§ 7. Abbildungen von Zerlegungen

Es sei $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf die Menge G^*. Jedes Element $a \in G$ wird also durch $\boldsymbol{g}$ auf ein Element $a^* \in G^*$ abgebildet; $a(a^*)$ ist das Urbild (Bild) von a^* (a) bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$. Zu $\boldsymbol{g}$ gehört eine Zerlegung $\bar{G}$ von G, deren Elemente aus allen Urbildern je eines Elements in G^* bestehen. Die Zerlegung $\bar{G}$ ist mit der Menge G^* äquivalent.

1. Erweiterte Abbildungen. Durch die Abbildung $\boldsymbol{g}$ ist eine Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$, die sogenannte *erweiterte Abbildung*, des Systems aller Teilmengen in G in das System aller Teilmengen in G^* eindeutig bestimmt. Diese Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$ wird so definiert, daß jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset G$ die aus den $\boldsymbol{g}$-Bildern aller Punkte $a \in A$ bestehende Teilmenge $\boldsymbol{g}A \subset G^*$ zugeordnet wird; außerdem wird $\bar{\boldsymbol{g}}\,\emptyset = \emptyset$ gesetzt. Wenn also insbesondere $A = \bar{a} \in \bar{G}$ ist, so besteht die Teilmenge $\bar{\boldsymbol{g}}\bar{a} \subset G^*$ aus dem einzigen Element $a^* \in G^*$, auf das die in $\bar{a}$ liegenden Punkte von G bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ abgebildet werden.

Wegen Vereinfachung der Bezeichnungen schreiben wir statt $\bar{\boldsymbol{g}}$ auch nur $\boldsymbol{g}$. Wir wenden also das Symbol $\boldsymbol{g}$ auf Elemente in G an, etwa $a \in G$, und haben als Resultat $\boldsymbol{g}a$ das Bild von a bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$, oder wir wenden es auf Teilmengen in G, etwa $A \subset G$, an und haben dann als Resultat $\boldsymbol{g}A$ das Bild von A bei der erweiterten Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$.

Von derselben Regel machen wir auch dann Gebrauch, wenn es sich um Systeme von Teilmengen in G handelt: Ist $\mathbb{A}$ ein System von solchen Teilmengen, so bezeichnen wir mit $\boldsymbol{g}\mathbb{A}$ das System von Bildern der einzelnen Elemente in $\mathbb{A}$ bei der Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$.

Ist beispielsweise $\bar{A}$ eine Zerlegung der Menge G, so bedeutet $\boldsymbol{g}\bar{A}$ das System der Bilder einzelner Elemente von $\bar{A}$ bei der Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$. Ist insbesondere $\boldsymbol{g}\bar{A}$ eine Zerlegung auf G^*, so ist durch die erweiterte Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$ eine partielle Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}_{\bar{A}}$ der Zerlegung $\bar{A}$ auf die Zerlegung $\boldsymbol{g}\bar{A}$ bestimmt, bei der jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ sein Bild $\boldsymbol{g}\bar{a} \in \boldsymbol{g}\bar{A}$ zugeordnet wird.

Es seien A, B beliebige Teilmengen in G.

Offenbar folgt aus $A \subset B$ die Beziehung $\boldsymbol{g}A \subset \boldsymbol{g}B$.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Es gilt $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$ dann und nur dann, wenn jedes mit einer Menge A, B inzidente Element in $\bar{G}$ auch mit der anderen inzident ist.

Beweis. a) Es sei $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$. Wenn ein Element $\bar{g} \in \bar{G}$ etwa mit der Menge A inzident ist, so gibt es einen Punkt $a \in A \cap \bar{g}$, und wir sehen, daß $\bar{g}$ die Menge aller $\boldsymbol{g}$-Urbilder des Punktes $\boldsymbol{g}a$ darstellt. Da $\boldsymbol{g}a \in \boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$ ist, existiert ein Punkt $b \in B$, dessen Bild bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{g}a$ zusammenfällt, also $\boldsymbol{g}b = \boldsymbol{g}a$, und wir sehen, daß $b \in \bar{g}$, also $\bar{g}$ mit B inzident ist.

b) Es sei nun jedes mit einer der Mengen A, B inzidente Element in $\bar{G}$ auch mit der anderen inzident. Wir betrachten einen Punkt $a^* \in \boldsymbol{g}A$. Dann ist das aus den $\boldsymbol{g}$-Urbildern des Punktes a^* bestehende Element $\bar{g} \in \bar{G}$ mit der Menge A und folglich auch mit B inzident. Es gibt also einen Punkt $b \in B$ so, daß $a^* = \boldsymbol{g}b \in \boldsymbol{g}B$ ist; also besteht die Beziehung $\boldsymbol{g}A \subset \boldsymbol{g}B$. Zugleich gilt aus analogen Gründen die Beziehung $\supset$ und folglich auch die Gleichheit $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$.

Offenbar kann der obige Satz auch so formuliert werden: *Es gilt $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$ dann und nur dann, wenn $A \sqsubset \bar{G} = B \sqsubset \bar{G}$ ist.*

Es sei $\mathbb{A}$ ein nicht leeres System von Untermengen in G.

Wenn alle Elemente von $\mathbb{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{g}$ dasselbe Bild $A^* \subset G^*$ besitzen, wenn also für $A \in \mathbb{A}$ die Gleichheit $\boldsymbol{g}A = A^*$ besteht, so bildet sich auch die Menge $\boldsymbol{s}\mathbb{A}$ auf A^* ab, d. h. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\mathbb{A}) = A^*$.

In der Tat, zunächst haben wir für jedes Element $A \in \mathbb{A}$ die Beziehung $A \subset \boldsymbol{s}\mathbb{A}$, woraus $A^* = \boldsymbol{g}A \subset \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\mathbb{A})$ folgt. Ferner ist jeder Punkt $a \in \boldsymbol{s}\mathbb{A}$ in einem Element $A \in \mathbb{A}$ enthalten, und es gilt $\boldsymbol{g}a \in \boldsymbol{g}A = A^*$; daraus folgt $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\mathbb{A}) \subset A^*$. Damit ist der Beweis erbracht.

2. Sätze über Abbildungen von Zerlegungen. Es sei $\bar{A}$ eine Zerlegung auf G. Das System $\boldsymbol{g}\bar{A}$ von Untermengen in G^* schließt offenbar alle Elemente von G^* ein. Dasselbe braucht jedoch in keiner Weise eine Zerlegung der Menge G^* darzustellen, da bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ die Bilder von zwei verschiedenen Elementen in $\bar{A}$ inzident sein können, ohne zusammenzufallen.

Der folgende Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ das Bild der Zerlegung $\bar{A}$ eine Zerlegung der Menge G^* darstellt.

Das Bild $\boldsymbol{g}\bar{A}$ der Zerlegung $\bar{A}$ stellt dann und nur dann eine Zerlegung der Menge G^* dar, wenn die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ komplementär sind.

Beweis. a) Wir nehmen an, das System $\boldsymbol{g}\bar{A}$ sei eine Zerlegung auf G^*. Wir betrachten zwei Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{g} \in \bar{G}$, die in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ als Teilmengen enthalten sind, und wollen zeigen, daß $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$ ist. Es sei $\bar{b} \in \bar{A}$ ein mit $\bar{g}$ inzidentes Element. Dann haben wir $\bar{b} \subset \bar{u}$, und es gibt eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{G}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{b}$:

$$(\bar{a} =)\ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\ (= \bar{b}).$$

Nach der Definition der Bindung sind nun aber zwei benachbarte Elemente $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$ je mit einem Element von $\bar{G}$ inzident; daraus folgt, daß die Bilder $\boldsymbol{g}\bar{a}_\beta$, $\boldsymbol{g}\bar{a}_{\beta+1}$ dieser Elemente miteinander inzidieren. Da das System $\boldsymbol{g}\bar{A}$ eine Zerlegung auf G^* darstellt, gilt $\boldsymbol{g}\bar{a}_\beta = \boldsymbol{g}\bar{a}_{\beta+1}$ und folglich auch $\boldsymbol{g}\bar{a} = \boldsymbol{g}\bar{b}$. Daraus schließen wir auf Bestehen der Gleichheit $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{b} \sqsubset \bar{G}$. Da nun $\bar{g} \in \bar{b} \sqsubset \bar{G}$ ist, haben wir $\bar{g} \in \bar{a} \sqsubset \bar{G}$ und folglich $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$.

b) Wir nehmen an, die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ seien komplementär. Es ist zu zeigen, daß für je zwei Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ die Mengen $\boldsymbol{g}\bar{a}$, $\boldsymbol{g}\bar{b}$ entweder disjunkt oder identisch sind. Wir betrachten die Mengen $\boldsymbol{g}\bar{a}$, $\boldsymbol{g}\bar{b}$ und setzen voraus, daß sie inzident sind. Es gibt also Punkte $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, für die $\boldsymbol{g}a = \boldsymbol{g}b \in \boldsymbol{g}\bar{a} \cap \boldsymbol{g}\bar{b}$ gilt. Wir sehen, daß das aus allen $\boldsymbol{g}$-Urbildern des Punktes $\boldsymbol{g}a$ bestehende Element $\bar{g} \in \bar{G}$ mit beiden Elementen $\bar{a}$, $\bar{b}$ inzidiert und daß folglich diese Elemente in demselben Element der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{G}]$ als Teilmengen enthalten sind. Da die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ komplementär sind, haben wir $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{b} \sqsubset \bar{G}$, und daraus folgt $\boldsymbol{g}\bar{a} = \boldsymbol{g}\bar{b}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ komplementär sind.

Nach dem obigen Satz ist das System $\boldsymbol{g}\bar{A}$ eine Zerlegung auf G^*. Die erweiterte Abbildung $\boldsymbol{g}$ bestimmt die partielle Abbildung der Zerlegung $\bar{A}$ auf $\boldsymbol{g}\bar{A}$, bei der naturgemäß jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ sein Bild $\boldsymbol{g}\bar{a} \in \boldsymbol{g}\bar{A}$ zukommt. Im folgenden verstehen wir unter der Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Zerlegung $\bar{A}$ auf die Zerlegung $\boldsymbol{g}\bar{A}$ diese partielle Abbildung.

Zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ von $\bar{A}$ auf $\boldsymbol{g}\bar{A}$ gehört eine Zerlegung $\bar{\bar{A}}$ von $\bar{A}$. Die Elemente von $\bar{\bar{A}}$ setzen sich je aus den Elementen von $\bar{A}$ zusammen, die bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{g}$ dasselbe Bild haben.

Wir wollen zeigen, daß *die durch diese Zerlegung $\bar{\bar{A}}$ erzwungene Überdeckung von $\bar{A}$ die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\bar{A}, \bar{G}]$ der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ darstellt.*

Beweis. Wir betrachten ein Element $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$. Es ist zu zeigen, daß die Menge $\boldsymbol{s}\bar{\bar{a}}$ ein Element von $[\bar{A}, \bar{G}]$ darstellt. Es sei $\bar{a} \in \bar{\bar{a}}$ ein beliebiges und $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ dasjenige Element, welches $\bar{a}$ als Teilmenge enthält, also $\bar{a} \subset \bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$. Wir haben $\bar{a} \subset \boldsymbol{s}\bar{\bar{a}} \cap \bar{u}$. Jedes Element $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ wird bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{g}$ auf dasselbe Element wie $\bar{a}$ abgebildet, so daß die Gleichheit $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{x} \sqsubset \bar{G}$ besteht. Aus ihr schließen wir, daß sich das Element $\bar{x}$ mit $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{G}$ verbinden läßt und folglich in $\bar{u}$ als Teilmenge enthalten ist. Damit ist die Gültigkeit der Beziehung $\boldsymbol{s}\bar{\bar{a}} \subset \bar{u}$ festgestellt. Umgekehrt gilt für jedes in $\bar{u}$ enthaltene Element $\bar{x} \in \bar{A}$ wegen der Komplementarität der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{G}$ die Gleichheit $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{x} \sqsubset \bar{G}$. Aus dieser Gleichheit sehen wir, daß sich das Element $\bar{x}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{g}$ auf dasselbe Element wie $\bar{a}$ abbildet, woraus $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ und somit auch $\bar{x} \subset \boldsymbol{s}\bar{\bar{a}}$ folgt. Damit ist die Gültigkeit der Beziehung $\bar{u} \subset \boldsymbol{s}\bar{\bar{a}}$ festgestellt und der Satz bewiesen.

Wenn wir jedem Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ dasjenige Element $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ zuordnen, welches von den in $\bar{u}$ liegenden Elementen der Zerlegung $\bar{A}$ gebildet wird, so erhalten wir eine schlichte Abbildung der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{G}]$ auf die Zerlegung $\bar{\bar{A}}$ (§ 6, Nr. 8); wenn wir ferner jedem Element $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ dasjenige Element $\bar{a}^* \in \boldsymbol{g}\bar{A}$ zuordnen, auf welches sich alle in $\bar{\bar{a}}$ vorkommenden Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$ in $\boldsymbol{g}$ abbilden, so erhalten wir eine schlichte Abbildung der Zerlegung $\bar{\bar{A}}$ auf die Zerlegung $\boldsymbol{g}\bar{A}$ (§ 6, Nr. 8). Wenn wir nun diese schlichten Abbildungen zusammensetzen, so erhalten wir eine schlichte Abbildung der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{G}]$ auf die Zerlegung $\boldsymbol{g}\bar{A}$ (§ 6, Nr. 7), in der jedem Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ ein bestimmtes Element $\bar{a}^* \in \boldsymbol{g}\bar{A}$ zugeordnet ist; dieses Element $\bar{a}^*$ ist das $\boldsymbol{g}$-Bild jedes Elements der Zerlegung $\bar{A}$, welches in dem aus allen in $\bar{u}$ liegenden Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$ gebildeten Element $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ vorkommt. Da nun $\bar{u} = \boldsymbol{s}\bar{\bar{a}}$ ist und ferner für $\bar{a} \in \bar{\bar{a}}$ die Gleichheit $\boldsymbol{g}\bar{a} = \bar{a}^*$ besteht, so haben wir $\boldsymbol{g}\bar{u} = \bar{a}^*$ mit Rücksicht auf den letzten Satz in Nr. 1.

Auf diese Weise sind wir zu dem folgenden Ergebnis gekommen:

Wenn sich in der Abbildung $\boldsymbol{g}$ eine Zerlegung $\bar{A}$ von G auf eine Zerlegung $\bar{A}^*$ von G^* abbildet, so sind die Zerlegungen $[\bar{A}, \bar{G}]$, $\bar{A}^*$ äquivalente Mengen, also $[\bar{A}, \bar{G}] \simeq \bar{A}^*$; man erhält eine schlichte Abbildung der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{G}]$ auf die Zerlegung $\bar{A}^*$, indem man jedem Element von $[\bar{A}, \bar{G}]$ sein Bild bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{g}$ zuordnet.

Eine Folgerung aus dieser Erkenntnis besteht darin, daß *jede Überdeckung der Zerlegung* $\bar{G}$ *mit ihrem* $\boldsymbol{g}$*-Bild äquivalent ist; die Abbildung, die jedem Element der Überdeckung sein Bild zuordnet, ist schlicht.*

3. Übungsaufgaben.

1. Es seien $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf G^* und A, B beliebige Teilmengen in G. Man zeige, daß die Beziehungen $\boldsymbol{g}(A \cup B) = \boldsymbol{g}A \cup \boldsymbol{g}B$, $\boldsymbol{g}(A \cap B) \subset \boldsymbol{g}A \cap \boldsymbol{g}B$ gelten.

2. Wir betrachten den in Aufgabe 1 beschriebenen Fall und ferner die zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörige Zerlegung $\bar{G}$ der Menge G. Man zeige, daß die Gleichheit $\boldsymbol{g}(A \cap B) = \boldsymbol{g}A \cap \boldsymbol{g}B$ dann und nur dann besteht, wenn $(A \cap B) \sqsubset \bar{G} = (A \sqsubset \bar{G}) \cap (B \sqsubset \bar{G})$ gilt.

3. Es sei $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf G^* und ferner $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ eine Zerlegung auf G. Das System $\{\boldsymbol{g}\bar{a}, \boldsymbol{g}\bar{b}, \ldots\}$ stellt dann und nur dann eine Zerlegung auf G^* dar, wenn $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ eine Überdeckung der zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörigen Zerlegung $\bar{G}$ von G ist.

4. Es sei $\boldsymbol{g}$ eine *schlichte* Abbildung der Menge G auf G^*. Ferner sei $A \subset G$ eine nicht leere Teilmenge, und $\bar{A}, \bar{B}$ seien Zerlegungen in (auf) G. Dann gilt: a) Die erweiterte Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$ bildet das System aller nicht leeren Teilmengen in G auf dasjenige aller nicht leeren Teilmengen in G^* schlicht ab; b) die Mengen A, $\boldsymbol{g}A$ sind miteinander äquivalent; c) $\boldsymbol{g}\bar{A}$ ist eine Zerlegung in (auf) G^*; d) die Zerlegungen $\bar{A}$, $\boldsymbol{g}\bar{A}$ sind miteinander äquivalent; e) sind die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ miteinander äquivalent bzw. halbverknüpft oder verknüpft, so haben die Zerlegungen $\boldsymbol{g}\bar{A}, \boldsymbol{g}\bar{B}$ stets die gleiche Eigenschaft.

§ 8. Permutationen

Wir werden uns in diesem Kapitel mit schlichten Abbildungen von endlichen Mengen auf sich befassen. Diese Art Abbildungen spielt in der Algebra und insbesondere in der Gruppentheorie eine wichtige Rolle.

1. Definition. Unter einer *Permutation* der Menge G verstehen wir eine schlichte Abbildung der Menge G auf sich (§ 6, Nr. 6).

Im folgenden werden wir uns nur mit Permutationen von *endlichen* Mengen befassen.

Es sei also G eine endliche Menge mit n (≥ 1) Elementen. Aus der Voraussetzung, daß es sich um eine endliche Menge handelt, geht hervor, daß eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{p}$ der Menge G *in* sich eine Permutation dieser Menge darstellt (§ 6, Nr. 10, 2).

Wir wollen die Elemente von G mit den Buchstaben $a, b, \ldots, m$ bezeichnen Dann können wir jeder Permutation $\boldsymbol{p}$ von G eindeutig ein Symbol von der. Form

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots m \\ a^* & b^* & \ldots m^* \end{pmatrix}$$