ befindet sich das Feld B der Untergruppe $\mathfrak{B}$; denn B stellt, wie wir wissen (Nr. 1), das Einselement der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ dar und kommt also in jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vor. Die Summe aller Elemente von $\mathfrak{B}_1$ ist folglich eine das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltende Obermenge A auf B, also $\underline{1} \in B \subset A$. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_1$ bestimmt auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ die Faktorgruppe $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$, und diese erzwingt, wie uns aus § 15, Nr. 4, 1 bekannt ist, eine Überdeckung $\bar{\mathfrak{A}}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Wir wollen daran erinnern, daß die Überdeckung $\bar{\mathfrak{A}}$ ein Faktoroid auf $\mathfrak{G}$ darstellt, von dem jedes Element als die Summe aller je in demselben Element der Faktorgruppe $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ erklärt ist. Insbesondere kommt also die Menge A unter den Elementen von $\bar{\mathfrak{A}}$ vor; da die Menge A das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthält, stellt sie das Feld einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ dar, und es gilt $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Die Untergruppe $\mathfrak{B}$ ist invariant in $\mathfrak{A}$, da sie dieselbe Eigenschaft sogar in $\mathfrak{G}$ besitzt, und es gilt offenbar $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Somit haben wir folgendes Resultat erhalten:

Die durch die Faktorgruppe $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ *erzwungene Überdeckung der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *wird von der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ *dargestellt, wobei das Feld der in* $\mathfrak{G}$ *invarianten Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *als die Summe aller in der Untergruppe* $\mathfrak{B}_1$ *enthaltenen Elemente von* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *erklärt ist. Die Untergruppe* $\mathfrak{B}_1$ *stellt die Faktorgruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *dar.*

2. *Reihen von Faktorgruppen.* Wir betrachten eine Reihe von Faktoroiden auf der Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$((\bar{\mathfrak{A}}) =) \quad \bar{\mathfrak{A}}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{\mathfrak{A}}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1).$$

Nach Nr. 2 ist jedes Glied $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ dieser Reihe eine Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\gamma$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ und wird von einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{A}_\gamma$ bestimmt $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Die Reihe $(\bar{\mathfrak{A}})$ besteht also aus Faktorgruppen auf $\mathfrak{G}$,

$$((\bar{\mathfrak{A}}) =) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\alpha,$$

wobei die Untergruppen $\mathfrak{A}_\gamma$ ebenfalls eine Reihe $(\mathfrak{A})$ bilden (§ 25, Nr. 3):

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha.$$

Wir sagen, $(\bar{\mathfrak{A}})$ *sei eine Reihe von Faktorgruppen auf der Gruppe* $\mathfrak{G}$, und schreiben $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$.

Die Theorie der Reihen von Faktorgruppen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein Spezialfall derjenigen Theorie, die wir für Reihen von Faktoroiden entwickelt haben (§ 17). Das Neue in diesem besonderen Fall besteht darin, daß gewisse Sachverhalte, die in der Theorie der Reihen von Faktoroiden postuliert werden müssen, im Fall von Faktorgruppen automatisch auftreten. Dadurch gewinnt die Theorie der Reihen von Faktorgruppen im Vergleich mit der allgemeineren Theorie der Reihen von Faktoroiden an Einfachheit.

Insbesondere sind je zwei Reihen von Faktorgruppen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ zueinander komplementär (Nr. 3), und es gilt der folgende Satz (§ 17, Nr. 6; § 25, Nr. 3).

Satz. *Es seien*

$$((\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\alpha,$$
$$((\mathfrak{G}/\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_\beta$$

beliebige Reihen von Faktorgruppen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ *mit den Längen* α, β $(\geqq 1)$. *Die Reihen* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *besitzen gleichbasig verkettete Verfeinerungen* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_*)$ *mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern. Diese Verfeinerungen* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_*)$ *sind durch die in* § 17, Nr. 6 *beschriebene Konstruktion gegeben, und ihre Glieder* $\mathring{\bar{\mathfrak{A}}}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$ *bzw.* $\mathring{\mathfrak{B}}_{\delta,\mu} = \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ *sind durch die in* $\mathfrak{G}$ *invarianten Untergruppen*

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu) \; (= \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{B}_\nu)$$

bzw.

$$\mathfrak{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu) \; (= \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\delta \mathfrak{A}_\mu)$$

bestimmt (dabei ist $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$; $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta$*).*

6. Übungsaufgaben.

1. Die Ordnung jeder Faktorgruppe auf einer endlichen Gruppe von der Ordnung N ist ein Teiler von N.

2. In der vollständigen Gruppe der euklidischen Bewegungen auf der Geraden bzw. in der Ebene ist die aus allen Bewegungen $\boldsymbol{f}[a]$ bzw. $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ bestehende Untergruppe (§ 19,7,1) invariant. Die durch diese Untergruppe bestimmte Faktorgruppe wird von genau zwei Elementen gebildet; das eine setzt sich aus allen Bewegungen $\boldsymbol{f}[a]$ bzw. $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ und das andere aus allen Bewegungen $\boldsymbol{g}[a]$ bzw. $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ zusammen.

3. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und die Untergruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist. Dann sind die Faktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ adjungiert (§ 15, Nr. 3,4; § 23, Nr. 3).

4. Zwei Ketten von Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\{\underline{1}\}$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzen stets isomorphe Verfeinerungen (*Satz von* JORDAN-HÖLDER-SCHREIER) (vgl. § 16, Nr. 4,4).

§ 26. Deformationen und die Isomorphiesätze

1. Deformationen von Gruppen. Wir betrachten beliebige Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ und setzen die Existenz einer Deformation $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ voraus. Wir fragen: Wenn eines der Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe ist, was kann von dem anderen gesagt werden?

1. *Deformationen von Gruppen auf Gruppoide.* Es gilt folgendes: *Wenn $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, so gilt dasselbe von $\mathfrak{G}^*$. Ferner stellt das $\boldsymbol{d}$-Bild des Einselements von $\mathfrak{G}$ das Einselement von $\mathfrak{G}^*$ und das $\boldsymbol{d}$-Bild des zu einem beliebigen Element $a \in \mathfrak{G}$ inversen Elements das zu dem $\boldsymbol{d}$-Bild von a inverse Element dar.*

Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst beachten, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ assoziativ ist (§ 13, Nr. 6,2). Es sei $\underline{1}^*$ das $\boldsymbol{d}$-Bild des Einselements $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, also $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\underline{1}$. Nach § 18, Nr. 7,4 stellt $\underline{1}^*$ das Einselement des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ dar. Ferner sei $a^* \in \mathfrak{G}^*$ ein beliebiges Element in $\mathfrak{G}^*$. Da $\boldsymbol{d}$ eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{G}$ *auf* das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ darstellt, gibt es wenigstens ein Element $a \in \mathfrak{G}$, für das $a^* = \boldsymbol{d}a$ ist. Aus $aa^{-1} = \underline{1}$ ergibt sich $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\,\underline{1}$, also $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$, und ähnlich folgt aus $a^{-1}a = \underline{1}$ die Beziehung $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\,\underline{1}$, also $\boldsymbol{d}a^{-1} \cdot a^* = \underline{1}^*$. Wir sehen, daß das $\boldsymbol{d}$-Bild des zu einem beliebigen Element $a \in \mathfrak{G}$ inversen Elements mit dem zu dem $\boldsymbol{d}$-Bild von a inversen Element identisch ist, also $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Damit ist das Gewünschte bewiesen. Zusammenfassend können wir sagen, daß eine Deformation eine Gruppe stets wieder auf eine Gruppe abbildet und dabei die Einselemente bzw. die inversen Elemente auf Elemente derselben Art abgebildet werden.

Aus diesem Resultat kann insbesondere auf den folgenden Sachverhalt geschlossen werden: *Sind zwei Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorph und ist eines von ihnen eine Gruppe, so gilt dies auch von dem anderen.* In der Tat, sind die Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorph, so gibt es einen Isomorphismus des Gruppoids $\mathfrak{G}$