von diesen Permutationen gebildete Menge mit M_n bezeichnen. Es sollen die folgenden Eigenschaften der Menge M_n festgestellt werden: a) Aus $\boldsymbol{p} \in M_n$, $\boldsymbol{q} \in M_n$ folgt $\boldsymbol{qp} \in M_n$; b) $\boldsymbol{e} \in M_n$; c) aus $\boldsymbol{p} \in M_n$ folgt $\boldsymbol{p}^{-1} \in M_n$.

5. Je zwei zyklische Permutationen einer beliebigen, aus n ($\geqq 1$) Elementen bestehenden Menge, deren Zyklen, die mehr als ein Element enthalten, keine gemeinsamen Elemente besitzen, sind miteinander vertauschbar.

§ 9. Mehrdeutige (allgemeine) Abbildungen

1. Grundlegende Begriffe und Eigenschaften. Der Begriff der eindeutigen Abbildung einer Menge G in eine Menge G^*, dessen Eigenschaften den Gegenstand unserer Untersuchungen in den vorhergehenden Paragraphen bildeten, kann in folgender Weise erweitert werden:

Unter einer *mehrdeutigen* oder *allgemeinen Abbildung der Menge G in die Menge G^** verstehen wir eine Beziehung zwischen den Elementen der beiden Mengen derart, daß jedem Element der Menge G mindestens ein Element der Menge G^* zugeordnet wird.

Es sei $\boldsymbol{g}$ eine mehrdeutige Abbildung der Menge G in die Menge G^*. Dann besitzt bei dieser Abbildung jedes Element $a \in G$ mindestens ein, im allgemeinen mehrere und eventuell auch unendlich viele Bilder in der Menge G^*; die von diesen Bildern gebildete Menge, die sogenannte *Bildmenge*, wird mit $\boldsymbol{g}a$ bezeichnet.

Wenn jedes Element $a^* \in G^*$ in der Bildmenge mindestens eines Elements $a \in G$ enthalten ist, so sagen wir, $\boldsymbol{g}$ sei eine mehrdeutige oder allgemeine Abbildung der Menge G *auf* die Menge G^*. In diesem Fall ist durch die Abbildung $\boldsymbol{g}$ eine mehrdeutige Abbildung der Menge G^* auf die Menge G bestimmt, die sogenannte zu $\boldsymbol{g}$ *inverse Abbildung* $\boldsymbol{g}^{-1}$. Diese Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ wird so definiert, daß jedem Element $a^* \in G^*$ alle Elemente $a \in G$ zugeordnet werden, in deren Bildmengen in $\boldsymbol{g}$ das Element a^* enthalten ist. Nach dieser Definition gelten also die beiden Beziehungen $a^* \in \boldsymbol{g}a$, $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ gleichzeitig, d.h., wenn eine von ihnen gilt, so gilt auch die andere.

Es kann leicht gezeigt werden, daß *die zu $\boldsymbol{g}^{-1}$ inverse Abbildung mit der Abbildung $\boldsymbol{g}$ identisch, d. h. $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{g}$ ist.* In der Tat, aus der Beziehung $a^* \in \boldsymbol{g}a$ folgt $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ und daraus $a^* \in (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$, so daß $\boldsymbol{g}a \subset (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$ gilt; umgekehrt folgt aus $a^* \in (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$ die Beziehung $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ und daraus $a^* \in \boldsymbol{g}a$, so daß $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a \subset \boldsymbol{g}a$ ist. Es ergibt sich also $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a = \boldsymbol{g}a$.

Mit Rücksicht auf diese Eigenschaft nennen wir die beiden Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}^{-1}$ *zueinander invers*, ohne zu unterscheiden, welche von ihnen zu welcher invers ist.

Ist die Abbildung $\boldsymbol{g}$ eindeutig, so ist die zu ihr inverse Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ im allgemeinen mehrdeutig. In diesem Fall besteht für jeden Punkt $a^* \in \boldsymbol{g}G$ die Bildmenge $\boldsymbol{g}^{-1}a$ aus allen Punkten von G, die sich durch $\boldsymbol{g}$ auf den Punkt a^* abbilden lassen; $\boldsymbol{g}^{-1}a$ stellt also ein Element der zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörigen Zerlegung von G dar.

Hinsichtlich der allgemeinen, auf dem obigen Abbildungsbegriff basierenden Theorie wollen wir nur noch einige Worte über Zusammensetzung von mehrdeutigen Abbildungen hinzufügen.

Der in § 6, Nr. 7 für eindeutige Abbildungen erklärte Begriff der Zusammensetzung von Abbildungen kann unmittelbar auf mehrdeutige Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ erweitert werden. In diesem Fall definiert man die aus den Abbildungen $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{h}$ (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{hg}$ so, daß man jedem Element $a \in G$ alle Bilder der in $\boldsymbol{g}a$ enthaltenen Elemente bei der Abbildung $\boldsymbol{h}$ als $\boldsymbol{hg}$-Bilder zuordnet. Es gilt natürlich $\boldsymbol{hg}a \subset K$. Insbesondere sieht man, daß für $a \in G$ die Bildmenge $\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{g}a$ von denjenigen Elementen in G gebildet wird, die bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ wenigstens ein Bild in der Bildmenge $\boldsymbol{g}a$ besitzen.

Schließlich sei bemerkt, daß der Begriff einer mehrdeutigen Abbildung der Menge G in die Menge G^* so verallgemeinert werden kann, daß man in der Menge G Elemente zuläßt, denen keine Elemente in der Menge G^* zugeordnet werden. Eine solche Abbildung der Menge G in die Menge G^* heißt eine *Relation* von G in G^*.

Wir wollen uns in den weiteren Ausführungen über mehrdeutige Abbildungen nur auf den Fall beschränken, daß die Menge G^* mit G zusammenfällt und daß es sich um mehrdeutige Abbildungen der Menge G auf sich handelt.

2. Kongruenzen. Unter einer *Kongruenz* der Menge G verstehen wir eine mehrdeutige Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Menge G auf sich mit folgenden Eigenschaften:

a) Für jedes $a \in G$ gilt $a \in \boldsymbol{g}a$;

b) für alle den Beziehungen $b \in \boldsymbol{g}a$, $c \in \boldsymbol{g}b$ genügenden Elemente $a, b, c \in G$ gilt $c \in \boldsymbol{g}a$.

Die erste Eigenschaft wird als die *Reflexivität*, die zweite als die *Transitivität* der mehrdeutigen Abbildung $\boldsymbol{g}$ bezeichnet.

Wir sehen, daß eine Kongruenz der Menge G als eine mehrdeutige reflexive und transitive Abbildung der Menge G auf sich erklärt werden kann.

Es sei nun $\boldsymbol{g}$ eine Kongruenz der Menge G. In diesem Fall drücken wir die Beziehung $b \in \boldsymbol{g}a$ so aus, daß *das Element b mit a bezüglich der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ kongruent ist.*

Es ist leicht zu zeigen, daß die zu $\boldsymbol{g}$ inverse Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ ebenfalls eine Kongruenz darstellt. In der Tat, die Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ ist offenbar reflexiv. Ferner folgen aus $b \in \boldsymbol{g}^{-1}a$, $c \in \boldsymbol{g}^{-1}b$ die Beziehungen $a \in \boldsymbol{g}b$, $b \in \boldsymbol{g}c$, also auch $a \in \boldsymbol{g}c$. Wir haben also $c \in \boldsymbol{g}^{-1}a$ und sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ auch transitiv ist.

Die Kongruenz $\boldsymbol{g}^{-1}$ wird naturgemäß als die *zu $\boldsymbol{g}$ inverse Kongruenz* bezeichnet. Die zu $\boldsymbol{g}^{-1}$ inverse Kongruenz ist wiederum die Kongruenz $\boldsymbol{g}$.

Wir wollen unsere Begriffe an einigen Beispielen erläutern.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ beliebige Zerlegungen auf der Menge G. Wir definieren eine mehrdeutige Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Zerlegung $\bar{A}$ auf sich so, daß wir jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ alle Elemente in $\bar{A}$ zuordnen, die sich mit $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden lassen. Aus § 3, Nr. 1 a, b schließen wir, daß diese mehrdeutige Abbildung $\boldsymbol{g}$ eine Kongruenz der Zerlegung $\bar{A}$ darstellt. Mit dem Element $\bar{a}$ sind alle Elemente in $\bar{A}$, die sich mit $\bar{a}$ mittels der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden lassen, bezüglich der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ kongruent. Bei der inversen Kongruenz $\boldsymbol{g}^{-1}$ sind jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ alle diejenigen Elemente in $\bar{A}$ zugeordnet, mit denen sich $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden läßt; aus § 3, Nr. 1c schließen wir, daß dies genau diejenigen Elemente sind, die sich mit $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden lassen. Wir sehen, daß die inverse Kongruenz $\boldsymbol{g}^{-1}$ mit der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ identisch ist; es gilt also $\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}$.

Weitere Beispiele von Kongruenzen sind die folgenden: Wenn wir jeder Zerlegung $\bar{A}$ der Menge G alle Überdeckungen (Verfeinerungen) von $\bar{A}$ zuordnen, so erhalten wir eine Kongruenz der von allen Zerlegungen auf G gebildeten Menge. Dies folgt aus § 3, Nr. 2a, b. Bezüglich dieser Kongruenz ist mit der Zerlegung $\bar{A}$ jede Überdeckung (Verfeinerung) von $\bar{A}$ kongruent. Diese beiden Kongruenzen sind zueinander invers.

Besonders wichtig sind die sogenannten symmetrischen und antisymmetrischen Kongruenzen.

3. Symmetrische Kongruenzen. Eine Kongruenz $\boldsymbol{g}$ der Menge G heißt *symmetrisch*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

S. Für $a, b \in G$, $b \in \boldsymbol{g}a$ gilt $a \in \boldsymbol{g}b$.

Diese Eigenschaft drückt eine Symmetrie der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ aus, und zwar in dem Sinn, daß von je zwei beliebigen Elementen in G entweder keines oder beide der Bildmenge des anderen angehören. In diesem Fall drücken wir die Beziehung $b \in \boldsymbol{g}a$ durch $b \equiv a(\boldsymbol{g})$ oder $b \equiv a$ aus. Dann haben wir auch $a \equiv b$, und wir nennen die beiden Elemente a, b *miteinander kongruent*.

Zum Beispiel ist die oben im ersten Beispiel beschriebene Kongruenz der Zerlegung $\bar{A}$ symmetrisch, wie aus § 3, Nr. 1c zu ersehen ist.

Es sei nun $\boldsymbol{g}$ eine symmetrische Kongruenz der Menge G.

Eine wichtige Eigenschaft von $\boldsymbol{g}$ besteht darin, daß *das System aller Teilmengen in G, die aus denjenigen Elementen bestehen, die mit einem Element von G kongruent sind, eine Zerlegung der Menge G darstellt.* Von dieser Zerlegung sagen wir, daß sie *zur Kongruenz $\boldsymbol{g}$ gehört;* ihre Elemente werden *Klassen der Kongruenz $\boldsymbol{g}$* genannt.

Der Beweis dieser Behauptung ist eine Verallgemeinerung des in § 3, Nr. 4 angeführten Beweises, in dem gezeigt wurde, daß das dort betrachtete System $\bar{\bar{A}}$ von Teilmengen in der Zerlegung $\bar{A}$ eine Zerlegung von $\bar{A}$ darstellt. Der Leser möge die nötigen Überlegungen selbst durchführen.

Es ist auch leicht einzusehen, daß *je zwei in derselben Klasse der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ liegende Punkte von G miteinander kongruent sind, während zwei in verschiedenen Klassen liegende Punkte von G nie diese Eigenschaft besitzen.* Eine beliebige Teilmenge in G, die mit jeder Klasse der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ genau einen Punkt gemeinsam hat, stellt ein *Repräsentantensystem der Kongruenz $\boldsymbol{g}$* dar, und zwar in dem Sinn, daß jeder Punkt in G genau mit einem Repräsentanten kongruent ist.

Umgekehrt gibt es zu jeder Zerlegung $\bar{A}$ der Menge G eine symmetrische Kongruenz der Menge G so, daß die zu ihr gehörige Zerlegung mit $\bar{A}$ zusammenfällt. Diese

Kongruenz wird in der Weise definiert, daß jedem Punkt $a \in G$ genau die in dem den Punkt a enthaltenden Element $\bar{a} \in \bar{A}$ liegenden Punkte zugeordnet werden.

Zwischen der Betrachtung von symmetrischen Kongruenzen und derjenigen von Zerlegungen auf Mengen besteht kein wesentlicher Unterschied.

Schließlich wollen wir zeigen, daß *die zu* $\boldsymbol{g}$ *inverse Kongruenz* $\boldsymbol{g}^{-1}$ *mit* $\boldsymbol{g}$ *zusammenfällt*, also $\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}$ ist. In der Tat, aus $b \in \boldsymbol{g}^{-1}a$ folgt $a \in \boldsymbol{g}b$ und ferner $b \in \boldsymbol{g}a$ mit Rücksicht auf die Eigenschaft S, und wir haben $\boldsymbol{g}^{-1}a \subset \boldsymbol{g}a$; umgekehrt folgt aus $b \in \boldsymbol{g}a$ mit Rücksicht auf S die Beziehung $a \in \boldsymbol{g}b$, also auch $b \in \boldsymbol{g}^{-1}a$, und es gilt $\boldsymbol{g}a \subset \boldsymbol{g}^{-1}a$. Wir haben also $\boldsymbol{g}^{-1}a = \boldsymbol{g}a$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken, daß die symmetrischen Kongruenzen auch *Äquivalenzen* genannt werden.

4. Antisymmetrische Kongruenzen. 1. *Grundlegende Begriffe und Eigenschaften.* Eine Kongruenz $\boldsymbol{g}$ der Menge G heißt *antisymmetrisch*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\text{AS.}\quad \text{Für } a, b \in G,\quad b \in \boldsymbol{g}a,\quad a \in \boldsymbol{g}b \quad \text{gilt} \quad a = b.$$

Diese Eigenschaft drückt eine Antisymmetrie der Kongruenz $\boldsymbol{g}$ aus, und zwar in dem Sinn, daß von je zwei verschiedenen Elementen in G entweder keines oder genau eines mit dem anderen kongruent ist. In diesem Fall drücken wir die Beziehung $b \in \boldsymbol{g}a$ durch $a \leqq b(\boldsymbol{g})$ oder $b \geqq a(\boldsymbol{g})$ (oder kürzer $a \leqq b$ oder $b \geqq a$) aus.

Wenn die Kongruenz $\boldsymbol{g}$ *antisymmetrisch ist, so ist die zu ihr inverse Kongruenz* $\boldsymbol{g}^{-1}$ *ebenfalls antisymmetrisch.* Aus den Beziehungen $b \in \boldsymbol{g}^{-1}a$, $a \in \boldsymbol{g}^{-1}b$ folgt nämlich $a \in \boldsymbol{g}b$, $b \in \boldsymbol{g}a$ und ferner $a = b$ mit Rücksicht auf die Eigenschaft AS.

Zum Beispiel sind die am Ende von Nr. 2 besprochenen Kongruenzen der von allen Zerlegungen auf G gebildeten Menge antisymmetrisch, wie wir aus § 3, Nr. 2c sehen; wir haben bereits bemerkt, daß diese Kongruenzen zueinander invers sind.

Die antisymmetrischen Kongruenzen werden in der Regel *partielle Ordnungen* genannt; zueinander inverse partielle Ordnungen heißen auch *dual*.

2. *Obere und untere Grenze von zwei Elementen.* Wichtige, auf dem Begriff der antisymmetrischen Kongruenz beruhende Begriffe sind die der oberen und unteren Grenze von zwei Elementen.

Es sei $\boldsymbol{g}$ eine antisymmetrische Kongruenz der Menge G.

Unter der *oberen Grenze* einer zweigliedrigen Folge von Elementen $a, b \in G$ in bezug auf die Kongruenz $\boldsymbol{g}$ verstehen wir das durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnete Element $c \in G$: Es ist $a \leqq c$, $b \leqq c$, und es gilt für alle den Beziehungen $a \leqq x$, $b \leqq x$ genügenden Elemente $x \in G$ die Formel $c \leqq x$.

Es ist leicht einzusehen, daß es für jede zweigliedrige Folge von Elementen in G höchstens eine obere Grenze geben kann; in der Tat, sind c, c' obere Grenzen einer zweigliedrigen Folge von Elementen, so haben wir $c \leqq c'$ und gleichzeitig $c' \leqq c$, also auch $c = c'$ nach der Eigenschaft AS. Die obere Grenze der zweigliedrigen Folge von Elementen a, b wird, falls sie existiert, mit $a \smile b$ bezeichnet.

Analog erklären wir die untere Grenze einer zweigliedrigen Folge von Elementen $a, b \in G$ in bezug auf die Kongruenz $\boldsymbol{g}$: Unter der *unteren Grenze* verstehen wir das durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnete Element $c \in G$: Es ist $c \leqq a$, $c \leqq b$, und es gilt für alle, den Beziehungen $x \leqq a$, $x \leqq b$ genügenden Elemente $x \in G$ die Formel $x \leqq c$. Für jede zweigliedrige Folge von Elementen $a, b \in G$ gibt es höchstens eine untere Grenze, die wir, falls sie existiert, mit $a \frown b$ bezeichnen.

Der Leser möge sich überlegen, daß für beliebige Elemente $a, b, c \in G$ die folgenden Gleichheiten gelten, sobald die entsprechenden oberen und unteren Grenzen existieren:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & a \smile b = b \smile a, & \text{a}') & a \frown b = b \frown a, \\ \text{b)} & a \smile a = a, & \text{b}') & a \frown a = a, \\ \text{c)} & a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c, & \text{c}') & a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c, \\ \text{d)} & a \smile (a \frown b) = a, & \text{d}') & a \frown (a \smile b) = a. \end{array}$$

Mit Rücksicht auf die durch die Formeln a), a′) ausgedrückten symmetrischen Eigenschaften der beiden Grenzen sprechen wir im allgemeinen von der *oberen* und der *unteren Grenze von zwei* (eventuell zusammenfallenden) *Elementen*, ohne die Numerierung der Elemente zu berücksichtigen.

Aus der Definition der oberen und der unteren Grenze sehen wir, daß die obere (untere) Grenze von zwei Elementen in bezug auf die Kongruenz $\boldsymbol{g}$ zugleich die untere (obere) Grenze derselben in bezug auf die inverse Kongruenz $\boldsymbol{g}^{-1}$ darstellt.

Um ein Beispiel für die obigen Begriffe anzugeben, wollen wir die antisymmetrische Kongruenz der Menge aller Zerlegungen auf G betrachten, in der jeder Zerlegung auf G alle Überdeckungen bzw. Verfeinerungen derselben zugeordnet werden. In diesem Fall besitzen je zwei Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ auf G die obere Grenze $[\bar{A}, \bar{B}]$ bzw. $(\bar{A}, \bar{B})$ und die untere Grenze $(\bar{A}, \bar{B})$ bzw. $[\bar{A}, \bar{B}]$.

5. Übungsaufgaben.

1. Wird die Menge G durch eindeutige Abbildungen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ auf die Mengen A bzw. B abgebildet und fallen die zu diesen Abbildungen gehörigen Zerlegungen auf G zusammen, so ist $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{-1}$ eine eindeutige und schlichte Abbildung der Menge A auf B und $\boldsymbol{f}^{-1} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{-1}$ die zu ihr inverse Abbildung von B auf A. In diesem Fall sind also die Mengen A, B äquivalent.

2. Es sei n eine natürliche Zahl. Wenn wir jeder ganzen Zahl a alle Zahlen $a + \nu n$ zuordnen ($\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), so erhalten wir eine symmetrische Kongruenz der Menge aller ganzen Zahlen. Die zu dieser symmetrischen Kongruenz gehörige Zerlegung besteht aus n Klassen, und die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ stellt eines ihrer Repräsentantensysteme dar.

3. Wenn wir jeder natürlichen Zahl alle natürlichen Vielfachen (alle positiven Teiler) derselben zuordnen, so erhalten wir eine antisymmetrische Kongruenz der Menge aller natürlichen Zahlen. Je zwei natürliche Zahlen besitzen in bezug auf diese Kongruenz die obere Grenze, und zwar ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (ihren größten gemeinsamen Teiler), und zugleich die untere Grenze, und zwar den größten gemeinsamen Teiler (das kleinste gemeinsame Vielfache). Beide Kongruenzen sind zueinander invers.

4. Wenn wir jeder Teilmenge in G alle ihre Obermengen (Untermengen) in G zuordnen, so erhalten wir eine antisymmetrische Kongruenz der von allen Teilmengen in G gebildeten Menge. Je zwei Teilmengen in G besitzen in bezug auf diese Kongruenz eine obere Grenze, und zwar ihre Vereinigungsmenge (ihren Durchschnitt), und zugleich eine untere Grenze, und zwar den Durchschnitt (die Vereinigungsmenge). Beide Kongruenzen sind zueinander invers.

5. Ist $\boldsymbol{g}$ eine antisymmetrische Kongruenz von G und gibt es für die Elemente $a, b \in G$ die obere Grenze $a \smile b$, so gilt:

a) $\boldsymbol{g}(a \smile b) = \boldsymbol{g}a \cap \boldsymbol{g}b$;

b) $\boldsymbol{g}^{-1}(a \smile b) \supset \boldsymbol{g}^{-1}a \cup \boldsymbol{g}^{-1}b$.

§ 10. Reihen von Zerlegungen auf Mengen

In diesem Paragraphen werden wir eine Theorie der sogenannten Reihen von Zerlegungen auf Mengen entwickeln, in der zahlreiche Ergebnisse unserer bisherigen Ausführungen über Zerlegungen und Abbildungen von Mengen eine Anwendung finden werden. Diese Theorie stellt die mengentheoretische Struktur der entsprechenden Abschnitte der Gruppoid- und Gruppentheorie dar und gestattet einen tieferen Einblick in die diesbezüglichen, durch klassische Methoden erzielten Ergebnisse der Gruppentheorie. Außerdem finden die Untersuchungen und Resultate über Reihen von Zerlegungen auf Mengen eine bedeutsame Anwendung im Zusammenhang mit Abbildungen auf Folgenmengen und auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Klassifikationen.

1. Grundbegriffe. Es seien $\bar{A} \geqq \bar{B}$ Zerlegungen auf G.

Unter einer *Reihe von Zerlegungen auf G von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$* oder *Reihe von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$* verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha (\geqq 1)$ Zerlegungen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ auf G mit den folgenden Eigenschaften: a) Die erste Zerlegung der Folge ist $\bar{A}$, die letzte $\bar{B}$, also $\bar{A}_1 = \bar{A}$, $\bar{A}_\alpha = \bar{B}$; b) jede nachfolgende Zerlegung ist eine Verfeinerung der unmittelbar vorangehenden, also

$$(\bar{A} =) \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha (= \bar{B}).$$

Eine solche Reihe wird kürzer mit $(\bar{A})$ bezeichnet. Die Zerlegungen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ werden die *Glieder der Reihe* $(\bar{A})$ genannt. $\bar{A}_1$ ist das *Anfangsglied* und $\bar{A}_\alpha$ das *Endglied* der Reihe $(\bar{A})$. Unter der *Länge* der Reihe $(\bar{A})$ verstehen wir die Anzahl α der Glieder in $(\bar{A})$.

Zum Beispiel bildet jede Zerlegung $\bar{A}$ auf G eine Reihe von der Länge 1; das Anfangs- und das Endglied dieser Reihe fällt mit $\bar{A}$ zusammen.