Beziehungen $(\bar{X}, \bar{B}) \leqq \bar{B} \leqq [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]$, $(\bar{Y}, \bar{A}) \leqq \bar{A} \leqq [\bar{A}, \bar{B}]$ folgendermaßen:

$$[\mathring{A}, \mathring{B}] = [[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})], [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [\bar{A}, [(\bar{X}, \bar{B}), [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]]]$$
$$= [\bar{A}, [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [[\bar{A}, \bar{B}], (\bar{Y}, \bar{A})] = [\bar{A}, \bar{B}];$$

die anderen Formeln findet man auf ähnliche Art.

Die in den obigen Ausführungen besprochenen Eigenschaften der modularen Zerlegungen haben den Charakter „im Großen" oder sind, wie man zu sagen pflegt, global, da sie ohne Bezugnahme auf einzelne Elemente der betrachteten Zerlegungen beschrieben werden können. Außer diesen globalen Eigenschaften ist die folgende, die „lokale" Struktur der modularen Zerlegungen beschreibende Eigenschaft für unsere Zwecke von besonderer Bedeutung:

Für je zwei inzidente Elemente $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ sind die beiden Hüllen $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ verknüpft.

Beweis. Es seien $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ inzidente Elemente. Wir betrachten ein Element $\mathring{a} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$ und wollen zeigen, daß es mit genau einem Element der anderen Hülle inzident ist. Da das Element $\mathring{a} \in \mathring{A}$ mit $\bar{x} \cap \bar{y}$ gemeinsame Punkte besitzt und $\bar{X} \geqq \mathring{A}$ ist, haben wir $\mathring{a} \subset \bar{x}$, $\bar{y} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Wegen dieser letzten Beziehung kommt $\bar{y} \cap \mathring{a}$ als Element in $(\bar{Y}, \mathring{A})$ vor, und aus der Formel $(\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A})$ schließen wir auf die Existenz eines der Gleichheit $\bar{x} \cap \mathring{b} = \bar{y} \cap \mathring{a}$ genügenden Elements $\mathring{b} \in \mathring{B}$. Wir sehen, daß das Element $\mathring{b}$ mit $\mathring{a}$ inzident ist: $\mathring{b} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Da ferner $\mathring{b}$ mit $\bar{x} \cap \bar{y}$ gemeinsame Punkte besitzt, haben wir $\mathring{b} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$. Hiermit ist gezeigt, daß das Element $\mathring{a}$ wenigstens mit dem Element $\mathring{b}$ der Hülle $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ inzident ist. Nun gibt es aber keine weiteren mit $\mathring{a}$ inzidenten Elemente der letztgenannten Hülle, da jedes Element dieser Art in $\bar{y}$ enthalten und mit $\bar{y} \cap \mathring{a} = \bar{x} \cap \mathring{b}$ inzident ist und folglich mit $\mathring{b}$ übereinstimmt. Aus analogen Gründen ist auch jedes Element in $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ mit genau einem Element der anderen Hülle inzident. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Übungsaufgaben.

1. Zwei endliche verknüpfte Zerlegungen haben dieselbe Anzahl von Elementen.

2. In Zusammenhang mit dem letzten Satz von Nr. 3 möge sich der Leser von der Gültigkeit der folgenden Beziehungen überzeugen:

$$((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) \sqcap \boldsymbol{s}\,((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B})) = ((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B})) \sqcap \boldsymbol{s}\,((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) = (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqcap [\bar{A}, \bar{B}].$$

§ 5. Komplementäre Zerlegungen

Eine weitere Art von Zerlegungen auf der Menge G (mit speziellen gegenseitigen Beziehungen) stellen die sogenannten komplementären Zerlegungen dar. Wegen der großen Wichtigkeit von komplementären Zerlegungen für unsere weitere Ausführungen wollen wir diesen Zerlegungen einen eigenen Paragraphen widmen.

1. Der Begriff der komplementären Zerlegungen. Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ Zerlegungen auf G.

Nach Definition der kleinsten gemeinsamen Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ ist jedes Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ die Summe von einigen Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$ und zugleich eine solche von einigen Elementen $\bar{b} \in \bar{B}$. Wir nennen die Zerlegung $\bar{A}$ *komplementär zu* $\bar{B}$ (oder *in bezug auf* $\bar{B}$), wenn jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ mit allen Elementen $\bar{b} \in \bar{B}$, die in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ wie $\bar{a}$ als Teilmengen enthalten sind, inzident ist.

Wenn z. B. die Zerlegung $\bar{A}$ die Zerlegung $\bar{B}$ überdeckt, so ist $\bar{A}$ komplementär zu $\bar{B}$. Wir sehen, daß der neue Begriff den der Überdeckung verallgemeinert.

Der obigen Definition schließen sich die folgenden Aussagen an:

a) *Die Zerlegung $\bar{A}$ ist komplementär zu $\bar{A}$.*

b) *Wenn die Zerlegung $\bar{A}$ zu der Zerlegung $\bar{B}$ komplementär ist, so ist dies auch $\bar{B}$ in bezug auf $\bar{A}$.*

Die Richtigkeit von a) ist evident. Zum Beweis von b) nehmen wir an, daß wohl die Voraussetzung, nicht aber die Behauptung erfüllt sei. In dieser Situation gibt es ein Element $\bar{b} \in \bar{B}$, das nicht mit allen Elementen von $\bar{A}$, die in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ wie $\bar{b}$ als Teilmengen enthalten sind, inzident ist. Daraus folgt die Existenz eines in $\bar{u}$ als Teilmenge enthaltenen, jedoch mit $\bar{b}$ nicht inzidenten Elements $\bar{a} \in \bar{A}$, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Wegen der (nach b)) bestehenden Symmetrie in dem Begriff von komplementären Zerlegungen sprechen wir im allgemeinen von (zueinander) komplementären Zerlegungen, ohne ihre Ordnung zu unterscheiden.

Wir wollen an einem Beispiel folgendes feststellen: *Wenn die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ und zugleich die Zerlegungen $\bar{B}$, $\bar{C}$ komplementär sind, so brauchen die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ diese Eigenschaft nicht zu besitzen.*

Wir betrachten die aus sechs Elementen bestehende Menge

$$G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

und auf ihr die von den Teilmengen

$$\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\}, \quad \bar{a}_2 = \{a_3, a_4\}, \quad \bar{a}_3 = \{a_5, a_6\},$$
$$\bar{b}_1 = \{a_1, a_3, a_5\}, \quad \bar{b}_2 = \{a_2, a_4, a_6\}$$
$$\bar{c}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \bar{c}_2 = \{a_4, a_5, a_6\}$$

gebildeten Zerlegungen

$$\bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}, \quad \bar{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}, \quad \bar{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}.$$

Jedes Element $\bar{a}_\alpha$ ist mit allen Elementen $\bar{b}_\beta$ und jedes $\bar{b}_\beta$ mit allen Elementen $\bar{c}_\gamma$ inzident ($\alpha = 1, 2, 3$; $\beta, \gamma = 1, 2$). Folglich gelten die Beziehungen $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{G}_{\max}$, $[\bar{B}, \bar{C}] = \bar{G}_{\max}$, und sowohl die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ als auch die Zerlegungen $\bar{B}$, $\bar{C}$ sind komplementär. Ferner sehen wir, daß wohl das Element $\bar{a}_2$, nicht aber das Element $\bar{a}_1$ mit allen $\bar{c}_\gamma$ inzident ist; daraus folgt die Beziehung $[\bar{A}, \bar{C}] = \bar{G}_{\max}$ und auch die Feststellung, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ nicht komplementär sind.

2. Charakteristische Eigenschaften. Es seien weiterhin $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ Zerlegungen auf G.

Wenn je zwei Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, die in demselben Element einer gemeinsamen Überdeckung $\bar{C}$ der beiden Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ enthalten sind, gemeinsame Punkte haben, so ist $\bar{C} = [\bar{A}, \bar{B}]$, und $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind komplementär.

Beweis. Es sei $\bar{C}$ eine gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ und ferner $\bar{c} \in \bar{C}$ ein beliebiges Element; $\bar{c}$ ist die Summe von einigen Elementen der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$. Wir betrachten beliebige, in $\bar{c}$ enthaltene Elemente $\bar{u}$, $\bar{v} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ und ferner ein in $\bar{u}$ enthaltenes Element $\bar{a}_1 \in \bar{A}$. Zu diesem Element $\bar{a}_1$ gibt es ein mit ihm inzidentes Element $\bar{b} \in \bar{B}$, das sowohl in $\bar{u}$ als auch in $\bar{c}$ enthalten ist. Wenn nun die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ die oben beschriebene Eigenschaft haben, so ist $\bar{b}$ mit jedem in $\bar{v}$ enthaltenen Element $\bar{a}_2 \in \bar{A}$ inzident, und wir sehen, daß die zweigliedrige Folge $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}_1$ nach $\bar{a}_2$ darstellt. Daraus folgt $\bar{v} = \bar{u}$, also auch $\bar{c} = \bar{u}$ und ferner $\bar{C} \subset [\bar{A}, \bar{B}]$. Da jedes Element von $[\bar{A}, \bar{B}]$ in einem Element von $\bar{C}$ enthalten ist, gilt zugleich die Beziehung $\supset$, also auch die Gleichheit.

Die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ sind genau dann komplementär, wenn die in $\bar{B}$ liegenden Hüllen von je zwei in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ enthaltenen Elementen $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ identisch sind, also $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} = \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$.

Beweis. a) Wir nehmen an, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementär sind, und betrachten zwei beliebige, in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ enthaltene Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$. Jedes mit $\bar{a}_1$ inzidente Element $\bar{b} \in \bar{B}$ liegt in $\bar{u}$ und ist folglich inzident mit $\bar{a}_2$. Daraus folgt die Beziehung $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} \subset \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$. Aus analogen Gründen gilt auch die Beziehung $\supset$; folglich sind die beiden Hüllen gleich.

b) Wir nehmen an, daß die obige Hüllenbedingung erfüllt ist, und betrachten zwei in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ enthaltene Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Zu $\bar{b}$ gibt es wohl ein mit ihm inzidentes Element $\bar{x} \in \bar{A}$, das infolge dieser Inzidenz ebenfalls in $\bar{u}$ enthalten ist. Folglich haben wir $\bar{b} \in \bar{x} \sqsubset \bar{B} = \bar{a} \sqsubset \bar{B}$ und sehen, daß die Elemente $\bar{a}$, $\bar{b}$ inzident sind.

3. Weitere Eigenschaften. Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementäre Zerlegungen auf G.

Für je zwei der Beziehung $\bar{a} \subset \bar{u}$ genügende Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ gilt die Gleichheit $\bar{u} = \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$.

Beweis. Es seien $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ zwei beliebige Elemente von der erwähnten Art, also $\bar{a} \subset \bar{u}$. Jeder Punkt $u \in \bar{u}$ liegt in einem bestimmten Element $\bar{b} \in \bar{B}$, das selbst in $\bar{u}$ enthalten sein muß. Da die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementär sind, haben die $\bar{a}$, $\bar{b}$ gemeinsame Punkte, und es besteht die Beziehung $\bar{b} \in \bar{a} \sqsubset \bar{B}$. Daraus folgt $u \in \bar{b} \subset \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ und ferner $\bar{u} \subset \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$. Jeder Punkt $a \in \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ liegt in einem mit $\bar{a}$ inzidenten Element $\bar{b} \in \bar{B}$, das ein Teil von $\bar{u}$ ist. Folglich ist $a \in \bar{u}$ und ferner $s(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) \subset \bar{u}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Jede den Beziehungen $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{C} \geqq \bar{A}$ entsprechende Zerlegung $\bar{C}$ auf G ist zu $\bar{B}$ komplementär.

Beweis. Es sei $\bar{C}$ eine den obigen Beziehungen entsprechende Zerlegung auf G. Sodann ist $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq [\bar{C}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$ (§ 3, Nr. 7,2, und Nr. 4) und folglich $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ (§ 3, Nr. 2). Wir betrachten beliebige, in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{C}, \bar{B}]$ enthaltene Elemente $\bar{c} \in \bar{C}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Aus $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ schließen wir, daß die $\bar{c}$, $\bar{b}$ in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ enthalten sind. Wegen $\bar{C} \geqq \bar{A}$ ist $\bar{c}$ die Summe von einigen Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$, und da die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementär sind, sind die $\bar{c}$, $\bar{b}$ inzident. Damit ist gezeigt, daß die Zerlegungen $\bar{C}$, $\bar{B}$ komplementär sind.

Ferner gelten die folgenden Sätze:

Für jede der Bedingung $\bar{X} \geqq \bar{A}$ genügende Zerlegung $\bar{X}$ auf G ist die Zerlegung $\bar{A}$ komplementär zu $(\bar{X}, \bar{B})$.

Für jede der Bedingung $\bar{A} \geqq \bar{Z}$ genügende Zerlegung $\bar{Z}$ auf G ist die Zerlegung $\bar{A}$ komplementär zu $[\bar{Z}, \bar{B}]$.

Beweis. a) Es sei $\bar{X} \geqq \bar{A}$. Wir betrachten ein Element $\bar{u} \in [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$ und wollen zeigen, daß je zwei in $\bar{u}$ liegende Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in (\bar{X}, \bar{B})$ inzident sind, also $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$ ist. Nach § 3, Nr. 7,2 gilt $\bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$ mit passenden Elementen $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ und ferner (nach der Bedeutung von $\bar{b}'$) $\bar{b}' = \bar{x}' \cap \bar{b}$ mit $\bar{x}' \in \bar{X}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Aus $\bar{x}' \cap \bar{b} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$ folgt $\bar{x}' = \bar{x}$ und $\bar{b} \subset \bar{w}$. Ferner haben wir $\bar{a} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$. Aus $\bar{a}$, $\bar{b} \subset \bar{w}$ schließen wir auf die Beziehung $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, denn die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ sind komplementär, und aus $\bar{a} \subset \bar{x}$ auf die Gleichheiten $\bar{a} \cap \bar{b} = (\bar{a} \cap \bar{x}) \cap \bar{b} = \bar{a} \cap (\bar{x} \cap \bar{b}) = \bar{a} \cap \bar{b}'$. Folglich haben wir $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$, w. z. b. w.

b) Es sei $\bar{A} \geqq \bar{Z}$. Wir betrachten ein Element $\bar{u} \in [\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]]$ und wollen zeigen, daß je zwei in $\bar{u}$ liegende Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in [\bar{Z}, \bar{B}]$ inzident sind, also $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$. Aus $[\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]] = [[\bar{A}, \bar{Z}], \bar{B}]$ und $\bar{A} \geqq \bar{Z}$ folgt $[\bar{A}, [\bar{Z}, \bar{B}]] = [\bar{A}, \bar{B}]$, also auch $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Nun ist $\bar{b}'$ die Summe von einigen Elementen $\bar{b} \in \bar{B}$, die wegen $\bar{b}' \subset \bar{u}$ sämtlich in $\bar{u}$ enthalten sind. Da die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementär sind, sind die Elemente $\bar{b}$ und somit auch ihre Summe $\bar{b}'$ mit $\bar{a}$ inzident, also $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Modularität. Es seien weiterhin $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementäre Zerlegungen auf G. *Ist $\bar{X} \geqq \bar{A}$, so ist die Zerlegung $\bar{B}$ modular in bezug auf die Zerlegungen $\bar{X}$, $\bar{A}$.*

Beweis. Es sei $\bar{X}$ eine Überdeckung von $\bar{A}$, also $\bar{X} \geqq \bar{A}$. Nach § 3, Nr. 7,2 haben wir die Gültigkeit der Beziehung $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \leqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$ festzustellen. Wir betrachten ein Element $\bar{u}' \in (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])$, so daß $\bar{u}' = \bar{x} \cap \bar{u}$ ist mit geeigneten Elementen $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Das Element $\bar{u}$ ist die Summe von bestimmten, in der Zerlegung $\bar{A}$ liegenden Elementen, von denen einige, die wir mit $\bar{a}$ bezeichnen wollen, mit dem Element $\bar{x}$ inzident, die übrigen, soweit es solche gibt, mit $\bar{x}$ disjunkt sind. Wegen der Beziehung $\bar{X} \geqq \bar{A}$ gilt $\bar{x} \supset \bar{a}$

für jedes $\bar{a}$, und wir sehen, daß $\bar{u}'$ die Summe aller dieser Elemente $\bar{a}$ darstellt, $\bar{u}' = \bigcup \bar{a}$. Wir haben noch zu zeigen, daß sich je zwei Elemente $\bar{a}$ mit Hilfe von $(\bar{X}, \bar{B})$ miteinander verbinden lassen. Es seien $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ Elemente mit der Eigenschaft, daß $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{x} \cap \bar{u}$ ist. Da die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ komplementär und die $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ in $\bar{u}$ enthalten sind, gibt es ein in $\bar{u}$ enthaltenes und mit den Elementen $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ inzidentes Element $\bar{b} \in \bar{B}$, d. h., es ist $\bar{a}_1 \cap \bar{b} \neq \emptyset$, $\bar{a}_2 \cap \bar{b} \neq \emptyset$; da ferner die Beziehungen $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{x}$ bestehen, haben wir $\bar{a}_1 \cap \bar{b} = \bar{a}_1 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$, $\bar{a}_2 \cap \bar{b} = \bar{a}_2 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$. Folglich sind die $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ mit $\bar{x} \cap \bar{b} \in (\bar{X}, \bar{B})$ inzident, und die zweigliedrige Folge $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ stellt eine Bindung $\{\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})\}$ von $\bar{a}_1$ nach $\bar{a}_2$ dar. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz läßt sich nicht umkehren. Wir können nämlich an einem Beispiel folgendes zeigen: *Sind $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$ beliebige Zerlegungen auf G und ist die Zerlegung $\bar{B}_0$ in bezug auf jede Überdeckung von $\bar{A}_0$ und auf die Zerlegung $\bar{A}_0$ modular, so brauchen die Zerlegungen $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$ nicht komplementär zu sein.*

Wir betrachten die aus vier Elementen bestehende Menge $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ und auf ihr die von den Teilmengen

$$\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\}, \qquad \bar{a}_2 = \{a_3, a_4\}$$

$$\bar{b}_1 = \{a_1\}, \qquad \bar{b}_2 = \{a_2, a_3\}, \qquad \bar{b}_3 = \{a_4\}$$

gebildeten Zerlegungen

$$\bar{A}_0 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}, \qquad \bar{B}_0 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}.$$

Dann gilt $[\bar{A}_0, \bar{B}_0] = G$, und wir sehen, daß z. B. die Elemente $\bar{a}_1$ und $\bar{b}_3$ keine gemeinsamen Punkte haben und folglich die Zerlegungen $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$ nicht komplementär sind. Im ganzen gibt es nur zwei Überdeckungen von $\bar{A}_0$, und zwar $\bar{X}_1 = \bar{A}_0$, $\bar{X}_2 = \bar{G}_{\max}$, und die Zerlegung $\bar{B}_0$ ist sowohl in bezug auf $\bar{X}_1$, $\bar{A}_0$ als auch auf $\bar{X}_2$, $\bar{A}_0$ modular (§ 4, Nr. 3).

Infolge des obigen Satzes haben die aus den Zerlegungen $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$ bestehenden Gebilde alle Eigenschaften von modularen Zerlegungen, wie wir sie in § 4, Nr. 3 beschrieben haben. Insbesondere gelten für die Zerlegungen

$$\mathring{A} = (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) = [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})],$$

$$\mathring{B} = (\bar{Y}, [\bar{B}, \bar{A}]) = [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]$$

die in § 4, Nr. 3 gegebenen Formeln (1) und (2). Darüber hinaus lassen sich weitere, mit der Komplementarität der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ zusammenhängenden Eigenschaften von $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ angeben. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß *die Zerlegungen $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ komplementär sind,* und überlassen es dem Leser, sich davon unter Anwendung der Formel $[\mathring{A}, \mathring{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ zu überzeugen.

5. **Lokale Eigenschaften.** Es seien wieder $\bar{A}$, $\bar{B}$ komplementäre Zerlegungen auf G und $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ihre Überdeckungen, also $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$. Die $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ mögen dieselbe Bedeutung wie oben haben.

Ferner sei $a \in G$ ein beliebiger Punkt, und $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ seien die den Punkt a enthaltenden Elemente der Zerlegungen.

Zunächst *haben die Zerlegungen* $\bar{A}, \bar{B}$ *die auf der Modularität beruhende lokale Eigenschaft, daß die beiden Hüllen* $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ *verknüpft sind.*

Ferner betrachten wir in G die Zerlegungen

$$\bar{X}^a = \bar{x} \sqsubset \bar{A} \, (= \bar{A} \sqcap \bar{x}), \qquad \bar{Y}^a = \bar{y} \sqsubset \bar{B} \, (= \bar{B} \sqcap \bar{y}),$$

von denen $\bar{X}^a$ bzw. $\bar{Y}^a$ auf $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ liegt und $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$ als Element enthält.

Wir wollen zeigen, daß *die Zerlegungen* $\bar{X}^a$, $\bar{Y}^a$ *in bezug auf* $\bar{a}, \bar{b}$ *adjungiert sind.* Zu diesem Zweck haben wir das Bestehen der folgenden Gleichheit zu beweisen:

$$\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y}) = \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{Y}^a \sqcap \bar{x}).$$

Wir bezeichnen mit $\mathring{a}, \mathring{b}$ die den Punkt a enthaltenden Elemente von $\mathring{A}, \mathring{B}$. Da nach Nr. 3 die Zerlegungen $\bar{A}$, $(\bar{X}, \bar{B})$ komplementär sind und $\mathring{A}$ ihre kleinste gemeinsame Überdeckung darstellt, haben wir (Nr. 3)

$$\mathring{a} = \mathbf{s}((\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A}).$$

Ferner sehen wir mit Rücksicht auf die Beziehung $\bar{X} \geq \bar{A}$, daß die Zerlegung $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A}$ genau aus denjenigen Elementen von $\bar{A}$ besteht, die in $\bar{x}$ liegen und mit $\bar{b}$ inzident sind, so daß $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A} = \bar{b} \sqsubset \bar{X}^a$ ist. Daraus folgt $\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a) = \mathring{a}$ und ferner

$$\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y}) = \mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a) \cap \bar{y} = \mathring{a} \cap \bar{y} \in (\bar{Y}, \mathring{A});$$

diese Beziehung ergibt sich aus $\mathring{a} \cap \bar{y} \supset \{a\} \neq \emptyset$. Wir sehen, daß die Menge $\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y})$ in der Zerlegung $(\bar{Y}, \mathring{A})$ enthalten ist, und zwar als dasjenige Element, in dem der Punkt a liegt. Ähnlich kann gezeigt werden, daß die Menge $\mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{Y}^a \sqcap \bar{x})$ in der Zerlegung $(\bar{X}, \mathring{B})$ als das den Punkt a einschließende Element enthalten ist. Aus diesen Tatsachen und aus $(\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A})$ folgt die obige Gleichheit.

6. Übungsaufgaben.

1. Die für modulare Zerlegungen $\bar{X} \geq \bar{A}$, $\bar{Y} \geq \bar{B}$ bestehenden Gleichheiten $(\mathring{A}, \mathring{B}) = (\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A}) = ((\bar{X}, \bar{Y}), [\bar{A}, \bar{B}])$ (vgl. § 4, Nr. 3 (2)) können durch $= [(\bar{X}, \bar{B}), (\bar{Y}, \bar{A})]$ ergänzt werden, falls die $\bar{A}, \bar{B}$ komplementär sind. In diesem Fall sind auch die Zerlegungen $(\bar{X}, \bar{B})$, $(\bar{Y}, \bar{A})$ komplementär.

2. Man zeige, daß auf einer aus vier Elementen bestehenden Menge genau die folgenden Paare von komplementären Zerlegungen liegen: a) Paare, die aus je einer Überdeckung und einer Verfeinerung bestehen; b) Paare, deren beide Zerlegungen aus zwei Elementen bestehen und jedes Element von zwei Punkten der Menge gebildet wird; c) Paare, deren beide Zerlegungen aus drei Elementen bestehen und untereinander disjunkt sind.