II. GRUPPOIDE

§ 11. Multiplikation in Mengen

1. Grundbegriffe. Unter einer *Multiplikation* (*Verknüpfungsregel*) in der Menge G verstehen wir eine Beziehung zwischen den Elementen in G derart, daß jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $a, b \in G$ genau ein Element $c \in G$ zugeordnet ist, d. h. eine Beziehung, durch die jede zweigliedrige Folge von Elementen a, b in G auf genau ein Element c in G abgebildet wird. Dieses Element c heißt das *Produkt des Elements a mit dem Element b* oder das *Produkt aus a und b* und wird mit $a \cdot b$ oder ab bezeichnet; es gilt also $c = ab$. Dabei ist a (b) der *erste* (*zweite*) *Faktor* des Produktes c.

Aus diesen Erklärungen geht hervor, daß das Wort Multiplikation nur eine Bezeichnung für eine in der obigen Definition näher beschriebene Beziehung zwischen den Elementen in G ist und in konkreten Fällen zu der arithmetischen Multiplikation in keinerlei Beziehung zu stehen braucht; eine ähnliche Bemerkung gilt natürlich auch von dem Produkt und den Symbolen $a \cdot b$, ab. Der Begriff der Multiplikation in einer Menge stellt eine Art Erweiterung des Begriffs einer Abbildung einer Menge in sich dar: Eine Multiplikation in G ordnet jeder zweigliedrigen Folge von Elementen in G ein bestimmtes Element in G zu; eine Abbildung der Menge G in sich leistet dasselbe für die einzelnen Elemente.

Wenn man von dem in § 1, Nr. 8 definierten Begriff des kartesischen Quadrats einer Menge Gebrauch machen wollte, so könnte eine Multiplikation in der Menge G als eine Abbildung des kartesischen Quadrats $G \times G$ in die Menge G aufgefaßt werden. In dieser Darstellung würden die Produkte als Bilder der einzelnen Elemente des kartesischen Quadrats bei der erwähnten Abbildung erscheinen. Auf diese Weise könnte man die auf dem Begriff der Multiplikation aufzubauende Gruppoidtheorie der allgemeinen Abbildungstheorie von Mengen unterordnen. Wir wollen jedoch unsere weiteren Ausführungen von diesem Gesichtspunkt aus nicht entwickeln, da ein direkter Aufbau der Gruppoidtheorie ohne breitere Vorkenntnisse über Eigenschaften von kartesischen Quadraten für unsere Zwecke einfacher erscheint. Wir möchten es jedoch dem Leser empfehlen, über die in unseren weiteren Ausführungen entwickelte Gruppoidtheorie im Zusammenhang mit der erwähnten Abbildungsart nachzudenken, da sich dabei reichlich Anregungen zu selbständigen Überlegungen bieten.

Wenn eine Multiplikation in der Menge G gegeben ist, so ist insbesondere das Produkt jedes Elements $a \in G$ mit sich selbst eindeutig bestimmt; man schreibt im allgemeinen a^2 statt aa.

2. Kommutative (abelsche) Multiplikation. Eine Multiplikation in der Menge G kann sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen. So sind z. B.

nach der Definition einer Multiplikation in G die für je zwei Elemente $a, b \in G$ definierten Produkte ab und ba im allgemeinen verschieden, also $ab \neq ba$. Wenn für bestimmte Elemente $a, b \in G$ die Gleichheit $ab = ba$ besteht, so nennt man die Elemente a, b *vertauschbar* oder *kommutativ*. Wenn sich die Multiplikation dadurch auszeichnet, daß je zwei Elemente in G vertauschbar sind, so wird die Multiplikation als *kommutativ* oder *abelsch* bezeichnet.

Eine Multiplikation in G kann sich auch durch andere Eigenschaften auszeichnen; wir werden uns später mit solchen für unsere Zwecke wichtigen Fällen näher beschäftigen. Im nächsten Abschnitt wollen wir zunächst einige Beispiele von Multiplikationen angeben, denen wir in unseren weiteren Ausführungen öfter begegnen werden.

3. Beispiele von Multiplikationen in Mengen. a) Es sei G die Menge aller ganzen Zahlen. Wir definieren eine Multiplikation in G so, daß wir als das Produkt ab eines Elements $a \in G$ mit einem Element $b \in G$ die arithmetische Summe $a + b$ erklären. Diese Multiplikation stimmt also mit der arithmetischen Addition überein. Aus der für je zwei Elemente $a, b \in G$ geltenden Formel $a + b = b + a$ schließen wir, daß diese Multiplikation abelsch ist.

b) Es sei n eine natürliche Zahl und G eine aus ganzen, nichtnegativen Zahlen bestehende Menge, in der insbesondere alle Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ vorkommen. Wir definieren eine Multiplikation in G auf folgende Art: Das Produkt ab eines Elements $a \in G$ mit einem Element $b \in G$ ist der Rest der Zahl $a + b$ bei der Division durch n. Das Produkt ab stimmt also immer mit einer der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ überein. Diese Multiplikation nennen wir die *Addition in bezug auf den Modul n*. Offenbar handelt es sich um eine abelsche Multiplikation.

c) Es sei G die Menge aller Permutationen einer endlichen Menge von der Ordnung $n (\geqq 1)$. Wir definieren eine Multiplikation in G auf folgende Weise: Das Produkt $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ eines Elements $\boldsymbol{p} \in G$ mit dem Element $\boldsymbol{q} \in G$ ist die zusammengesetzte Permutation $\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}$. In diesem Fall ist also die Multiplikation durch die Zusammensetzung von Permutationen gegeben. Aus früheren Betrachtungen (§ 8, Nr. 7,2) wissen wir, daß diese Multiplikation nicht abelsch zu sein braucht.

d) Es sei G die Menge aller Zerlegungen auf einer nicht leeren Menge. Wir definieren eine Multiplikation in G so: Das Produkt $\bar{A} \cdot \bar{B}$ eines Elements $\bar{A} \in G$ mit einem Element $\bar{B} \in G$ ist die Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ bzw. $(\bar{A}, \bar{B})$. In beiden Fällen ist die Multiplikation abelsch, wie aus § 3, Nr. 4 bzw. § 3, Nr. 5 unmittelbar zu ersehen ist.

4. Multiplikationstabellen. 1. *Beschreibung einer Multiplikationstabelle.* Wenn die Menge G endlich ist, so kann eine Multiplikation in G mit Hilfe einer sogenannten Multiplikationstabelle beschrieben werden, die auf folgende Weise aufgestellt wird.

Wir bezeichnen die Elemente von G etwa mit den Buchstaben $a, b, \ldots, m$. In die erste Zeile und erste Spalte, die man im allgemeinen von den übrigen Zeilen und Spalten durch eine horizontale bzw. vertikale Linie abzutrennen pflegt, schreiben wir die Buchstaben $a, b, \ldots, m$, gewöhnlich in der gleichen

Reihenfolge, und zwar in der ersten Zeile von links nach rechts und in der ersten Spalte von oben nach unten. Rechts von jedem Buchstaben x in der ersten Spalte, und zwar unter die einzelnen Buchstaben $a, b, \ldots, m$ in der ersten Zeile, schreiben wir diejenigen Buchstaben, die die Produkte $xa, xb, \ldots, xm$ bezeichnen.

Die erste Zeile und die erste Spalte werden als die *Eingänge* der Tabelle bezeichnet. Jede Multiplikationstabelle besitzt also außer dem horizontalen und vertikalen Eingang ebensoviel Zeilen und Spalten, wie die Menge G Elemente besitzt. Wenn die Buchstaben $a, b, \ldots, m$ in den beiden Eingängen in der gleichen Reihenfolge aufgeschrieben wurden, so zeichnet sich eine abelsche Multiplikation durch Symmetrie der Multiplikationstabelle in bezug auf die Hauptdiagonale aus. In diesem Fall steht also in jeder j-ten Zeile und k-ten Spalte derselbe Buchstabe wie in der k-ten Zeile und j-ten Spalte.

2. *Beispiele von Multiplikationstabellen.* Als Beispiel wollen wir die Multiplikationstabellen aufstellen, in denen je eine Multiplikation in der Menge G aller Permutationen einer aus $n = 1, 2, 3$ Elementen bestehenden Menge H beschrieben wird; es handelt sich dabei um die in Beispiel c) in Nr. 3 angegebenen, mit Hilfe von Zusammensetzung von Permutationen definierten Multiplikationen. Da es genau $n! = 1, 2, 6$ Permutationen der Menge H gibt, wird die Menge G von $n! = 1, 2, 6$ Elementen gebildet; wir sehen, daß die aufzustellenden Multiplikationstabellen außer den beiden Eingängen noch $n! = 1, 2, 6$ Zeilen und Spalten aufweisen werden.

$n = 1$. Die Menge G besteht lediglich aus der identischen Permutation $\boldsymbol{e}$. Bezeichnet man das Element, von dem die Menge H gebildet wird, mit a, so wird die erwähnte Permutation durch das Symbol $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ dargestellt, und die in Frage kommende Multiplikationstabelle hat folgende Form:

$$\begin{array}{c|c} & \boldsymbol{e} \\ \hline \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e} \end{array}$$

$n = 2$. Die Menge G besteht aus zwei Permutationen. Bezeichnet man die Elemente von H mit a, b, so werden die erwähnten Permutationen durch $\begin{pmatrix} a\,b \\ a\,b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ b\,a \end{pmatrix}$ dargestellt. Die erste von ihnen ist die identische Permutation $\boldsymbol{e}$, die zweite wollen wir etwa mit $\boldsymbol{a}$ bezeichnen. Die zusammengesetzten Permutationen sind $\boldsymbol{ee} = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{ae} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{ea} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{e}$. Aus diesen Formeln ergibt sich die folgende Multiplikationstabelle:

$$\begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{a} \\ \hline \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{e} \end{array}$$

$n = 3$. Die Menge G besteht aus sechs Permutationen. Bezeichnet man die Elemente von H mit a, b, c, so werden die erwähnten Permutationen durch die folgenden Symbole dargestellt:

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,b\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,a\,c \end{pmatrix}.$$

Die erste von diesen Permutationen ist die identische Permutation $\boldsymbol{e}$; die übrigen wollen wir der Reihe nach mit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{f}$ bezeichnen. Die zusammengesetzten Permutationen sind die folgenden:

$$\begin{array}{llllll}
ee = e, & ae = a, & be = b, & ce = c, & de = d, & fe = f, \\
ea = a, & aa = b, & ba = e, & ca = d, & da = f, & fa = c, \\
eb = b, & ab = e, & bb = a, & cb = f, & db = c, & fb = d, \\
ec = c, & ac = f, & bc = d, & cc = e, & dc = b, & fc = a, \\
ed = d, & ad = c, & bd = f, & cd = a, & dd = e, & fd = b, \\
ef = f, & af = d, & bf = c, & cf = b, & df = a, & ff = e.
\end{array}$$

Aus diesen Formeln erhält man die folgende Multiplikationstabelle:

	e	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
a	*a*	*b*	*e*	*d*	*f*	*c*
b	*b*	*e*	*a*	*f*	*c*	*d*
c	*c*	*f*	*d*	*e*	*b*	*a*
d	*d*	*c*	*f*	*a*	*e*	*b*
f	*f*	*d*	*c*	*b*	*a*	*e*

In diesen Multiplikationstabellen haben wir die Symbole $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{f}$ der einzelnen Elemente in G in den beiden Eingängen in derselben Reihenfolge aufgeschrieben. Wir sehen, daß für $n = 1, 2$ die entsprechenden Multiplikationstabellen eine Symmetrie in bezug auf die Hauptdiagonale aufweisen, während dies für $n = 3$ nicht der Fall ist. Daraus schließen wir, daß die betrachteten Multiplikationen in den Fällen $n = 1, 2$ abelsch sind, jedoch nicht im Fall $n = 3$.

Beispiele von Multiplikationen in Mengen können in jeder beliebigen Anzahl angegeben werden. Es genügt offenbar, eine beliebige abstrakte Menge G zu nehmen und jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $a, b \in G$ irgendein Element $c \in G$ als das Produkt von a mit b zuzuordnen. Wenn die Menge G endlich ist, kann diese Zuordnung mit Hilfe einer Tabelle definiert werden, und zwar so, daß man auf die einzelnen Stellen, rechts vom vertikalen und unter dem horizontalen Eingang, die Symbole von irgendwelchen nach Belieben gewählten Elementen von G aufschreibt. Jede Wahl dieser Elemente bestimmt offenbar eine Multiplikation in der Menge G, und für diese Multiplikation stellt die Tabelle die Multiplikationstabelle dar.

5. Übungsaufgaben.

1. In der Menge der euklidischen Bewegungen auf der Geraden, $\boldsymbol{f}[a]$, und ebenso in der Menge der euklidischen Bewegungen $\boldsymbol{f}[a]$, $\boldsymbol{g}[a]$ (vgl. § 6, Nr. 10, 4) kann eine Multiplikation mit Hilfe der Zusammensetzung von Bewegungen, ähnlich wie in Beispiel c) in Nr. 3 definiert werden. Ein analoges Resultat gilt von der Menge der euklidischen Bewegungen in der Ebene, $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ und der Menge der euklidischen Bewegungen $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ (vgl. § 6, Nr. 10, 5).

2. In der in § 8, Nr. 8, 4 beschriebenen, aus $2n$ ($n \geqq 3$) Permutationen der Eckenmenge eines regulären ebenen n-Ecks bestehenden Menge kann eine Multiplikation mit Hilfe

der Zusammensetzung von Permutationen, ähnlich wie in Beispiel c) in Nr. 3 definiert werden. Es sind für $n = 4, 5, 6$ die entsprechenden Multiplikationstabellen aufzustellen.

3. In Beispiel b) in Nr. 3 kann die Menge G nur die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ enthalten. Es sollen für diesen Fall, und zwar für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, die entsprechenden Multiplikationstabellen aufgestellt werden.

4. Ist n ($\geqq 5$) eine natürliche Zahl und gelten für die natürlichen Zahlen a, b die Ungleichungen $a, b \leqq n$, so ist die Anzahl der Primfaktoren von $10a + b$ höchstens gleich n. Daraus schließen wir, daß man in der Menge $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Multiplikation auf folgende Weise definieren kann: Das Produkt ab eines beliebigen Elements $a \in G$ mit einem Element $b \in G$ ist durch die Anzahl der Primfaktoren der Zahl $10a + b$ gegeben. Der Leser möge sich überzeugen, daß für $n = 6$ die entsprechende Multiplikationstabelle folgendermaßen aussieht:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	1	2	2	4
2	2	2	1	4	2	2
3	1	5	2	2	2	4
4	1	3	1	3	3	2
5	2	3	1	4	2	4
6	1	2	3	6	2	3

5. In dem System aller Teilmengen einer nicht leeren Menge kann eine Multiplikation so definiert werden, daß man jeder zweigliedrigen Folge von Teilmengen die Summe der letzteren zuordnet. Kann man analog eine Multiplikation mit Hilfe des Durchschnitts definieren?

6. Der Leser möge selbst Beispiele von Multiplikationen in Mengen angeben.

§ 12. Grundbegriffe über Gruppoide

1. Definition. Eine nicht leere Menge G mit einer in ihr erklärten Multiplikation M heißt ein *Gruppoid; G* ist das *Feld, M* die *Multiplikation* des Gruppoids. Gruppoide werden wir mit großen Frakturbuchstaben bezeichnen, und zwar im allgemeinen mit den gleichen wie ihre Felder. Zum Beispiel bezeichnen wir ein Gruppoid, dessen Feld G ist, mit $\mathfrak{G}$, und wurde ein Gruppoid mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so bedeutet der Buchstabe G im allgemeinen das Feld von $\mathfrak{G}$.

2. Weitere Grundbegriffe. Die Gruppoide $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$. Auf Gruppoide übertragen wir die Begriffe und Symbole, die für ihre Felder definiert wurden. Wir sprechen z. B. von *Elementen* eines Gruppoids statt von Elementen seines Feldes und schreiben $a \in \mathfrak{G}$ statt $a \in G$; wir sprechen von *Unter-* oder *Teilmengen* in einem Gruppoid und schreiben $A \subset \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G} \supset A$, von *Zerlegungen in* und *auf einem Gruppoid*, von der *Ordnung* eines Gruppoids, von einer *Abbildung* eines Gruppoids in oder auf eine Menge, in oder auf ein Gruppoid, usw. Nicht leere Teilmengen in Gruppoiden werden auch *Komplexe* genannt. Wenn das Feld G eines Gruppoids $\mathfrak{G}$ eine abstrakte Menge ist, so heißt auch das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *abstrakt*.