7. Übungsaufgaben.

1. In einem Gruppoid $\mathfrak{G}$, in dem je zwei auf ihm liegende Faktoroide komplementär sind, besitzen beliebige Reihen von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$, $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ gleichbasig verkettete Verfeinerungen.

§ 18. Spezielle Gruppoide

Einige ausgezeichnete Arten von Gruppoiden, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, sind durch besondere Eigenschaften der Multiplikation gekennzeichnet, und ihre Untersuchung knüpft unmittelbar an die in § 11, Nr. 2 angestellten Überlegungen an. Wir wollen uns jedoch mit speziellen Gruppoiden erst an dieser Stelle beschäftigen, um der Tatsache Ausdruck zu verleihen, daß die vorangehenden Erörterungen für die allgemeinsten Gruppoide, ohne Bezug auf irgendwelche besonderen Eigenschaften dieser Gruppoide, ihre Gültigkeit behalten. Für unsere weiteren Ausführungen sind insbesondere die *assoziativen Gruppoide* (*Halbgruppen*), ferner die *Divisionsgruppoide mit eindeutiger Division* (*Quasigruppen*) und *Gruppoide mit Einselement* von besonderer Wichtigkeit. Wegen ihrer Bedeutung in verschiedenen Zweigen der Algebra wollen wir auch die *Brandtschen Gruppoide* kurz besprechen, obwohl diese in gewissem Sinn die Grenzen unserer Begriffsbildung überschreiten.

1. Assoziative Gruppoide (Halbgruppen). 1. *Definition.* Den Begriff eines assoziativen Gruppoids haben wir bereits in § 12, Nr. 7,2 erklärt, und zwar so, daß jede dreigliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$ genau ein Produktelement besitzt. Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ heißt also *assoziativ*, wenn für je drei Elemente $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ die Gleichheit $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$ besteht. Assoziative Gruppoide werden auch *Halbgruppen* genannt.

2. *Der Hauptsatz über assoziative Gruppoide.* Wir wollen zunächst den *Hauptsatz über assoziative Gruppoide* herleiten:

In einem assoziativen Gruppoid $\mathfrak{G}$ besitzt jede n-gliedrige Folge von Elementen genau ein Produktelement ($n \geqq 2$). *Für beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ stellt also das Symbol $a_1 \ldots a_n$ genau ein Element in $\mathfrak{G}$ dar.*

Zum Beweis betrachten wir ein assoziatives Gruppoid $\mathfrak{G}$ und wenden die vollständige Induktion an.

Unsere Behauptung trifft natürlich für $n = 2$ zu, wie aus dem Multiplikationsbegriff unmittelbar hervorgeht. Wir haben also folgendes zu zeigen: Ist $n > 2$ und trifft die Behauptung für jede höchstens $(n-1)$-gliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$ zu, so behält sie ihre Gültigkeit auch für jede n-gliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$.

Es sei also $n > 2$. Wir nehmen an, unsere Behauptung bestehe für jede höchstens $(n-1)$-gliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$. Wir betrachten n beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$. Sodann stellt jedes Symbol

$$a_1, a_2 \ldots a_n; \quad a_1 a_2, a_3 \ldots a_n; \quad \ldots; \quad a_1 \ldots a_{n-1}, a_n$$

ein bestimmtes Element in $\mathfrak{G}$ dar. Wir haben zu zeigen, daß alle Elemente

$$a_1(a_2 \ldots a_n), (a_1 a_2)(a_3 \ldots a_n), \ldots, (a_1 \ldots a_{n-1}) a_n$$

übereinstimmen. Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß jedes der genannten Elemente z. B. mit dem Element $a_1(a_2 \cdots a_n)$ übereinstimmt, d. h. daß für $k = 1, \ldots, n-1$ die Gleichheit

$$(a_1 \ldots a_k)(a_{k+1} \ldots a_n) = a_1(a_2 \ldots a_n) \tag{1}$$

erfüllt ist. Nun ist die Formel (1) offenbar für $k = 1$ richtig. Wir haben also nur den Fall $k \geqq 2$ zu betrachten. In diesem Fall stellt das Symbol $a_1 \ldots a_k$ das Produktelement einer wenigstens zwei- und höchstens $(n-1)$-gliedrigen Folge dar; dieses Element ist nach unserer Annahme mit $a_1(a_2 \ldots a_k)$ identisch. Wir haben also $(a_1 \ldots a_k)(a_{k+1} \ldots a_n) = (a_1(a_2 \ldots a_k))(a_{k+1} \ldots a_n)$. Da aber das Gruppoid $\mathfrak{G}$ assoziativ ist, ist das rechts stehende Element mit $a_1((a_2 \ldots a_k)(a_{k+1} \ldots a_n))$, d. h. mit $a_1(a_2 \ldots a_n)$ identisch. Es ergibt sich somit die Formel (1).

Ein ähnliches Resultat besteht natürlich auch für Folgen von Teilmengen in $\mathfrak{G}$.

3. *Folgerungen aus dem Hauptsatz.* a) Eindeutigkeit einer zusammengesetzten Permutation. Der obige Hauptsatz findet eine wichtige Anwendung bei der Zusammensetzung von Permutationen einer (endlichen oder unendlichen) Menge.

Es seien $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$ beliebige Permutationen einer (nicht leeren) Menge H. Was soll unter einer aus den Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzten Permutation verstanden werden? Im Fall $n = 2$ ist dies, wie wir wissen (§ 8, Nr. 7), die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1$. Im Fall $n = 3$ erklären wir jede aus den Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ zusammengesetzte Permutation so, daß wir darunter eine der Permutationen $\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ verstehen; wir bezeichnen eine solche Permutation mit $\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1$. Das Symbol $\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1$ bedeutet also sowohl die aus $\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3$ als auch die aus $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2$ zusammengesetzte Permutation. Im Fall $n = 4$ wird unter einer aus den Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ zusammengesetzten Permutation eine der Permutationen $\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ verstanden, und wir schreiben $\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1$. Das Symbol $\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1$ bezeichnet also eine der folgenden Permutationen der Menge H:

$$\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1)), \ \boldsymbol{p}_4((\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1), \ (\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{p}_1), \ (\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3 \boldsymbol{p}_2))\boldsymbol{p}_1, \ ((\boldsymbol{p}_4 \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1.$$

Allgemein (für $n \geqq 2$) erklären wir eine aus $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ zusammengesetzte Permutation auf folgende Weise: Eine solche Permutation ist eine der Permutationen

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{p}_{n-1} \cdots \boldsymbol{p}_1), \quad (\boldsymbol{p}_n \boldsymbol{p}_{n-1})(\boldsymbol{p}_{n-2} \cdots \boldsymbol{p}_1), \quad \ldots, \quad (\boldsymbol{p}_n \cdots \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1,$$

wobei jedes Klammersymbol eine beliebige, aus den in ihm stehenden Permutationen zusammengesetzte Permutation bedeutet, und zwar in der Reihenfolge von rechts nach links. Eine aus $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ zusammengesetzte Permutation wird mit $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$ bezeichnet.

Nach dieser Definition hat also das Symbol $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$ die Bedeutung eines der n-gliedrigen Folge $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ zugeordneten Produktelements in demjenigen Gruppoid, dessen Feld von allen Permutationen der Menge H gebildet und in dem die Multiplikation mit Hilfe der Zusammensetzung von Permutationen definiert wird. Da aber bei einer Zusammensetzung von Permutationen das Assoziativgesetz gilt (§ 8, Nr. 7, 3), ist das erwähnte Gruppoid assoziativ, und folglich *gibt es nach dem Hauptsatz genau eine aus den Permutationen* $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ *zusammengesetzte Permutation* $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$. Dieses Resultat drücken wir auch so aus, daß *bei derselben Reihenfolge von Permutationen die aus denselben zusammengesetzte Permutation von der Art der Zusammensetzung nicht abhängt.* Nach diesem Resultat erhält man also das Bild $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1 x$ eines beliebigen Elements $x \in H$ etwa nach der Formel

$$\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1 x = \boldsymbol{p}_n [\boldsymbol{p}_{n-1} (\ldots (\boldsymbol{p}_2 (\boldsymbol{p}_1 x)) \ldots)],$$

d. h. so, daß man zunächst das $\boldsymbol{p}_1$-Bild $\boldsymbol{p}_1 x$ des Elements x, sodann das $\boldsymbol{p}_2$-Bild $\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x)$ von $\boldsymbol{p}_1 x$, usw., und schließlich das $\boldsymbol{p}_n$-Bild $\boldsymbol{p}_n[\boldsymbol{p}_{n-1}(\ldots(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x))\ldots)]$ von $\boldsymbol{p}_{n-1}(\ldots(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x))\ldots)$ bestimmt. Daraus ist auch ohne weiteres zu entnehmen: Wenn die Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ ein Element $x \in H$ unverändert lassen, so gilt dasselbe auch von der zusammengesetzten Permutation $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$.

b) Zusammensetzung von Permutationen aus zyklischen Permutationen. Wir wollen die obigen Erkenntnisse benutzen, um einige Tatsachen bezüglich Permutationen einer endlichen Menge anzugeben. Wir setzen voraus, die Menge H sei von einer endlichen Anzahl n ($\geqq 1$) von Elementen gebildet.

Zunächst zeigen wir, daß *jede Permutation der Menge H aus endlich vielen zyklischen Permutationen, deren Zyklen keine gemeinsamen Elemente besitzen, zusammengesetzt werden kann.*

Zu diesem Zweck betrachten wir eine beliebige Permutation $\boldsymbol{p}$ der Menge H. Wie wir in § 8, Nr. 5 gezeigt haben, wird die Permutation $\boldsymbol{p}$ von endlich vielen echten zyklischen Permutationen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ erzeugt, d. h., es gibt eine Zerlegung $\bar{H} = \{\bar{a}, \ldots, \bar{m}\}$ der Menge H derart, daß jedes ihrer Elemente $\bar{a}, \ldots, \bar{m}$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant bleibt und die partiellen Abbildungen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ echte zyklische Permutationen der Elemente $\bar{a}, \ldots, \bar{m}$ sind. Es sei x ein beliebiges Element von H und $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ die auf folgende Weise definierte zyklische Permutation der Menge H: Bei der Abbildung $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ wird jeder Punkt $x \in \bar{x}$ auf das $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$-Bild $\boldsymbol{p}_{\bar{x}} x$ des Punktes x abgebildet; alle übrigen Punkte der Menge H, insofern es solche gibt, bleiben unverändert. Nach dieser Definition ist also $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ wirklich eine zyklische Permutation; der Zyklus von $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ fällt mit demjenigen der Permutation $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ zusammen. Wir sehen, daß die beiden Permutationen $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}, \boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ mittels desselben vereinfachten Symbols ausgedrückt werden können. Unsere Behauptung ist offenbar bewiesen, wenn wir feststellen können, daß sich die Permutation $\boldsymbol{p}$ aus den zyklischen Permutationen $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$ zusammensetzt, also $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}$ gilt.

Es sei $x \in H$ ein beliebiger Punkt und $\bar{x} \in \bar{H}$ das ihn enthaltende Element von $\bar{H}$, also $x \in \bar{x} \in \bar{H}$. Die Permutation $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ bildet also den Punkt x auf den Punkt $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}x$ ab, während alle übrigen Permutationen $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$, sofern es solche gibt, den Punkt x unverändert lassen. Da bei derselben Reihenfolge von Permutationen die aus denselben zusammengesetzte Permutation von der Art der Zusammensetzung nicht abhängt, gilt

$$\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}x = (\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots)\boldsymbol{q}_{\bar{x}} (\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}})x,$$

wobei natürlich im Fall $\bar{x} = \bar{m}\,(\bar{x} = \bar{a})$ das erste (letzte) Klammersymbol auf der rechten Seite nicht gelesen wird. Ist $\bar{x} \neq \bar{a}$, so gilt $(\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}})x = x$, da alle Permutationen, aus denen die Permutation $(\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}})$ zusammengesetzt ist, den Punkt x unverändert lassen. Wir haben also zunächst $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \cdots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}x = (\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots)\boldsymbol{q}_{\bar{x}}x$. Ähnlich sehen wir, daß das auf der rechten Seite dieser Gleichheit stehende Element mit $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}x$ übereinstimmt. In Hinblick auf die Definition der Permutation $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ erhalten wir also $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}x = \boldsymbol{p}_{\bar{x}}x$ und ferner $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}x = \boldsymbol{p}x$ nach Definition von $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$. Auf diese Weise ergibt sich $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}x = \boldsymbol{p}x$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen beachten, daß wir in der Formel $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}$ die Anordnung der Permutationen $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$ beliebig ändern können, da bei jeder Anordnung die Elemente der Zerlegung $\bar{H}$ so bezeichnet werden können, daß die erwähnte Formel unverändert bleibt.

Wenn wir die Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n (n \geqq 2)$ der Menge H mit Hilfe von zweizeiligen oder vereinfachten Symbolen ausgedrückt haben, so drücken wir die zusammengesetzte Permutation $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$ so aus, daß wir die Symbole der Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ nebeneinander aufschreiben, und zwar in der umgekehrten Reihenfolge. Nach dieser Verabredung und nach unserer Art der Bezeichnung von Permutationen mit Hilfe echter zyklischer Permutationen (§ 8, Nr. 6) können wir z. B. die Formel $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = (a,d)(b,c)$ entweder so auffassen, daß die durch das Symbol auf der linken Seite erklärte Permutation der Menge $\{a, b, c, d\}$ aus den zyklischen Permutationen (b, c), (a, d) zusammengesetzt ist, oder so, daß sie von den echten zyklischen Permutationen (a, d), (b, c) erzeugt wird.

4. *Schwach assoziative Gruppoide* (*schwache Halbgruppen*). Unlängst hat V. Devidé den Begriff der assoziativen Gruppoide auf folgende Weise verallgemeinert: Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ heißt *schwach assoziativ*, wenn es schlichte Abbildungen $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf sich derart gibt, daß für je drei Elemente $a, b, c \in \mathfrak{G}$ die Gleichheit $(ab)c = \boldsymbol{f}a(\boldsymbol{g}b \cdot \boldsymbol{h}c)$ gilt. Schwach assoziative Gruppoide können auch als *schwache Halbgruppen* bezeichnet werden. Offenbar geht bei identischen Abbildungen $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ die schwache Assoziativität des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in die Assoziativität über.

Wir wollen uns mit dem folgenden Beispiel eines schwach assoziativen Gruppoids $\mathfrak{G}$ begnügen.

Das Feld von $\mathfrak{G}$ sei die Menge der von Null verschiedenen rationalen, reellen oder komplexen Zahlen. Die Multiplikation in $\mathfrak{G}$ sei die arithmetische

Division. Mit $\circ$ bezeichnen wir die arithmetische Multiplikation. Dann gilt für $a, b, c \in \mathfrak{G}$

$$(a b) c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \circ c} = \frac{a}{\frac{b}{\frac{1}{c}}} = a\left(b \frac{1}{c}\right).$$

Wir sehen, daß die schlichten Abbildungen $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}$ (identische Abbildung), $\boldsymbol{h} c = \frac{1}{c}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf sich der obigen Forderung entsprechen.

2. Gruppoide mit Kürzungsregeln. Wir nennen das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *Gruppoid mit Kürzungsregeln*, wenn für beliebige Elemente $a, x, y \in \mathfrak{G}$ stets $x = y$ ist, sobald die Beziehungen $ax = ay$ oder $xa = ya$ gelten.

In einem Gruppoid mit Kürzungsregeln kann also jede Gleichheit $ax = ay$ oder $xa = ya$ durch a „gekürzt" werden.

Die Multiplikationstabelle eines endlichen Gruppoids $\mathfrak{G}$ mit Kürzungsregeln hat die folgende Eigenschaft, die ihrerseits diese Art von Gruppoiden charakterisiert: In jeder Zeile und Spalte kommen rechts vom vertikalen bzw. unter dem horizontalen Eingang die Symbole aller Elemente des Gruppoids $\mathfrak{G}$ vor. Wenn wir nämlich annehmen, daß in einer Zeile $[a]$ (d. h. rechts vom Buchstaben a des vertikalen Eingangs) nicht alle Symbole von Elementen in $\mathfrak{G}$ vorkommen, so tritt in der Zeile $[a]$ in zwei verschiedenen Spalten $[x]$, $[y]$ (d. h. unter den Buchstaben x, y des horizontalen Eingangs) das Symbol ein und desselben Elements von $\mathfrak{G}$ auf; wir haben also $ax = ay$ und zugleich $x \neq y$, was jedoch den Kürzungsregeln widerspricht. Wenn umgekehrt die Multiplikationstabelle eines Gruppoids $\mathfrak{G}$ die erwähnte Eigenschaft besitzt, so gelten für alle Elemente $a, x, y \in \mathfrak{G}$, $x \neq y$ die Beziehungen $ax \neq ay$, $xa \neq ya$, woraus die Tatsache folgt, daß es sich um ein Gruppoid mit Kürzungsregeln handelt.

3. Divisionsgruppoide. 1. *Definition.* Wir nennen das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *Divisionsgruppoid*, wenn für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ die beiden Gleichungen $ax = b$, $ya = b$ durch geeignete Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ befriedigt werden können.

Sind bei jeder Wahl der Elemente a, b die Lösungen x, y eindeutig bestimmt, so heißt $\mathfrak{G}$ *Divisionsgruppoid mit eindeutiger Division.* Divisionsgruppoide mit eindeutiger Division werden auch *Quasigruppen* genannt.

Der Leser möge sich von der Richtigkeit der folgenden Sätze überzeugen:

Für jedes Divisionsgruppoid $\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.

Jede Quasigruppe ist ein Gruppoid mit Kürzungsregeln.

Jedes endliche Gruppoid mit Kürzungsregeln ist eine Quasigruppe.

2. *Beispiele.* Die Gruppoide $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ sind Quasigruppen. In der Tat, zu je zwei Elementen $a, b \in \mathfrak{Z}$ gibt es genau ein Element $x \in \mathfrak{Z}$ und genau ein Element $y \in \mathfrak{Z}$, das den beiden Gleichungen $a + x = b$, $y + a = b$ genügt, nämlich $x = -a + b$, $y = b - a$. Ähnlich gibt es zu je zwei Elementen $a, b \in \mathfrak{Z}_n$ eindeutig bestimmte Elemente $x, y \in \mathfrak{Z}_n$, für die der Rest der Zahl

$a+x$ bzw. $y+a$ bei Division durch n gleich b ist, nämlich $x=y=-a+b$ oder $x=y=n-a+b$, je nachdem, ob $-a+b\geqq 0$ oder $-a+b<0$ ist. Zu je zwei Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ gibt es eindeutig bestimmte, den Gleichungen $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ genügende Permutationen $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathfrak{S}_n$, nämlich $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$, wobei $\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$ die aus der inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ und der Permutation $\boldsymbol{q}$ zusammengesetzte Permutation darstellt, und ähnlich $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$.

4. Gruppoide mit Einselement. 1. *Definition.* Ein Element $\underline{1}\in\mathfrak{G}$ heißt *Einselement* oder *Einheit* des Gruppoids $\mathfrak{G}$, wenn das Produkt von $\underline{1}$ mit einem beliebigen Element $a\in\mathfrak{G}$ und zugleich das Produkt von a mit $\underline{1}$ mit dem Element a zusammenfällt.

Ein Einselement $\underline{1}\in\mathfrak{G}$ ist also durch die für alle Elemente $a\in\mathfrak{G}$ geltenden Gleichheiten $\underline{1}\,a=a\,\underline{1}=a$ charakterisiert.

Es ist leicht einzusehen, daß *jedes Gruppoid höchstens ein Einselement besitzen kann.* In der Tat, sind $\underline{1}, x\in\mathfrak{G}$ Einselemente eines Gruppoids $\mathfrak{G}$, so ist einerseits $\underline{1}\,x=x$ (wegen der für alle $a\in\mathfrak{G}$ geltenden Gleichheit $\underline{1}\,a=a$) und anderseits $\underline{1}\,x=\underline{1}$ (wegen $ax=a$ für alle $a\in\mathfrak{G}$). Daraus folgt die Gleichheit $\underline{1}=x$.

Wenn in einem Gruppoid $\mathfrak{G}$ ein Einselement vorkommt, so heißt $\mathfrak{G}$ *Gruppoid mit Einselement.*

Wir wollen beachten, daß eine Multiplikationstabelle eines beliebigen endlichen Gruppoids mit Einselement folgende charakteristische Eigenschaft besitzt: Die mit dem Symbol des Einselements im vertikalen (horizontalen) Eingang der Multiplikationstabelle beginnende Zeile (Spalte) enthält an den weiteren Stellen dieselben Symbole in derselben Reihenfolge wie der horizontale (vertikale) Eingang.

2. *Beispiele.* Die $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n\geqq 1)$ sind Gruppoide mit Einselement. Das Einselement des Gruppoids $\mathfrak{Z}$ ist die Zahl 0 wegen der für jedes Element $a\in\mathfrak{Z}$ geltenden Gleichheiten $0+a=a+0=a$. Dasselbe gilt für das Gruppoid $\mathfrak{Z}_n$, denn die Reste der Zahlen $0+a$, $a+0$ bei Division durch n sind für jedes Element $a\in\mathfrak{Z}_n$ gleich a. Als Einselement des Gruppoids $\mathfrak{S}_n$ tritt die identische Permutation $\boldsymbol{e}$ der Menge H auf (wegen der für jedes Element $\boldsymbol{p}\in\mathfrak{S}_n$ geltenden Gleichheiten $\boldsymbol{pe}=\boldsymbol{ep}=\boldsymbol{p}$).

Demgegenüber besitzt z. B. das in § 14, Nr. 5,3 beschriebene Gruppoid kein Einselement.

5. Weitere ausgezeichnete Arten von Gruppoiden. Gruppen. 1. Spezielle Gruppoide können gleichzeitig mehrere, ja sogar alle der oben beschriebenen Eigenschaften besitzen. Je nach der Art dieser letzteren sprechen wir dann z. B. von *Halbgruppen mit Kürzungsregeln, Quasigruppen mit Einselement, assoziativen Quasigruppen* usw. Einige dieser speziellen Gruppoide haben besondere Namen bekommen: Halbgruppen mit Kürzungsregeln werden auch *Semigruppen* genannt; Quasigruppen mit Einselement heißen Loops.

Von besonderer Wichtigkeit für unsere weiteren Ausführungen sind die assoziativen Quasigruppen. Wir wollen zunächst zeigen, daß *in jeder assoziativen Quasigruppe immer ein Einselement enthalten ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ eine assoziative Quasigruppe. Wir wählen ein beliebiges Element $a \in \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ ein Divisionsgruppoid ist, gibt es ein Element $e_r \in \mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $ae_r = a$. Wir zeigen, daß dieses Element e_r das Einselement von $\mathfrak{G}$ ist. Wir betrachten ein beliebiges Element $b \in \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ ein Divisionsgruppoid ist, gibt es ein Element $y \in \mathfrak{G}$ so, daß $ya = b$ ist, und ferner gelten wegen der vorausgesetzten Assoziativität die Gleichheiten $be_r = (ya)e_r = y(ae_r) = ya = b$. Wir haben also $be_r = b$. Ähnlich stellen wir fest, daß das durch $e_l a = a$ definierte Element $e_l \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $e_l b = b$ erfüllt. Da nun einerseits $e_l e_r = e_l$ (wegen der für alle $b \in \mathfrak{G}$ geltenden Gleichheit $be_r = b$) und anderseits $e_l e_r = e_r$ (wegen $e_l b = b$ für alle $b \in \mathfrak{G}$) ist, gilt $e_l = e_r$, und wir sehen, daß das Element e_r tatsächlich die charakteristischen Eigenschaften des Einselements von $\mathfrak{G}$ besitzt. – Wir haben bei diesem Beweis von der Eindeutigkeit der Division im Gruppoid $\mathfrak{G}$ keinen Gebrauch gemacht.

Assoziative Quasigruppen werden *Gruppen* genannt. Unser Resultat kann also so ausgedrückt werden, daß *jede Gruppe ein Einselement besitzt.* So sind z. B. die Gruppoide $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ ($n \geqq 1$) Gruppen. Wir wollen darauf hinweisen, daß die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ als die *symmetrische Permutationsgruppe von der Ordnung n* bezeichnet wird.

Alle oben angeführte Arten von Gruppoiden können natürlich auch noch andere spezielle Eigenschaften besitzen. Wenn sie z. B. abelsch sind, so sprechen wir von *abelschen Halbgruppen* usw. Abelsche Halbgruppen, deren Elemente idempotent sind, heißen *Halbverbände.*

2. *Brandtsche Gruppoide.* Wir wollen zu diesem Kapitel noch eine kurze Beschreibung der Brandt*schen Gruppoide* hinzufügen. Wir bemerken, daß diese im Jahre 1927 von dem deutschen Algebraiker H. Brandt auf Grund seiner Untersuchungen aus der Theorie der quadratischen Formen definierten Gebilde die ersten waren, die mit dem Namen *Gruppoid* benannt wurden. Erst etwa zehn Jahre später kommt in der Literatur der Name Gruppoid in dem in diesem Buch gebrauchten, jetzt allgemein verwendeten Sinn zum erstenmal vor.

Die Brandtschen Gruppoide treten zunächst aus dem Rahmen unserer Betrachtungen insofern heraus, als in solchen Gruppoiden die Produktbildung nicht für alle zweigliedrigen Folgen von Elementen erklärt zu sein braucht.

Es sei G eine nicht leere Menge von Elementen und zwischen ihnen ein Verknüpfungsgesetz, das wir wiederum Multiplikation (Verknüpfungsregel) nennen wollen, gegeben, das, auf gewisse zweigliedrige Folgen von Elementen $a, b \in G$ angewandt, ein Element $c \in G$ liefert, auf gewisse andere zweigliedrige Folgen von Elementen $a, b \in G$ dagegen nicht angewandt werden kann. Im ersten Fall heißt *a mit b multiplizierbar*, und $c = ab$ heißt das *Produkt aus a und b.* Im zweiten Fall heißt *a nicht mit b multiplizierbar*, und ein Produkt ab existiert nicht.

Diese Situation könnte dem bisher betrachteten, durch die Möglichkeit einer Produktbildung für alle zweigliedrigen Folgen von Elementen charakterisierten Multiplikationsbegriff untergeordnet werden. Zu diesem Zweck würde es genügen, ein neues Element für die bisher nicht existierenden Produkte einzuführen. Wir wollen jedoch von diesem Vorgehen nicht Gebrauch machen, da es lediglich die formelle Seite unserer Überlegungen beeinflussen würde und von geringem Vorteil zu sein scheint.

Eine Menge G mit Elementen, die in der oben beschriebenen Weise verknüpft sind, soll BRANDT*sches Gruppoid* genannt werden, wenn die folgenden vier Postulate erfüllt sind:

1. *Wenn zwischen drei Elementen a, b, c die Gleichheit $ab = c$ besteht, so ist jedes der drei Elemente a, b, c durch die beiden anderen eindeutig bestimmt.*

2. *Wenn ab und bc existiert, so existiert auch $(ab)c$ und $a(bc)$; wenn ab und $(ab)c$ existiert, so existiert auch bc und $a(bc)$; wenn bc und $a(bc)$ existiert, so existiert auch ab und $(ab)c$; jedesmal ist $(ab)c = a(bc)$, so daß dafür auch abc geschrieben werden kann.*

3. *Für irgendein Element a existieren stets die folgenden eindeutig bestimmten Elemente: die Rechtseinheit e, die Linkseinheit e' und das sogenannte inverse Element a^* derart, daß die Beziehungen $ae = e'a = a$, $a^*a = e$ gelten.*

4. *Für zwei beliebige Einheiten e, e' gibt es stets Elemente a, so daß e Rechtseinheit und e' Linkseinheit von a ist.*

Die Postulate 1 und 2 enthalten insbesondere die Folgerungen $aa^* = e'$, $ea^* = a^*$, $a^*e' = a^*$, $ee = e$, $e'e' = e'$, deren Gültigkeit leicht nachgewiesen werden kann; z. B. für die erste Gleichheit: Aus $e'a = a = ae = a(a^*a) = (aa^*)a$ folgt $e'a = (aa^*)a$ und daraus $e' = aa^*$.

Wir sehen, daß a das inverse Element von a^* darstellt, so daß man auch von zwei zueinander inversen Elementen sprechen kann; Rechtseinheit und Linkseinheit vertauschen sich beim Übergang zum inversen Element.

Ferner sehen wir, daß die Gleichung $ee = e$ für die Einheiten charakteristisch ist: Nicht nur genügt jede Rechts- bzw. Linkseinheit dieser Gleichung, sondern es stellt auch jedes dieser Gleichung genügende Element e eine Rechts- und Linkseinheit für das Element e dar. In Verbindung mit den Postulaten 2 und 1 zeigt die erwähnte Gleichung, daß jede Einheit e Rechtseinheit für alle Elemente a, für die ae, und Linkseinheit für alle Elemente b ist, für die eb existiert. Die Einheiten gestatten uns, die Multiplizierbarkeitsbedingungen sehr einfach zu formulieren: Zwei Elemente a, b sind in dieser Reihenfolge dann und nur dann multiplizierbar, wenn die Rechtseinheit von a mit der Linkseinheit von b zusammenfällt.

Die Existenz des inversen Elementes ergibt: Wenn für drei Elemente a, b, c eine Gleichung $ab = c$ besteht, so gilt gleichzeitig $a^*c = b$, $cb^* = a$, $b^*a^* = c^*$, $c^*a = b^*$, $bc^* = a^*$. Das inverse Element a^* wird auch mit a^{-1} bezeichnet. Die Produkte aa^{-1} oder $a^{-1}a$ sind nur da zu berücksichtigen, wo sie für sich allein stehen, während sie sonst immer fortgelassen werden dürfen. Ist $n = ab \cdots m$ ein Produkt aus beliebig vielen Elementen, so gilt für das inverse Element $n^{-1} = m^{-1} \cdots b^{-1}a^{-1}$.

Wir wollen uns mit diesen Bemerkungen begnügen, ohne auf die Theorie der BRANDTschen Gruppoide, die sich im wesentlichen mit der allgemeinen Gruppentheorie eng berührt, näher einzugehen. Wir führen jedoch ein einfaches Beispiel an, um den BRANDTschen Gruppoidbegriff zu illustrieren.

Es sei G das kartesische Quadrat einer nicht leeren Menge A (§ 1, Nr. 8). Die Elemente von G sind also zweigliedrige Folgen (a, b), wobei a, b alle Elemente von A durchlaufen. Wir definieren eine Multiplikation in der Menge G auf folgende Weise: Zwei Elemente $(a, b), (c, d) \in G$ sind in dieser Reihenfolge genau dann multiplizierbar, wenn $b = c$ gilt, und in diesem Fall ist $(a, b)(b, d) = (a, d)$ das entsprechende Produkt.

Die Menge G mit dieser Multiplikation stellt ein BRANDTsches Gruppoid dar. In der Tat, zunächst ist es leicht festzustellen, daß die Postulate 1 und 2 erfüllt sind. Ferner sind auch die Postulate 3 und 4 erfüllt: Für irgendein Element $(a, b) \in G$ existieren die Rechtseinheit (b, b), die Linkseinheit (a, a) und das inverse Element (b, a); für zwei beliebige Einheiten (b, b), (a, a) gibt es stets ein Element $(a, b) \in G$, für das (b, b) Rechtseinheit und (a, a) Linkseinheit von (a, b) ist. Die Menge G mit der betrachteten Multiplikation stellt also ein BRANDTsches Gruppoid dar.

Wenn man z. B. für A die Menge der in einer Ebene liegenden Punkte wählt, so kann jedem Element $(a, b)(a \neq b)$ bzw. (a, a) von G, die orientierte Strecke $\overrightarrow{ab}$ bzw. der Punkt a zugeordnet werden. Man erhält auf diese Weise ein BRANDTsches Gruppoid, dessen Feld durch Punkte und orientierte Strecken und dessen Multiplikation durch eine Aneinanderreihung dieser Elemente realisiert ist.

6. Verbände. Diesen Paragraphen wollen wir mit einer kurzen Besprechung der *Verbände*, deren Begriff mit den vorangehenden Ausführungen in engem Zusammenhang steht, beenden. Im wesentlichen sind Verbände Paare von übereinandergelagerten, d. h. auf demselben Feld erklärten Gruppoiden mit speziellen Eigenschaften, wobei die Multiplikationen dieser Gruppoide durch gewisse Beziehungen verknüpft sind. Die Verbandstheorie nimmt in der modernen Mathematik einen wichtigen Platz ein, nicht nur wegen ihres reichen Inhalts und ihrer formellen Schönheit, sondern hauptsächlich deshalb, weil sie die Eigenschaften von mannigfaltigen Gebilden, die in verschiedensten Gebieten der Mathematik als Realisierungen von Verbänden auftreten, von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu beschreiben vermag.

Es seien auf der Menge G zwei Multiplikationen gegeben. Um sie leicht voneinander unterscheiden zu können, wollen wir eine von ihnen als *obere* und die andere als *untere Multiplikation* bezeichnen. Das Produkt eines Elements $a \in G$ mit einem Element $b \in G$ in der oberen (unteren) Multiplikation wollen wir *Vereinigung* (*Durchschnitt*) des Elements a mit dem Element b nennen und mit $a \smile b$ $(a \frown b)$ bezeichnen. Ferner wollen wir das auf dem Feld G erklärte Gruppoid mit der oberen (unteren) Multiplikation als das *obere* (*untere*) *Gruppoid* bezeichnen.

1. *Definition.* Das von dem oberen und unteren Gruppoid gebildete Paar von Gruppoiden wird *Verband auf dem Feld G* oder einfach *Verband* genannt, wenn für alle Elemente $a, b, c \in G$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

a) $a \smile b = b \smile a$,	a′) $a \frown b = b \frown a$,
b) $a \smile a = a$,	b′) $a \frown a = a$,
c) $a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c$,	c′) $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c$,
d) $a \smile (a \frown b) = a$,	d′) $a \frown (a \smile b) = a$.

Wir sehen, daß jedes der beiden Gruppoide abelsch [a), a')] und assoziativ [c) c')] ist und von lauter idempotenten Elementen gebildet wird [b), b')]. Die Multiplikationen der beiden Gruppoide hängen durch die in den Formeln d), d') beschriebenen Beziehungen zusammen; diese Formeln drücken die sogenannten *Absorptionsgesetze* des Verbandes aus.

Ein Verband kann also auch als ein Paar von übereinandergelagerten und mit Hilfe der Absorptionsgesetze verbundenen Halbverbänden definiert werden.

2. *Beispiele.* [1] Die Menge G wird von allen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... gebildet; $a \smile b$ stellt das kleinste gemeinsame Vielfache und $a \frown b$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahl a und der Zahl b dar.

[2] Die Menge G besteht aus allen Teilmengen einer Menge. Dabei stellt $A \smile B$ die Summe und $A \frown B$ den Durchschnitt der Teilmenge A und der Teilmenge B dar.

[3] Die Menge G wird von allen Zerlegungen einer nicht leeren Menge gebildet. Dabei ist $\bar{A} \smile \bar{B}$ die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ und $\bar{A} \frown \bar{B}$ die größte gemeinsame Verfeinerung $(\bar{A}, \bar{B})$ der Zerlegung $\bar{A}$ und der Zerlegung $\bar{B}$.

3. *Grundlegende partielle Ordnungen eines Verbandes.* Es sei Γ ein Verband auf dem Feld G, und $a, b, c \in G$ seien beliebige Elemente.

Zunächst wollen wir zeigen, daß *die beiden Beziehungen*

$$a \smile b = b, \quad b \frown a = a \tag{o}$$

stets gleichzeitig gelten, d. h., wenn eine von ihnen erfüllt ist, so gilt dasselbe auch von der anderen.

Beweis. Aus der ersten Beziehung folgt wegen a') und d')

$$b \frown a = (a \smile b) \frown a = a \frown (a \smile b) = a;$$

ähnlich erhalten wir aus der zweiten Beziehung mit Hilfe von a) und d)

$$a \smile b = (b \frown a) \smile b = b \smile (b \frown a) = b.$$

Wenn wir jedem Element $a \in G$ alle den Beziehungen (o) genügenden Elemente $b \in G$ zuordnen, so erhalten wir eine mehrdeutige Abbildung der Menge G auf sich; diese Abbildung wollen wir mit $\boldsymbol{o}$ bezeichnen.

Die Abbildung $\boldsymbol{o}$ stellt eine antisymmetrische Kongruenz auf G dar. In der Tat, zunächst schließen wir aus den Beziehungen b) und b'), daß die Abbildung $\boldsymbol{o}$ reflexiv ist. Ferner folgen aus den Beziehungen $a \smile b = b$, $b \smile c = c$ im Hinblick auf c) die Gleichheiten $a \smile c = a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c = b \smile c = c$; wir sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{o}$ transitiv ist und somit eine Kongruenz auf der Menge G darstellt. Schließlich erhalten wir aus $a \smile b = b$, $b \smile a = a$ und aus a) die Gleichheit $a = b$.

Somit haben wir festgestellt, daß die Kongruenz $\boldsymbol{o}$ antisymmetrisch ist, d. h., daß die Abbildung $\boldsymbol{o}$ eine partielle Ordnung der Menge G darstellt. Wir wollen sie die *obere partielle Ordnung des Verbandes Γ* nennen.

Wir wollen daran erinnern, daß die Symbole $a \leqq b(\boldsymbol{o})$, $a \smile b = b$, $b \frown a = a$ dieselbe Bedeutung haben.

Analoge Überlegungen können wir anstellen, wenn die Rollen des oberen und des unteren Gruppoids vertauscht werden. Dann erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

Die beiden Beziehungen

$$b \smile a = a, \quad a \frown b = b \tag{u}$$

gelten stets gleichzeitig.

Wenn wir jedem Element $a \in G$ alle den Beziehungen (u) *genügenden Elemente $b \in G$ zuordnen, so erhalten wir eine antisymmetrische Kongruenz $\boldsymbol{u}$ auf G,* die wir die *untere partielle Ordnung des Verbandes Γ* nennen.

Wir sehen, daß die Symbole $a \leqq b(\boldsymbol{u})$, $b \smile a = a$, $a \frown b = b$ dieselbe Bedeutung haben.

Die obere und die untere partielle Ordnung werden zusammen als die *grundlegenden partiellen Ordnungen des Verbandes Γ* bezeichnet.

Die grundlegenden partiellen Ordnungen des Verbandes Γ sind zueinander invers, so daß $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}^{-1}$, $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}^{-1}$ ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß in der Kongruenz $\boldsymbol{o}$ ein beliebiges Element $b \in G$ in der Bildmenge jedes den Beziehungen (o) genügenden Elements $a \in G$ enthalten ist und eben diese Elemente a die $\boldsymbol{u}$-Bildmenge von b darstellen, wie aus (u) zu ersehen ist.

Wir wollen beachten, daß die Symbole $a \leqq b(\boldsymbol{o})$ und $b \leqq a(\boldsymbol{u})$ dieselbe Bedeutung haben.

Zum Beispiel erhalten wir in dem oben beschriebenen Verband [1] die obere (untere) partielle Ordnung so, daß wir jeder natürlichen Zahl $a \in G$ alle ihren positiven Vielfachen (Teiler) $b \in G$ zuordnen; in dem Verband [2] so, daß wir einer jeden Teilmenge $A \in G$ alle Obermengen (Untermengen) $B \in G$ von A zuordnen; in dem Verband [3] so, daß wir jeder Zerlegung $\bar{A} \in G$ alle Überdeckungen (Verfeinerungen) $\bar{B} \in G$ von $\bar{A}$ zuordnen.

In bezug auf die obere (untere) partielle Ordnung stellt das Element $a \smile b$ die obere (untere) und das Element $a \frown b$ die untere (obere) Grenze der beiden Elemente a, b dar.

Beweis. Da die obere und die untere partielle Ordnung zueinander invers sind, genügt es, die Richtigkeit dieser Behauptung etwa für die obere partielle Ordnung festzustellen. Wir beschränken uns auf das Element $a \smile b$.

Wir haben also folgendes zu zeigen: In bezug auf die Kongruenz $\boldsymbol{o}$ gilt $a \leqq a \smile b$, $b \leqq a \smile b$, und ferner folgt $a \smile b \leqq c$ aus $a \leqq c$, $b \leqq c$.

Die Gültigkeit der Beziehungen $a \leqq a \smile b$, $b \leqq a \smile b$ ergibt sich folgendermaßen (Nr. 6,1 c) b) a)):

$$a \smile (a \smile b) = (a \smile a) \smile b = a \smile b,$$
$$b \smile (a \smile b) = b \smile (b \smile a) = (b \smile b) \smile a = b \smile a = a \smile b.$$

Die Beziehungen $a \leqq c$, $b \leqq c$ besagen dasselbe wie die Gleichheiten $a \smile c = c$, $b \smile c = c$, aus denen sich wegen Nr. 6,1 c)

$$(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c) = a \smile c = c$$

ergibt, so daß $a \smile c \leqq c$ gilt. Damit ist der Beweis beendet.

Wir sehen, daß *in bezug auf die obere (untere) partielle Ordnung des Verbandes Γ jedes Paar von Elementen in Γ sowohl eine obere als auch eine untere Grenze besitzt; die obere Grenze ist durch die Vereinigung (durch den Durchschnitt) und die untere Grenze durch den Durchschnitt (durch die Vereinigung) der beiden Elemente dargestellt.*

4. *Bemerkung zu der Definition eines Verbandes.* Verbände haben wir als Paare von übereinandergelagerten Gruppoiden mit speziellen Eigenschaften und wechselseitigen Beziehungen definiert. Sodann haben wir gezeigt, daß es auf jedem Verband gewisse zueinander inverse partielle Ordnungen gibt, für die jede zweigliedrige Folge von Elementen sowohl eine obere als auch eine untere Grenze besitzt; diese beiden Grenzen stellen die Produkte der entsprechenden zweigliedrigen Folge in den erwähnten Gruppoiden dar.

Man kann nun umgekehrt einen Verband mit Hilfe einer antisymmetrischen Kongruenz definieren. Wenn auf der Menge G eine antisymmetrische Kongruenz gegeben ist, für die jede zweigliedrige Folge a, b von Elementen in G die obere Grenze $a \smile b$ und die untere Grenze $a \frown b$ besitzt, so können wir auf der Menge G zwei Multiplikationen definieren, und zwar so, daß die Produkte der erwähnten zweigliedrigen Folge als $a \smile b$ bzw. $a \frown b$ erklärt werden. Es ist leicht zu zeigen, daß die beiden zum Feld G gehörenden Gruppoide mit diesen Multiplikationen einen Verband bilden, wobei die ursprüngliche antisymmetrische Kongruenz die obere und die zu ihr inverse Kongruenz die untere partielle Ordnung dieses Verbandes darstellt.

5. *Ausgezeichnete Arten von Verbänden.* Es sei Γ ein Verband auf G.

a) Verbände mit extremen Elementen. Wenn sich ein Element $O \in G$ dadurch auszeichnet, daß für jedes Element $a \in G$ die Beziehung $a \leqq O(\mathbf{o})$ $(a \leqq O(\mathbf{u}))$ erfüllt ist, so nennen wir O ein *größtes Element in bezug auf die obere (untere) partielle Ordnung in Γ*; analog nennen wir ein Element $o \in G$ ein *kleinstes Element in bezug auf die obere (untere) partielle Ordnung in Γ*, wenn für jedes Element $a \in G$ die Beziehung $o \leqq a(\mathbf{o})$ $(o \leqq a(\mathbf{u}))$ gilt. Es ist leicht einzusehen, daß im Verband Γ in bezug auf jede der beiden grundlegenden Ordnungen *höchstens* ein größtes und *höchstens* ein kleinstes Element existieren kann. Ferner sehen wir im Hinblick darauf, daß gleichzeitig die Beziehungen (o) oder (u) aus Nr. 6,3 gelten, daß das größte (kleinste) Element in bezug auf die obere (untere) partielle Ordnung, insofern es ein solches gibt, zugleich das kleinste (größte) Element in bezug auf die untere (obere) partielle Ordnung darstellt. Das größte und das kleinste Element in bezug auf jede der beiden grundlegenden partiellen Ordnungen in Γ werden die *extremen Elemente des Verbandes* genannt.

Wenn es in dem Verband Γ die beiden extremen Elemente in bezug auf jede der beiden grundlegenden partiellen Ordnungen gibt, so heißt er *Verband mit extremen Elementen.*

Zum Beispiel hat der in Nr. 6,2 [1] beschriebene Verband in bezug auf die obere partielle Ordnung das kleinste Element 1, während er kein größtes Element besitzt. Der in [2] beschriebene Verband stellt einen Verband mit extremen Elementen dar; das größte Element in bezug auf die obere partielle

Ordnung ist die Menge, von deren Teilmengen das Feld des Verbandes gebildet wird; das kleinste Element ist die Nullmenge. Der in [3] beschriebene Verband besitzt ebenfalls die extremen Elemente; das größte (kleinste) Element in bezug auf die obere partielle Ordnung wird von der größten (kleinsten) Zerlegung der Menge, von deren Zerlegungen der Verband gebildet wird, dargestellt.

b) Modulare (dedekindsche) Verbände. Wenn für beliebige, der Beziehung $a \leqq c(\boldsymbol{o})$ genügende Elemente $a, b, c \in G$

$$a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown c$$

gilt, so sagen wir, *die dreigliedrige Folge von Elementen a, b, c erfüllt die obere modulare (dedekindsche) Beziehung;* wenn $a \leqq c(\boldsymbol{u})$ und

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile c$$

gilt, so sagen wir, *die erwähnte Folge erfüllt die untere modulare (dedekindsche) Beziehung.*

Es ist leicht einzusehen: *Wenn die dreigliedrige Folge von Elementen a, b, c die obere (untere) modulare Beziehung erfüllt, so erfüllt die inverse Folge c, b, a die untere (obere) modulare Beziehung.*

Der Verband Γ wird *modular* oder *dedekindsch* genannt, wenn für jede der Beziehung $a \leqq c(\boldsymbol{o})(a \leqq c(\boldsymbol{u}))$ genügende Folge a, b, c von Elementen in G die obere (untere) modulare Beziehung erfüllt ist.

Zum Beispiel ist der in Nr. 6,2 [2] beschriebene Verband modular, da für beliebige, der Beziehung $A \subset C$ genügende Teilmengen A, B, C einer beliebigen Menge die Gleichheit $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ gilt (§ 1, Nr. 10,5 und 10,3). Wir wollen daran erinnern, daß dieser Verband zugleich beide extreme Elemente besitzt.

6. *Homomorphe Abbildungen (Deformationen) von Verbänden.* Der für Gruppoide definierte Begriff der homomorphen Abbildungen (§ 13, Nr. 1) kann ohne Schwierigkeiten auf Verbände übertragen werden.

Es seien Γ, Γ^* beliebige Verbände.

Eine Abbildung $\boldsymbol{d}$ des Verbandes Γ in den Verband Γ^* heißt eine *homomorphe Abbildung* oder *Deformation*, wenn sich die beiden Verbandsmultiplikationen gleichzeitig ausführen lassen, d. h. wenn für beliebige Elemente $a, b \in \Gamma$ die Gleichheiten $\boldsymbol{d}(a \smile b) = \boldsymbol{d}a \smile \boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}(a \frown b) = \boldsymbol{d}a \frown \boldsymbol{d}b$ gleichzeitig bestehen.

Ähnlich können auch weitere mit diesem Deformationsbegriff verwandte Begriffe für Verbände erklärt werden. Insbesondere heißen schlichte Deformationen des Verbandes Γ in den Verband Γ^* *isomorphe Abbildungen* und diejenigen auf den Verband Γ^* *Isomorphismen.* Wenn der Verband Γ mittels eines Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ auf den Verband Γ^* abgebildet wird, so nennt man Γ^* (Γ) das *isomorphe Bild (Urbild) von Γ (Γ^*) bezüglich des Isomorphismus $\boldsymbol{i}$.*

7. Übungsaufgaben.

1. Wenn eine Permutation $\boldsymbol{p}$ einer beliebigen Menge aus den Permutationen $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$ zusammengesetzt ist, so erhält man die inverse Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ durch Zusammensetzung der Permutationen $\boldsymbol{p}_n^{-1}, \ldots, \boldsymbol{p}_1^{-1}$.

2. Wenn der Zyklus einer zyklischen Permutation $\boldsymbol{p}$ einer beliebigen endlichen Menge wenigstens zweigliedrig ist, so läßt sich die Permutation $\boldsymbol{p}$ aus Transpositionen zusammensetzen und zwar nach der Formel $(a, b, c, \ldots, k, l, m) = (a, b)(b, c) \cdots (k, l)(l, m)$.

3. Es seien $1, \ldots, n$ Elemente einer Menge H von der Ordnung $n (\geqq 2)$. Jede Transposition $(i, i+j)$ der Menge H läßt sich aus einigen Transpositionen $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$ zusammensetzen, und zwar nach der Formel

$$(i, i+j) = (i+j-1, i+j) \cdots (i+1, i+2)\,(i, i+1)\,(i+1, i+2) \cdots (i+j-1, i+j).$$

Jede Permutation der Menge H kann aus einigen Transpositionen $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$ zusammengesetzt werden.

4. Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ das Einselement besitzt, so stellt das Bild des Einselements bezüglich einer beliebigen Deformation $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in ein Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ das Einselement von $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ dar.

5. Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ die Einheit besitzt, so gilt dasselbe auch von jedem Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$; das die Einheit von $\mathfrak{G}$ enthaltende Element $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ stellt die Einheit des Faktoroids $\overline{\mathfrak{G}}$ dar.

6. Der Leser möge Beispiele von Gruppoiden anführen, die von den in Nr. 1,3 und 4 beschriebenen Eigenschaften nur je eine oder genau zwei (mit Ausnahme von Gruppen) aufweisen.

7. Jede endliche Semigruppe stellt eine Gruppe dar.

8. In einer Halbgruppe hängt das Produktelement einer n-gliedrigen Folge von Elementen $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ von der Reihenfolge der Glieder nicht ab, wenn je zwei der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ miteinander vertauschbar sind. In einer abelschen Halbgruppe hängt das Produktelement einer beliebigen endlichen Folge von Elementen von ihrer Reihenfolge nicht ab.

9. In einem Brandtschen Gruppoid ergeben sich aus dem Bestehen einer Gleichung $ab = c$ für die zugehörigen Einheiten der Elemente $a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$ die folgenden Tatsachen, deren jede auch umgekehrt für die Gültigkeit der Gleichung $ab = c$ hinreichend ist: b und c, c^{-1} und a^{-1}, a und b^{-1} haben paarweise gleiche Rechtseinheiten; b^{-1} und c^{-1}, c und a, a^{-1} und b haben paarweise gleiche Linkseinheiten (die den drei Rechtseinheiten entsprechend gleich sind).

10. In einem Brandtschen Gruppoid werden Elemente, welche dieselbe Rechtseinheit und dieselbe Linkseinheit haben, *einander doppelt zugehörig* genannt. Die sämtlichen einer Einheit doppelt zugehörigen Elemente bilden eine Gruppe. Die Komplexe einander doppelt zugehöriger Elemente bilden selbst ein Brandtsches Gruppoid, dessen Einheiten durch die Gruppen der den Einheitselementen doppelt zugehörigen Elemente dargestellt sind.

11. Die in der Definition eines Verbandes postulierten Eigenschaften des oberen und unteren Gruppoids (Nr. 6, 1) sind nicht unabhängig, da die Eigenschaften b), b′) aus den übrigen als Folgerungen dieser letzteren abgeleitet werden können. Der Leser möge sich davon überzeugen unter Anwendung der Gleichheit d′) (d)) auf die Elemente $a, b = a$ und der Gleichheit d) (d′)) auf die Elemente $a, b = a \smile a \, (a, b = a \frown a)$.

12. Wenn ein Verband von Zerlegungen einer Menge gebildet wird, wobei je zwei Zerlegungen komplementär sind und die Multiplikationen wie in dem Beispiel [3] aus Nr. 6, 2 erklärt werden, so ist er modular.

13. Ein Verband ist genau dann modular, wenn für beliebige Elemente a, b, c die folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$(a \smile b) \frown (c \smile (a \frown b)) = (a \frown b) \smile (c \frown (a \smile b)).$$

14. Ein isomorphes Bild eines modularen Verbandes ist wiederum modular.

15. Es sei Γ ein beliebiger Verband von Zerlegungen auf G mit den Verbandsoperationen [] und (). Eine Reihe von Zerlegungen auf G, deren Glieder jeweils Elemente von Γ sind, heißt eine *Hauptreihe* von Γ, wenn jede nur aus Elementen von Γ bestehende Verfeinerung der Reihe ihre Verlängerung darstellt. Es gelten die folgenden Sätze: a) *Wenn Γ ein größtes (kleinstes) Element enthält, so beginnt (endet) mit ihm jede Hauptreihe von Γ*; b) *alle zueinander komplementären Hauptreihen von Γ haben dieselbe reduzierte Länge.*