M A T I C E

1. POJEM MATICE V ČÍSELNÉM TĚLESE

1.1. Definice číselného tělesa. Číselné těleso T je každá neprázdná množina (komplexních) čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

(a) Obsahuje aspoň jedno číslo $p \neq 0$.

(b) S každou dvojicí (stejných nebo různých) čísel $a \in T$, $b \in T$ obsahuje též součet $a+b$, rozdíl $a-b$, součin ab a je-li $b \neq 0$, též podíl a/b.

PŘÍKLADY číselných těles: 1. Množina K všech komplexních čísel. Je to největší (komplexní) číselné těleso v tom smyslu, že každé jiné číselné těleso T je jeho podmnožinou, tj. $T \subset K$.

2. Množina D všech reálných čísel.

3. Množina R všech racionálních čísel.

PŘÍKLAD 1. Dokažme, že množina R všech racionálních čísel je nejmenší číselné těleso, takže každé jiné číselné těleso T obsahuje těleso R.

Řešení. Budiž T libovolné číselné těleso. Podle vlastnosti (a) předešlé definice obsahuje těleso T aspoň jedno číslo $p \neq 0$. Podle vlastnosti (b) téže definice obsahuje těleso T též číslo $p/p = 1$ a tedy též čísla

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad \ldots, \quad 1 - 1 = 0, \quad 0 - 1 = -1, \quad 0 - 2 = -2, \quad \ldots,$$

tedy všechna celá čísla. Odtud na základě vlastnosti (b) plyne, že těleso T obsahuje podíl m/n každých dvou celých čísel m, $n \neq 0$, a tedy každé racionální číslo. Proto $R \subset T$.

1.2. Definice matice v číselném tělese. Maticí typu m/n v libovolném číselném tělese T rozumíme skupinu čísel vybraných z tělesa T a uspořádaných do m řádků a do n sloupců. Přitom tato čísla nazýváme pak prvky matice.

Např. symbol
$$\begin{bmatrix} 1, & 2, & -2, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 4 \end{bmatrix}$$

představuje matici typu $2/4$ (tj. o 2 řádcích a 4 sloupcích) v tělese reálných čísel.

1.3. OZNAČENÍ. 1. Vezměme v úvahu libovolnou matici typu m/m v tělese T. Její prvky vhodně pojmenujeme, tj. označíme podle tohoto pravidla: Prvek, který leží v j-tém řádku (pro $1 \leq j \leq m$) a v k-tém sloupci (kde je $1 \leq k \leq n$), uvažované matice označíme týmž písmenem (např. a) s indexy j,k, tedy znakem a_{jk}. Při tomto označení se pak každá matice typu m/n dá napsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{stručněji } \| a_{jk} \| . \qquad (1)$$

Tak např. v matici uvedené v odst. 1.2 je

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = \sqrt{2}, \quad a_{13} = -2, \ \dots, \ a_{23} = 0, \quad a_{24} = 4.$$

2. Vyskytnou-li se v nějaké úvaze dvě nebo více matic, značíme prvky jedné z nich např. $a_{11}, a_{12}, \dots$, kdežto druhé $b_{11}, b_{12}, \dots$, apod. Přitom jednotlivé matice označujeme pro stručnost jediným, obvykle velkým tučným písmenem, např.

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \dots \qquad \text{a podobně,}$$

popřípadě též s indexy, např.

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}' \qquad \text{a podobně.}$$

1.4. Rovnost dvou matic. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou matice téhož typu m/n v témže tělese T.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou si rovny, a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, když každý prvek a_{jk} matice $\mathbf{A}$ se rovná stejnolehlému prvku b_{jk} matice $\mathbf{B}$, tj. platí-li vztahy

$$a_{jk} = b_{jk} \quad (\text{pro } j = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,n).$$

Stručně řečeno: Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou rovné, právě když jsou úplně stejné.

Z uvedené definice rovnosti matic plyne, že (maticová) rovnice

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad (2)$$

zastupuje celkem mn rovností tvaru

$$\begin{array}{llll} a_{11} = b_{11}, & a_{12} = b_{12}, & \dots, & a_{1n} = b_{1n}, \\ a_{21} = b_{21}, & a_{22} = b_{22}, & \dots, & a_{2n} = b_{2n}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots, \\ a_{m1} = b_{m1}, & a_{m2} = b_{m2}, & \dots, & a_{mn} = b_{mn}. \end{array}$$

1.5. ÚMLUVA. Pokud v dalších kapitolách a odstavcích nebude výslovně uvedeno jinak, budeme mlčky předpokládat, že jsme zvolili určité číselné těleso a že všechny uvažované matice jsou v tomto tělese T.

1.6. Poznámka o hodnosti matice. Hodností matice $\mathbf{A}$ typu m/n rozumíme, jak je známo z přednášek o determinantech, takové celé nezáporné číslo p, že všechny determinanty řádu p + 1 vybrané z matice $\mathbf{A}$ mají, pokud existují, hodnotu rovnou nule, kdežto aspoň jeden determinant řádu p vybraný z této matice má hodnotu různou od nuly.

Přitom říkáme, že determinant řádu j byl vybrán z dané matice $\mathbf{A}$, když byl utvořen z jejích řádků a sloupců vypuštěním některých řádků (v počtu m - j) a některých sloupců (v počtu n-j).

Přitom se v přednáškách o determinantech dokazují následující věty o hodnosti matice $\mathbf{A}$ typu m/n:

1. Pro hodnost p matice A platí vztahy

$$p \leqq m, \qquad p \leqq n.$$

2. Má-li matice $\mathbf{A}$ hodnost p, pak z jejích m řádků (z jejích n sloupců) je právě p lineárně nezávislých, kdežto ostatní řádky (sloupce) jsou lineárními kombinacemi těchto lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Další vlastnosti hodnosti matice odvodíme v kap. 17.

2. ČTVERCOVÁ MATICE A JEJÍ VÝZNAČNÉ DRUHY

2.1. Definice. Má-li daná matice týž počet řádků i sloupců, takže je typu n/n, nazývá se čtvercová řádu n.

Tak např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 3, & \sqrt{2} \\ 3, & 2, & 0 \\ \sqrt{2}, & 0, & 4 \end{bmatrix}$$

představuje čtvercovou matici řádu n = 3 (v tělese reálných čísel).

2.2. VÝZNAČNÉ ČTVERCOVÉ MATICE. 1. Nulová matice (neboli matice nula) řádu n je čtvercová matice řádu n, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji $\mathbf{0}$.

Tak např. matice

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

je nulová matice třetího řádu.

2. Jednotková matice $\mathbf{E}$ řádu n. Je to čtvercová matice řádu $n > 1$, která má v hlavní diagonále samé jedničky (takže $a_{jj} = 1$), kdežto ostatní prvky jsou vesměs nuly (takže $a_{jk} = 0$ pro všecka $j \neq k$). Je tedy tvaru

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

3. Matice $\mathbf{E}_{jk}$. Důležité jsou čtvercové matice řádu $n > 1$, jejichž jediný prvek $a_{jk} = 1$ (kde $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$), zatímco všechny ostatní prvky jsou vesměs nuly. Tyto matice značíme $\mathbf{E}_{jk}$ a jsou tedy tvaru

$$\mathbf{E}_{jk} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \dots, & 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{j-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \text{k-tý sloupec} \end{array} \qquad (4)$$

Matic $\mathbf{E}_{jk}$ řádu n je celkem n^2, a jsou to matice

$$\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \dots, \mathbf{E}_{1n}, \mathbf{E}_{21}, \dots\dots, \mathbf{E}_{mn}.$$

3. MATICE TRANSPONOVANÉ, SYMETRICKÉ A POLOSYMETRICKÉ

3.1. Definice transponované matice. Matici typu n/m, kterou dostaneme z dané matice $\mathbf{A}$ typu m/n tím, že v ní vyměníme řádky za sloupce (aniž změníme jejich pořadí), nazýváme transponovanou z matice $\mathbf{A}$ (nebo sdruženou s maticí $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}'$.

PŘÍKLAD 2. Určete transponované matice daných matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Řešení.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 0 \\ 3, & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 3, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 3, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 4 \end{bmatrix}.$$

3.2. POZNÁMKY. 1. Snadno se zjistí, že matice transponovaná z transponované matice se rovná původní matici, tj.

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A} . \qquad (5)$$

2. Všimněme si, že pro následující čtvercové matice platí:

$$\mathbf{O}' = \mathbf{O},$$
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E},$$
$$\mathbf{E}'_{jk} = \mathbf{E}_{kj} \qquad (\text{pro } j,k = 1,2,\dots,n).$$

3.3. Definice symetrické matice. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu $n > 1$, která se rovná své transponované matici $\mathbf{A}'$, takže je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A},$$

se nazývá symetrická matice řádu n.

Snadno se vidí, že u symetrické matice prvky souměrně položené vzhledem k hlavní diagonále, jsou si rovny, takže platí vztahy

$$\boxed{a_{jk} = a_{kj} \quad \text{pro} \quad j,k = 1,2, \dots, n.} \qquad (6)$$

Příkladem symetrické matice je matice $\mathbf{B}$ z odst. 3.1. Také matice nulová $\mathbf{O}$ řádu n a jednotková $\mathbf{E}$ jsou symetrické.

3.4. Definice polosymetrické matice. Čtvercová matice $\mathbf{B}$ řádu $n > 1$, pro jejíž prvky b_{jk} platí vztahy

$$b_{jk} = - b_{kj} \qquad \text{pro } j,k = 1,2, \dots n, \qquad (7)$$

se nazývá polosymetrická řádu n.

Snadno se zjistí, že prvky b_{jj} (v hlavní diagonále) polosymetrické matice jsou vesměs rovny nule, neboť ze vztahu

$$b_{jj} = - b_{jj} \quad \text{plyne} \quad 2b_{jj} = 0 \quad \text{a tedy} \quad b_{jj} = 0.$$

Příklad polosymetrické matice:

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & -\sqrt{3} \\ -1, & 0, & 2 \\ \sqrt{3}, & -2, & 0 \end{bmatrix}$$

4. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATICEMI

Protože pojem rovnosti dvou matic jsme zavedli už v odst. 1.4, uvedeme si zde pojem sčítání (popř. odčítání), skalárního násobení a násobení matic.

4.1. Sčítání dvou matic je operace, která dvěma maticím $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ téhož typu m/n přiřazuje novou matici, která se nazývá součet matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a značí se $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Je to matice opět typu m/n a její každý prvek c_{jk} se dostane sečtením stejnolehlých prvků $a_{jk} \in \mathbf{A}$, $b_{jk} \in \mathbf{B}$, takže

$$\boxed{c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}} \tag{8}$$

Podobně se definuje rozdíl $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{B}$ (v tomto pořadí). Pro její prvky d_{jk} platí vztah

$$\boxed{d_{jk} = a_{jk} - b_{jk}} \tag{9}$$

Je tedy

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12}, & \ldots, & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & \ldots, & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1}, & a_{m2} + b_{m2}, & \ldots, & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11}, & a_{12} - b_{12}, & \ldots, & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21}, & a_{22} - b_{22}, & \ldots, & a_{2n} - b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} - b_{m1}, & a_{m2} - b_{m2}, & \ldots, & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}.$$

4.2. POZNÁMKY. 1. Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ v témže tělese T, pak vzhledem k definici 1.1 jsou obě matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ opět v tělese T.

2. Zřejmě pro každou matici $\mathbf{A}$ typu m/n a matici $\mathbf{0}$ téhož typu platí

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{0} = \mathbf{A}.$$

PŘÍKLAD 3. Vypočtěme součet $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ a rozdíl $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ daných dvou matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Řešení. Je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 3, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & \sqrt{2} \\ -1, & 2, & 1 \end{bmatrix},$$

pak je

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 3 \\ 4, & 2, & \sqrt{2}-1 \\ -1, & 2, & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 2, & 2, & -1-\sqrt{2} \\ 1, & -2, & -1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Skalární násobení matice číslem je operace, která libovolné matici $\mathbf{A}$ typu m/n a libovolnému číslu r (z téhož číselného tělesa T jako je $\mathbf{A}$) přiřazujeme novou matici, kterou značíme $\mathbf{A}r$. Nazýváme ji skalární součin matice s číslem r. Je to opět matice typu m/n v tělese T a je utvořena tak, že každý její prvek je součinem prvku $a_{jk} \in \mathbf{A}$ s číslem r. Je tedy tvaru

$$\mathbf{A}r = \begin{bmatrix} a_{11}r, & a_{12}r, & \dots, & a_{1n}r \\ a_{21}r, & a_{22}r, & \dots, & a_{2n}r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}r, & a_{m2}r, & \dots, & a_{mn}r \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Podobně se definuje skalární součin čísla r s maticí $\mathbf{A}$, který značíme symbolem $r\mathbf{A}$, přičemž klademe

$$r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ra_{11}, & ra_{12}, & \dots, & ra_{1n} \\ ra_{21}, & ra_{22}, & \dots, & ra_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{m1}, & ra_{m2}, & \dots, & ra_{mn} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Protože platí $ra_{jk} = a_{jk}r$, jsou matice (10) a (11) si rovny, takže vždy je

$$\boxed{\mathbf{A}r = r\mathbf{A}\,.} \qquad (12)$$

4.4. POZNÁMKY. 1. Vzhledem k vztahu (12) je jedno, mluvíme-li o skalárním součinu matice $\mathbf{A}$ s číslem r nebo čísla r s maticí $\mathbf{A}$.

2. Místo výrazu $(-1)\mathbf{A}$ píšeme stručněji $-\mathbf{A}$.

3. Snadno se zjistí, že čtvercová matice $\mathbf{B}$ je polosymetrická, právě když platí pro ni vztah

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}'\,. \qquad (13)$$

4.5. Násobení dvou matic je operace, která matici $\mathbf{A}$ typu m/n a matici $\mathbf{B}$ typu n/r přiřazuje matici typu m/r, kterou značíme $\mathbf{AB}$ a nazýváme součin matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{B}$ (v tomto pořadí). Přitom matice $\mathbf{AB}$ má prvky c_{jr}, které se z prvků $a_{jk} \in \mathbf{A}$ a $b_{kp} \in \mathbf{B}$ (kde $j = 1,2,\dots,m$; $k = 1,2,\dots,n$; $p = 1,2,\dots,r$) dostanou podle vztahu

$$\boxed{c_{jp} = a_{j1}b_{1p} + a_{j2}b_{2p} + \dots + a_{jn}b_{np}.} \qquad (14)$$

Ačkoliv se toto pravidlo zdá na první pohled dosti složité a umělé, uslyšíme brzy, že jeho původ je zcela přirozený. Zapamatuje se snadno pomocí tohoto schématu

$$\boxed{c_{jp}} = \underbrace{\boxed{a_{j1},\ a_{j2},\ \dots,\ a_{jn}}}_{\text{(j-tý řádek matice } \mathbf{A}\text{)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix}}_{\left\{\begin{array}{l}\text{p-tý sloupec}\\ \text{matice } \mathbf{B}\end{array}\right\}}$$

PŘÍKLAD 4. Vypočtěme součin daných matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Řešení. Budiž $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 3, & -1, & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 1 \\ 2, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$.

Matice $\mathbf{AB}$ bude mít prvky

$$c_{11} = 0.(-1) + 1.2 + 2.1 = 4, \qquad c_{21} = 3.(-1) + (-1).2 + 0.1 = -5,$$
$$c_{12} = 0.3 + 1.0 + 2.1 = 2, \qquad c_{22} = 3.3 + (-1).0 + 0.1 = 9,$$
$$c_{13} = 0.1 + 1.0 + 2.(-1) = -2, \qquad c_{23} = 3.1 + (-1).0 + 0.(-1) = 3.$$

Je tedy
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4, & 2, & -2 \\ -5, & 9, & 3 \end{bmatrix}.$$

4.6. POZNÁMKA. Pro čtvercové matice (řádu n) $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{O}$ zřejmě platí vztahy

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}\ ,$$
$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}\ . \tag{15}$$

5. PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Důsledky plynoucí z předchozích definic základních operací s maticemi se dají stručně vystihnout takto:

Celá řada pravidel, která platí pro počítání s komplexními čísly, platí formálně stejně pro počítání s maticemi. Jde zvláště o následující pravidla, v nichž předpokládáme, že uvedené matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou vhodného typu (aby příslušné operace měly smysl):

5.1. Pravidla pro sčítání matic:

1. Zákon komutativní: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. zákon asociativní: $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C})$

5.2. Pravidla pro skalární násobení matice číslem.

1. Zákon komutativní: $a\mathbf{A} = \mathbf{A}a$
2. Zákony asociativní: $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$

$(a\mathbf{A})(b\mathbf{B}) = (ab)\mathbf{AB}$

3. Zákony distributivní: $(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})a = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$.

5.3. Pravidla pro násobení matic.

1. Zákon asociativní: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
2. Zákony distributivní: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$

O tom, že pro násobení matic neplatí (obecně) komulativní zákon (takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$), viz příklad 5 na straně 12.

5.4. Báze čtvercových matic. Každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ (s prvky a_{jk}) řádu n je možno jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci matic $\mathbf{E}_{jk}$, o kterých říkáme, že tvoří bázi všech čtvercových matic řádu n, takže platí

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}\mathbf{E}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{E}_{1n} + \ldots + a_{nn}\mathbf{E}_{nn} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\mathbf{E}_{jk}.$$

Důkazy vzorců, uvedených v odst. 5.1 až 5.4, jsou většinou velmi jednoduché. Poněkud složitější je důkaz asociativního zákona pro násobení (5.3.1) a na ten se omezíme. Ostatní důkazy nechť si čtenář provede jako cvičení.

Nechť prvky matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou (po řadě) a_{jk}, b_{kr}, c_{rs}, přičemž

$$j = 1,2,\ldots,m; \quad k = 1,2,\ldots,n;$$
$$r = 1,2,\ldots,h; \quad s = 1,2,\ldots,p.$$

Protože $\mathbf{A}$ je typu m/n, kdežto $\mathbf{B}$ typu n/h, bude matice $\mathbf{AB}$ typu m/h. Označme její prvky u_{jr}, přičemž podle (14) je

$$u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \ldots + a_{jn}b_{nr} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kr}.$$

Prvky matice $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ typu m/p označme v_{js}, přičemž je

$$v_{js} = \sum_{r=1}^{h} u_{jr}c_{rs} = \sum_{k=1,r=1}^{n,h} a_{jk}b_{kr}c_{rs}.$$

Naproti tomu matice $\mathbf{BC}$ je typu n/p. Jsou-li $\tilde{u}_{ks}$ její prvky, pak podle (14) platí

$$\tilde{u}_{ks} = \sum_{r=1}^{h} b_{kr}c_{rs}.$$

Konečně matice $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ je typu m/p a označíme-li její prvky $\tilde{v}_{js}$, podle (14) plat

$$\tilde{v}_{js} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} u_{ks} = \sum_{k=1,\ r=1}^{n,h} a_{jk} b_{kr} c_{rs} = v_{js}.$$

Protože matice $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ jsou téhož typu a mají stejnolehlé prvky stejné, je vzorec 5.3.1 dokázán.

5.5. POZNÁMKA. Z uvedených vzorců se snadno odvodí vzorce obecnější, které platí pro libovolný počet matic. Tak např. ze vzorce 5.3.1 plyne, že libovolná uspořádaná skupina matic

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\mathbf{A}_n$$

vhodných typů (takových, aby násobení bylo definováno) má jediný součin, který značíme

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_n \quad .$$

Tento součin závisí jenom na pořadí matic, nikoli však na tom, jak sousední matice sdružujeme. Tak např. součin čtyř matic můžeme počítat některým z těchto způsobů:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1[\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)] = \mathbf{A}_1[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4] =$$

$$= (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4) = [\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)]\mathbf{A}_4 = [(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3]\mathbf{A}_4.$$

5.6. Mocnění čtvercových matic. Je-li $\mathbf{A}$ libovolná čtvercová matice a n libovolné přirozené číslo, pak definujeme mocninu $\mathbf{A}^n$ vztahem

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{n} \quad . \tag{16}$$

Nazýváme ji n-tou mocninou matice $\mathbf{A}$.
Kromě toho definujeme nultou mocninu čtvercové matice $\mathbf{A}$ rovností

$$\boxed{\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}}. \tag{17}$$

PŘÍKLAD 4. Vypočtěme $\mathbf{A}^2$, přičemž $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}$

Řešení. Podle vzorce (14) dostáváme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

5.7. Dvě pravidla pro transponování matic. Následující dvě pravidla pro transponování matic nemají obdoby v aritmetice komplexních čísel. Platí totiž

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & (\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \\ 2. & (\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (17) \\ (18) \end{array}$$

Důkaz prvního vzorce je snadný. Proto dokážeme druhý.

Nechť a_{jk} jsou prvky matice $\mathbf{A}$ typu m/n, kdežto b_{kr} jsou prvky matice $\mathbf{B}$ typu n/h. Potom $\mathbf{AB}$ je matice typu m/h a její prvky jsou

$$u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \dots + a_{jn}b_{nr}.$$

Transponovaná matice $(\mathbf{AB})'$ je typu h/m a její prvky jsou

$$\tilde{u}_{rj} = u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \dots + a_{jn}b_{nr}.$$

Matice $\mathbf{B}'$ je typu h/n a její prvky jsou

$$\tilde{b}_{rk} = b_{kr},$$

kdežto matice $\mathbf{A}'$ je typu n/m s prvky

$$\tilde{a}_{kj} = a_{jk}.$$

Proto matice $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ je typu h/m a má prvky

$$\hat{u}_{rj} = \tilde{b}_{r1}\tilde{a}_{1j} + \tilde{b}_{r2}\tilde{a}_{2j} + \dots + \tilde{b}_{rn}\tilde{a}_{mj} =$$
$$= b_{1r}a_{j1} + b_{2r}a_{j2} + \dots + b_{nr}a_{jn} = \tilde{u}_{rj}.$$

Protože matice $(\mathbf{AB})'$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ jsou téhož typu h/m a mají stejné prvky, plyne odtud vztah (18).

<u>5.8. Multiplikační konstanty pro matice $\mathbf{E}_{jk}$.</u> Podle odst. 5.4 každá čtvercová matice n-tého řádu je lineární kombinací (při koeficientech rovných prvkům a_{jk}) čtvercových matic $\mathbf{E}_{jk}$. Protože součin $\mathbf{E}_{jk}\,\mathbf{E}_{rs}$ představuje matici n-tého řádu, dá se vyjádřit jako lineární kombinace matic $\mathbf{E}_{jk}$. Koeficienty v těchto lineárních kombinacích jsou tzv. <u>multiplikační konstanty</u> matic $\mathbf{E}_{jk}$.

Kolik je všech multiplikačních konstant?

Všech matice $\mathbf{E}_{jk}$ je n^2, takže všech součinů $\mathbf{E}_{jk}\,\mathbf{E}_{rs}$ je celkem $(n^2)^2 = n^4$. Pro každý takový součin obdržíme n^2 multiplikačních konstant. Proto všech multiplikačních konstant je úhrnem

$$n^4 \cdot n^2 = n^6.$$

Abychom je určili, vypočtěme součin

$$\mathbf{E}_{jk}\,\mathbf{E}_{rs} = \begin{array}{c} \\ \\ n-j\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 & \dots & 0}_{k.} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 & \dots & 0}_{s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \end{array}.$$

Protože jde o součin dvou čtvercových matic řádu n, představuje uvažovaný součin opět čtvercovou matici řádu n. Tato podle vztahu (14) může mít prvky od nuly různé jenom v j-tém řádku a s-tém sloupci. Avšak pro prvek λ_{jk} ležící v j-tém a k-tém sloupci uvažované matice zřejmě platí

$$\lambda_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq r, \\ 1 & \text{pro } k = r. \end{cases}$$

Proto bude

$$\boxed{\mathbf{E}_{jk}\,\mathbf{E}_{rs} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pro } k \neq r, \\ \mathbf{E}_{js} & \text{pro } k = r. \end{cases}}$$

Těmito vztahy (když j,k,r,s probíhají přirozená čísla 1,2,...,n) jsou multiplikační konstanty určeny a je zřejmé, že každá z nich má hodnotu buď 0 nebo 1.

5.9. Zaměnitelné a nilpotentní matice. Důležitá vlastnost, kterou se odlišuje počítání s maticemi od počítání s obyčejnými komplexními čísly, je tato:

Když a,b jsou dvě libovolná komplexní čísla, pak platí pro násobení komutativní zákon

$$ab = ba.$$

Naproti tomu pro násobení matice $\mathbf{A}$ typu m/n maticí $\mathbf{B}$ typu n/m neplatí vždycky

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$$

Vskutku, aby takový vztah platil, musilo by být předně m = n, takže obě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ musí být čtvercové téhož řádu n (vzhledem k tomu, že $\mathbf{AB}$ je matice řádu m, kdežto $\mathbf{BA}$ matice řádu n).

Avšak i když m = n, není vždy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Ukážeme to na příkladě.

PŘÍKLAD 5. Určeme oba součiny $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Vynásobením podle (14) obdržíme

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1, & -1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}, \text{ takže } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Tím docházíme k této definici:

> Dvě čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ téhož řádu n se nazývají zaměnitelné, právě když platí vztah
>
> $$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$$
>
> V tom případě též pravíme, že matice $\mathbf{A}$ je zaměnitelná s maticí $\mathbf{B}$ (anebo naopak, že $\mathbf{B}$ je zaměnitelná s maticí $\mathbf{A}$).

předešlý příklad 5 zároveň ukazuje, že rovnice

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$$

může platit, aniž jeden z činitelů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ součinu $\mathbf{AB}$ je nulovou maticí, na rozdíl od počítání s obyčejnými komplexními čísly. (Jsou-li a,b komplexní čísla, pak je ab = 0, právě když aspoň jedno z obou čísel a,b je nula.)

Zejména se může stát, že matice $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, avšak některá její mocnina $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. V tom případě se $\mathbf{A}$ nazývá <u>nilpotentní matice</u>, např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}$$

je nilpotentní, jak plyne z příkladu 4 na str. 10.

<u>5.10. Poznámka o abstraktních algebrách.</u> Množina všech čtvercových matic n-tého řádu v tělese T spolu s operacemi, které jsme právě zavedli, je příkladem algebry v tělese T.

<u>Algebrou v nějakém tělese T rozumíme množinu $\mathfrak{A}$ aspoň dvou prvků, na níž jsou definovány tři operace, označené symboly $\oplus$, $\odot$, $\bigcirc$. Tyto operace jsou definovány takto:</u>

1. <u>Operace $\oplus$, zvaná sčítání</u>, přiřazuje každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ další prvek $c \in \mathfrak{A}$, který se značí

$$a \oplus b$$

a který se nazývá součet prvku <u>a</u> s prvkem <u>b</u>.

2. <u>Operace $\odot$, zvaná násobení</u>, přiřazuje každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ další prvek $d \in \mathfrak{A}$, který se značí

$$a \odot b$$

a nazývá součin prvku <u>a</u> s prvkem <u>b</u> (v uvedeném pořadí).

3. <u>Operace $\bigcirc$, zvaná skalární násobení</u>, přiřazuje každému prvku $a \in \mathfrak{A}$ a každému číslu $\alpha \in T$ určité prvky

$$\alpha \bigcirc a, \qquad a \bigcirc \alpha$$

z množiny $\mathfrak{A}$, které nazýváme skalární součin čísla α s prvkem a, popř. skalární součin prvku a s číslem α.

Přitom uvedené tři operace splňují podobné zákony, které jsou popsány v předešlých pravidlech uvedených v odst. 5.1 až 5.4.

Tak např. pro každé tři prvky $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$, $c \in \mathfrak{A}$ platí

$$a \oplus b = b \oplus a,$$

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), \ \dots \text{ atd.}$$

Přitom pravidlo z odst. 5.4 zní zde takto: Každý prvek $a \in \mathfrak{A}$ lze vyjádřit ve tv

$$a = (\alpha_1 \circ v_1) \oplus (\alpha_2 \circ v_2) \oplus \dots \oplus (\alpha_n \circ v_n),$$

tj. jako součet skalárních součinů vhodných čísel $\alpha_\nu \in T$ (pro $\nu = 1,2,\dots,n$) a vhodných prvků $v_\nu \in \mathfrak{A}$. To znamená, že prvky $v_1, v_2, \dots, v_n$ tvoří bázi algebry $\mathfrak{A}$.

Všechny výsledky o maticích, pokud jsou odvozeny jenom ze tří operací: sčítání, násobení a skalární násobení, se dají zobecnit na uvedené algebry.

Poznamenejme ještě, že o algebrách najde čtenář poučení např. v knihách:

Deuring, M.: Algebren, Berlin: Springer 1935

Dickson, L.E.: Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927.

6. MATICE RECIPROKÉ (neboli inverzní).

6.1. Matice reciproká zprava a reciproká z leva. Obdoba mezi počítáním s maticemi a obyčejnými čísly vede nás k této otázce: Existuje nějaká operace s maticemi, která by byla obdobou dělení čísel? Nejprve připomeňme, co se rozumí reciprokou hodnotou nějakého čísla a.

Reciprokou hodnotou čísla a rozumíme takové číslo x, které hoví rovnici

$$ax = 1.$$

Tato reciproká hodnota se značí symbolem $\frac{1}{a}$, popř. a^{-1}, takže je

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad \text{popř. } a\, a^{-1} = 1.$$

Z aritmetiky víme, že reciproká hodnota čísla a existuje, právě když $a \neq 0$. Přitom dělit číslo b číslem $a \neq 0$ znamená násobit číslo b reciprokým číslem a^{-1}.

V odst. 4.6 jsme zjistili, že pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí vztah

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A} .$$

Proto jednotková matice $\mathbf{E}$ je obdobou jedničky v aritmetice. Je tudíž přirozené se tázat, zda k libovolné matici $\mathbf{A}$ typu m/n existuje také taková matice $\mathbf{X}$ typu n/m, že platí maticová rovnice

$$\boxed{\mathbf{AX} = \mathbf{E}}\,, \tag{17}$$

popř. zda existuje taková matice $\mathbf{Y}$ typu n/m, že je

$$\boxed{\mathbf{YA} = \mathbf{E}}\,. \tag{18}$$

V případě, že matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ splňující vztahy (17), (18) existují, budeme nazývat matici $\mathbf{X}$ reciprokou zprava, kdežto $\mathbf{Y}$ maticí reciprokou zleva k matici $\mathbf{A}$ a budeme je značit $\mathbf{A}^{-1}$, popř. ${}^{-1}\mathbf{A}$.

6.2. Věta o matici reciproké zprava $X = A^{-1}$. Nechť matice A je typu m/n. 1. Je-li $m < n$, pak existují k ní matice $X = A^{-1}$ reciproké zprava, právě když hodnost matice A je rovna m. V tom případě každá matice $X = A^{-1}$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$X = HL + \tilde{X} \tag{19}$$

kde H je libovolná matice typu $n/(n-m)$ hovící rovnici

$$AH = 0 \tag{20}$$

a mající hodnost $n-m$, kde dále L je zcela libovolná matice typu $(n-m)/m$ a kde $\tilde{X}$ je libovolná matice, která je partikulárním řešením rovnice (17). Přitom se matice H nazývá fundamentální řešení rovnice (20).

2. Je-li $m = n$, tj. je-li matice A čtvercová řádu n a je-li její hodnost $p = n$, existuje k ní právě jedna matice $X = A^{-1}$ reciproká zprava. V případě, že hodnost p matice A je menší než n, neexistuje žádná matice X vyhovující rovnici (17).

3. Je-li $m > n$, pak neexistuje k matici A žádná matice reciproká zprava.

Důkaz. Je-li $A = \|a_{ik}\|$, $X = \|x_{kj}\|$ a E je jednotková matice řádu m, představuje rovnice (17) celkem m^2 lineárních rovnic tvaru

$$a_{j1}x_{1r} + a_{j2}x_{2r} + \dots + a_{jn}x_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq r, \\ 1 & \text{pro } j = r, \end{cases}$$

přičemž $j, r = 1, 2, \dots, m$.

Při pevně zvoleném r dostaneme tedy m rovnic tvaru

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_{1r} + a_{12}\, x_{2r} + \dots + a_{1n}\, x_{nr} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}\, x_{1r} + a_{r2}\, x_{2r} + \dots + a_{rn}\, x_{nr} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_{1r} + a_{m2}\, x_{2r} + \dots + a_{mn}\, x_{nr} = 0\,. \end{array}\right\} \tag{21}$$

1. Nechť $m < n$. Pak (21) je soustava m nehomogenních rovnic o n neznámých $x_{1r}, \dots, x_{nr}$. Víme, že taková soustava má řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice. Nechť p značí hodnost matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \dots, a_{pn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mp}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

To znamená, že aspoň jeden determinant řádu p, vybraný z matice $\mathbf{A}$, je od nuly různý, kdežto všechny determinanty řádu p+1 (pokud existují) jsou rovny nule. Předpokládejme např., že právě determinant v levém rohu nahoře v matici $\mathbf{A}$ je nenulový. Je-li $p < m$, pak rozšířená matice soustavy (21), v níž je $r = p+1$, je tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \dots\dots, a_{1n}, & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{p1}, \dots\dots, a_{pn}, & 0 \\ a_{p+1,1}, \dots\dots, a_{p+1,n}, & 1 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}, \dots\dots, a_{mn}, & 0 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Tato matice má zřejmě hodnost rovnou p + 1.

Odtud plyne, že má-li mít soustava (21) řešení, nutně musí být $p = m$. V tom případě však existuje n-m lineárně nezávislých řešení

$$\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{n1}; \dots; \xi_{1,n-m} \dots, \xi_{n,n-m} \qquad (23)$$

homogenního systému rovnic patřícího k soustavě (21), přičemž obecné řešení soustavy (21) je

$$x_{1r} = t_{1r}\,\xi_{11} + t_{2r}\,\xi_{12} + \dots + t_{n-m,r}\,\xi_{1,n-m} + \tilde{x}_{1r}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{nr} = t_{nr}\,\xi_{n1} + t_{nr}\,\xi_{n2} + \dots + t_{n-m,r}\,\xi_{n,n-m} + \tilde{x}_{nr}$$

Přitom $\tilde{x}_{1r}, \dots, \tilde{x}_{nr}$ značí libovolné partikulární řešení nehomogenní soustavy (21) a $t_{1r}, t_{2r}, \dots, t_{n-m,r}$ jsou libovolné konstanty. Proto matici $\mathbf{X}$, která je řešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \xi_{11}, \dots, \xi_{1,n-m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_{n1}, \dots, \xi_{n,n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}, \dots, t_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ t_{n-m,1}, \dots, t_{n-m,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11}, \dots, \tilde{x}_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{n1}, \dots, \tilde{x}_{nm} \end{bmatrix}.$$

Označíme-li matice vyskytující se na pravé straně této rovnice postupně $\mathbf{H}$, $\mathbf{L}$, $\tilde{\mathbf{X}}$, dostaneme pro matici $\mathbf{A}$ vztah (19), který jsme měli dokázat. Přitom si všimněme, že matice $\mathbf{L}$ je libovolná matice typu (n-m)/m, kdežto $\tilde{\mathbf{X}}$ je matice typu n/m hovící rovnici (17) a konečně $\mathbf{H}$ je matice typu n/(n-m), přičemž platí

$$\mathbf{AH} = \mathbf{0}$$

a její hodnost je rovna n-m, a to vzhledem k tomu, že čísla (23) představují nezávislá řešení homogenního systému, který přísluší k soustavě (21).

Naopak, se snadno nahlédne, že každá matice $\mathbf{X}$ typu n/m, která je tvaru (19), vyhovuje rovnici (17), je-li $\mathbf{H}$ matice hovící rovnici $\mathbf{AH} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}$ libovolná matice typu $(n-m)/m$ a $\tilde{\mathbf{X}}$ libovolná matice vyhovující rovnici (17).

2. Nechť $m = n$. V tomto případě soustava (21) má podle Cramerova pravidla právě jedno řešení, když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna n. Je-li však její hodnost $p < n$ a je-li v této matici determinant p-tého řádu, např. v levém rohu nahoře, nenulový, pak soustava (21), v níž je $r = p + 1$, nemá řešení vzhledem k tomu, že příslušná rozšířená matice má hodnost $p+1$, kdežto matice $\mathbf{A}$ hodnost p. Proto v případě $p < n$ neexistuje řešení rovnice (17).

3. Nechť $m > n$ a nechť p je hodnost matice $\mathbf{A}$. Pak nutně

$$p \leq n.$$

Nechť determinant (řádu p) v levém rohu nahoře matice $\mathbf{A}$ je nenulový. Soustava (21), v níž je $r = p + 1$, nemá opět řešení z téhož důvodu jako v předešlém případě 2.

6.3. Poznámky o výpočtu matice reciproké zprava. 1. Matice $\mathbf{H}$ v případě, kdy $m < n$, se snadno určí podle známé Frobeniovy metody pro řešení systému lineárních homogenních rovnic takto:

1. Matici $\mathbf{A}$ doplníme $n-m$ řádky (pro $i = 1,2,\dots,n-m$)

$$z_{i1},\ z_{i2},\ \dots,\ z_{in}$$

na čtvercovou matici řádu n, čímž obdržíme matici

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \dots\dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots\dots, & a_{mn} \\ z_{11}, & \dots\dots, & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-m,1}, & \dots, & z_{n-m,n} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Čísla z_{ik} můžeme zvolit libovolně, ale tak, aby determinant $|\tilde{\mathbf{A}}| \neq 0$. To lze, protože matice $\mathbf{A}$ má podle předpokladu hodnost $p = m$.

2. Značí-li Z_{ik} algebraický doplněk prvku z_{ik} (kde $i = 1,2,\dots,n-m$; $k = 1,2,\dots,n$) v determinantu $|\tilde{\mathbf{A}}|$, pak matice

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Z_{11}, & \dots, & Z_{n-m,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{1n}, & \dots, & Z_{n-m,n} \end{bmatrix} \tag{25}$$

má podle věty o reciprokých determinantech hodnost $n-m$ a přitom platí

$$\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{0} .$$

Nakonec si všimněme, že matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ vyjádřená ve tvaru (19) je v tělese T, když v tělese T jsou matice $\mathbf{H}, \mathbf{L}, \tilde{\mathbf{X}}$. A zřejmě v tělese T existují takové matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{L}$, $\tilde{\mathbf{X}}$, že příslušná matice $\mathbf{X}$ hoví rovnici (17).

2. V případě, kdy $m = n$ a kdy hodnost čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n je $p = n$ (takže $|\mathbf{A}| \neq 0$), se matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ reciproká zprava určí pomocí vztahu

$$\boxed{\mathbf{X} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} \quad ,} \tag{26}$$

kde adj $\mathbf{A}$ značí adjungovanou (neboli přidruženou) matici k matici $\mathbf{A}$. Určíme ji na základě vzorce

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n}, & \ldots, & A_{nn} \end{bmatrix}$$

přičemž A_{ik} značí algebraické doplňky prvků a_{ik} v determinantu $|\mathbf{A}|$. Všimněme si, že prvky matice adj $\mathbf{A}$ v libovolném j-tém řádku jsou algebraickými doplňky prvků v j-tém sloupci determinantu $|\mathbf{A}|$. Podle známé vlastnosti reciprokých determinantů je determinant

$$|\operatorname{adj} \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{n-1}. \tag{27}$$

Přitom matice adj $\mathbf{A}$ je zřejmě v tělese T a platí

$$\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n}, & \ldots, & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\mathbf{A}|, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & |\mathbf{A}|, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}| . \mathbf{E} .$$

Odtud plyne vpředu uvedený vztah (26) pro výpočet matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. Tato matice jako skalární součin čísla $1/|\mathbf{A}|$ a adjungované matice adj $\mathbf{A}$ je také v tělese T.

PŘÍKLAD 6. Určeme matici reciprokou ~~zprava~~ k dané matici $\mathbf{A}$.
Řešení. Daná matice $\mathbf{A}$ (typu 2/3, takže $m < n$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & -1 \\ -2, & -1, & 1 \end{bmatrix}$$

má hodnost $p = 2$, neboť determinant D utvořený z prvních 2 řádků a sloupců má hodnotu $D = -4 \neq 0$. Proto existuje matice reciproká zprava k matici $\mathbf{A}$. Vypočteme ji podle odst. 6.3.1 tak, že nejprve určíme matici

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc} 2, & -1, & -1 \\ -2, & -1, & 1 \\ \hdashline 0, & 0, & 1 \end{array}\right]$$

jejíž determinant $|\tilde{\mathbf{A}}| = D = -4$.

Matice $\mathbf{H}$ bude typu 3/1 a určí se pomocí algebraických doplňků prvků třetího řádku determinantu $|\tilde{\mathbf{A}}|$. Protože

$$\tilde{A}_{31} = \begin{vmatrix} -1, & -1 \\ -1, & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \tilde{A}_{32} = \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ -2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \tilde{A}_{33} = D = -4,$$

na základě vztahu (25) dostaneme $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Dále matice $\mathbf{L}$ typu 1/3 bude tvaru

$$\mathbf{L} = [t_1,\ t_2] .$$

Partikulární řešení $\tilde{\mathbf{X}}$ rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ obdržíme řešením rovnice

$$\begin{bmatrix} 2, & -1, & -1 \\ -2, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1, & x_4 \\ x_2, & x_5 \\ x_3, & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Protože jde pouze o partikulární řešení a protože matice $\mathbf{A}$ má hodnost p = 2, přičemž determinant různý od nuly je např. vpředu uvedený determinant D, můžeme položit $x_3 = x_6 = 0$. Tím dostaneme rovnice

$$2x_1 - x_2 = 1, \qquad 2x_4 - x_5 = 0,$$
$$-2x_1 - x_2 = 0, \qquad -2x_4 - x_5 = 1,$$

jejichž řešením je $x_1 = 1/4$, $x_2 = -1/2$, $x_4 = -1/4$, $x_5 = -1/2$.

Je tedy

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1/4, & -1/4 \\ -1/2, & -1/2 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Hledanou matici $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{HL} + \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} [t_1,\ t_2] + \begin{bmatrix} 1/4, & -1/4 \\ -1/2, & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2t_1, & -2t_2 \\ 0, & 0, \\ -4t_1, & -4t_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4, & -1/4 \\ -1/2, & -1/2 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4-2t_1, & -1/4-2t_2 \\ -1/2, & -1/2 \\ -4t_1, & -4t_2 \end{bmatrix},$$

takže hledaná matice (reciproká zprava) je tvaru

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 - 2t_1, & -1/4 - 2t_2 \\ -1/2, & -1/2 \\ -4t_1, & -4t_2 \end{bmatrix},$$

přičemž za t_1 a t_2 můžeme volit libovolná čísla.

Proveďme zkoušku tím, že určíme součin $\mathbf{AX}$. Obdržíme

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 - 4t_1 + 1/2 + 4t_1, & -1/2 - 4t_2 + 1/2 + 4t_2 \\ -1/2 + 4t_1 + 1/2 - 4t_1, & 1/2 + 4t_2 + 1/2 - 4t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

6.4. Věta o matici reciproké zleva $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$. Nechť matice $\mathbf{A}$ je typu m/n.

1. Je-li m < n, neexistuje k matici $\mathbf{A}$ žádná matice reciproká zleva.

2. Je-li m = n, tj. je-li matice $\mathbf{A}$ čtvercová řádu n a je-li její hodnost p = n, existuje k ní právě jedna matice $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$ reciproká zleva. V případě, že hodnost matice $\mathbf{A}$ je menší než n, neexistuje k ní žádná matice $\mathbf{Y}$ reciproká zleva.

3. Je-li m > n, pak existují k ní matice $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$ reciproké zleva, právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna n. V tom případě každá matice $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbf{FP} + \tilde{\mathbf{Y}} \tag{28}$$

kde $\mathbf{F}$ je libovolná matice typu (m-n)/n hovící rovnici

$$\mathbf{FA} = \mathbf{0} \tag{29}$$

a mající hodnost m - n, kde $\mathbf{P}$ je zcela libovolná matice typu n/(m-n), kdežto $\tilde{\mathbf{Y}}$ je libovolná matice, která je (partikulárním) řešením rovnice $\mathbf{YA} = \mathbf{E}$. Přitom se matice $\mathbf{F}$ nazývá fundamentální řešení rovnice (29).

Důkaz této věty se provede zcela obdobně jako u věty 6.2.

6.5. POZNÁMKY. 1. Matice $\mathbf{F}$ se určí metodou Frobeniovou (obdobně jako matice $\mathbf{H}$) a je v témže tělese T jako daná matice $\mathbf{A}$. Také matice $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$ (pokud existuje) je v tělese T, jsou-li obě matice $\mathbf{P}$ a $\tilde{\mathbf{Y}}$ v tělese T, což lze vždy zařídit.

2. Když čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n má hodnost p = n, tj. je-li $|\mathbf{A}| \neq 0$, pak se jediná matice $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$ reciproká zleva určí podle vzorce

$$\boxed{{}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A}\,,} \tag{30}$$

přičemž matice ${}^{-1}\mathbf{A}$ je opět v tělese T.

6.6. Závěr. Z vět 6.2 a 6.4 plyne, že matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, (popř. $\mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{A}$) existují, jen když je m $\leq$ n (popř. m $\geq$ n).

1. Je-li tedy m $\neq$ n, pak matice $\mathbf{A}^{-1}$, ${}^{-1}\mathbf{A}$ neexistují současně.

2. Je-li však m = n, pak ze vztahů (26) a (30) plyne, že pro $|\mathbf{A}| \neq 0$ je

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = {}^{-1}\mathbf{A}\,.} \tag{31}$$

Tento vztah, který je důležitý pro svou jednoduchost i pro své aplikace, plyne také z toho, že každé řešení rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ je zároveň řešením rovnice $\mathbf{YA} = \mathbf{E}$. Je-li totiž $\mathbf{X}$ řešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, kdežto $\mathbf{Y}$ řešením rovnice $\mathbf{YA} = \mathbf{E}$, pak zřejmě platí

$$\mathbf{X} = \mathbf{EX} = (\mathbf{YA})\mathbf{X} = \mathbf{Y}(\mathbf{AX}) = \mathbf{YE} = \mathbf{Y}$$

takže

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} .$$

6.7. Definice. 1. Čtvercová matice $\mathbf{A}$, jejíž determinant $|\mathbf{A}| \neq 0$, se nazývá regulární. V opačném případě se nazývá singulární.

2. Je-li čtvercová matice $\mathbf{A}$ regulární, pak matici $\mathbf{A}^{-1}$ nazýváme reciprokou (neboli inverzní) k matici $\mathbf{A}$.

PŘÍKLAD 7. Vypočtěme matici inverzní k dané matici $\mathbf{A}$.

Řešení. Daná matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 7 \\ -1, & 4, & 5 \\ 3, & 1, & 2 \end{bmatrix}$$

je regulární, neboť její determinant $|\mathbf{A}| = -85$. Proto existuje k ní matice reciproká

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A} .$$

Přitom pro adjungovanou matici dostáváme tyto prvky

$A_{11} = 4.2 - 5.1 = 3$, $A_{12} = -(-1.2 - 3.5) = 17$, $A_{13} = -1.1 - 3.4 = -13$,

$A_{21} = -(0.2 - 1.7) = 7$, $A_{22} = 2.2 - 3.7 = -17$, $A_{23} = -(2.1 - 3.0) = -2$,

$A_{31} = 0.5 - 4.7 = -28$, $A_{32} = -(2.5 + 7.1) = -17$, $A_{33} = 2.4 + 1.0 = 8$.

Je tedy

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 7, & -28 \\ 17, & -17, & -17 \\ -13, & -2, & 8 \end{bmatrix}$$

Hledaná inverzní matice je proto tvaru

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{85} \cdot \begin{bmatrix} -3, & -7, & 28 \\ -17, & 17, & 17 \\ 13, & 2, & -8 \end{bmatrix}$$

Přitom platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{85}\begin{bmatrix} 2, & 0, & 7 \\ -1, & 4, & 5 \\ 3, & 1, & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3, & -7, & 28 \\ -17, & 17, & 17 \\ 13, & 2, & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{85}\begin{bmatrix} -3, & -7, & 28 \\ -17, & 17, & 17 \\ 13, & 2, & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2, & 0, & 7 \\ -1, & 4, & 5 \\ 3, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

<u>6.8. Věta o reciprokých maticích.</u> Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou regulární matice řádu n. Pak platí tato tvrzení:

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$;
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$;
3. $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$;
4. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
5. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$:

Důkaz. 1. První tvrzení plyne ze vztahu (31).

2. Zde pro determinant $|\mathbf{A}^{-1}|$ dostáváme podle (26) vztah

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{|\operatorname{adj}\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|^n} = \frac{|\mathbf{A}|^{n-1}}{|\mathbf{A}|^n} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

3. Ukážeme, že obě matice $(\mathbf{A}^{-1})'$, $(\mathbf{A}')^{-1}$ mají tytéž prvky. Vskutku, prvek c_{jk} první matice je

$$c_{jk} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathbf{A}_{jk},$$

kdežto prvek d_{jk} druhé matice je

$$d_{jk} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathbf{A}_{jk} = c_{jk} \qquad \text{pro } j,k = 1,2,\ldots,n.$$

4. Matice $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ představuje jediné řešení rovnice

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E},$$

jíž podle vztahu 1 vyhovuje řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A}$.

5. Levá strana posledního vztahu je řešením rovnice

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{E}. \tag{32}$$

Takové řešení $\mathbf{X}$ je jediné, protože z relace $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$ a z předpokladu $|\mathbf{A}| \neq 0$, $|\mathbf{B}| \neq 0$ plyne, že $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ je regulární matice. Násobíme-li zleva rovnici (32) maticí $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$, obdržíme

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)X = (B^{-1}A^{-1})E$$

$$B^{-1}(A^{-1}A)BX = B^{-1}A^{-1}$$

$$B^{-1}(EB)X = B^{-1}A^{-1}$$

$$(B^{-1}B)X = B^{-1}A^{-1}$$

takže $$EX = B^{-1}A^{-1}$$

a tedy $$\underline{X = B^{-1}A^{-1}}$$

6.9. Poznámka. Tvrzení 5 předešlé věty se dá rozšířit na libovolný konečný počet regulárních matic řádu n: A, B, ..., M. Platí totiž

$$\boxed{(ABC\ldots M)^{-1} = M^{-1}\ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}} \tag{33}$$

6.10. Věta. Nechť regulární čtvercové matice A, B jsou zaměnitelné. Pak jsou zaměnitelné též matice

1. A^{-1}, B^{-1} ;
2. A^{-1}, B ; popř. A, B^{-1} .

Důkaz. 1. Matice $C = B^{-1}A^{-1}$ je řešením rovnice $(AB)X = E$, jak plyne z věty 6.8.5.

Podobně matice $D = A^{-1}B^{-1}$ je řešením rovnice $(BA)X = E$. Jsou-li tedy A, B zaměnitelné, takže je $AB = BA$, plyne z toho, že matice D je též řešením rovnice $(AB)X = E$, která však má jediné řešení C . Proto $C = D$ neboli

$$B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1} .$$

2. Ze vztahu $AB = BA$ násobením zleva maticí A^{-1} obdržíme

$$EB = B = A^{-1}BA .$$

Odtud násobením zprava maticí A^{-1} plyne

$$BA^{-1} = A^{-1}B(AA^{-1}) = A^{-1}BE = A^{-1}B .$$

Analogicky se dokáže druhá část druhého tvrzení.

6.11. Definice podílu matic. Jsou-li matice A, B zaměnitelné a je-li A regulární, pak podílem $\frac{B}{A}$ matice B maticí A rozumíme matici rovnou součinu

$$A^{-1}B \text{, popř. } BA^{-1} ,$$

takže (podle věty 6.10.2) je

$$\frac{B}{A} = BA^{-1} = A^{-1}B. \tag{34}$$

6.12. **Věta.** Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, kdežto $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou obě regulární řádu n. Jsou-li každé dvě z matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ zaměnitelné, pak platí

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} \,. \tag{35}$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EA} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{A} = (\mathbf{CB})^{-1}\,\mathbf{CA} = (\mathbf{BC})^{-1}\,\mathbf{CA} =$$
$$= (\mathbf{CB})^{-1}\,(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BC})^{-1}\,(\mathbf{AC}).$$

PŘÍKLAD 8. Určete podíl dané matice $\mathbf{B}$ maticí $\mathbf{A}$.

Řešení. Dané matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{bmatrix}$

jsou regulární, neboť $|\mathbf{A}| = -9$, $|\mathbf{B}| = -81$.

Určíme matici $\mathbf{A}^{-1}$. Protože

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3, & -1, & 2 \\ -3, & 2, & -4 \\ 3, & -5, & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{je} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\mathbf{B}\,.$$

Proto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{9}\mathbf{B}^2 = \mathbf{BA}^{-1}$.

Přitom je

$$\mathbf{BA}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 18, & -9, & 0 \\ -9, & 27, & -18 \\ 9, & -18, & 27 \end{bmatrix}.$$

Je tedy
$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 0 \\ -1, & 3, & -2 \\ 1, & -2, & 3 \end{bmatrix}.$$

7. CVIČENÍ 1.

1. Určete $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{B}-\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4, & 5, & 6 \\ 5, & 6, & 7 \end{bmatrix}$.

2. Určete $2\mathbf{B} - 3\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice z cvičení 7.1.

3. Určete součiny:

a) $\begin{bmatrix} 1, & -3, & 2 \\ 3, & -4, & 1 \\ 2, & -5, & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2, & 5, & 6 \\ 1, & 2, & 5 \\ 1, & 3, & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5, & 8, & -4 \\ 6, & 9, & -5 \\ 4, & 7, & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 2, & 5 \\ 4, & -1, & 3 \\ 9, & 6, & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \\ 1, & 2, & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \end{bmatrix}$

4. Vypočtěte mocniny matic:

a) $\begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 3, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \end{bmatrix}^2$, b) $\begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{bmatrix}^2$ c) $\begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 3 \end{bmatrix}^3$ d) $\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}^n$.

5. Stopou čtvercové matice $\mathbf{A}$ rozumíme součet prvků v její hlavní diagonále, tj. $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Dokažte, že matice $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ mají stejné stopy.

6. Použitím výsledku předešlého cvičení 7.5 dokažte, že nikdy nemůže platit $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

7. Určete všechny matice zaměnitelné s maticí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{bmatrix}$.

8. Určete matici $\mathbf{X}$, která hoví rovnici

a) $\begin{bmatrix} 2, & 5 \\ 1, & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4, & -6 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 3 \\ 4, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 5 \end{bmatrix}$.

9. Určete reciprokou matici k dané matici

a) $\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos x, & -\sin x \\ \sin x, & \cos x \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2, & 5, & 7 \\ 6, & 3, & 4 \\ 5, & -2, & -3 \end{bmatrix}$.

10. Určete podíl zprava a zleva matice $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{B}$, je-li

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ -1, & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 5 \\ 1, & 3 \end{bmatrix}$

VÝSLEDKY

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5, & 7, & 9 \\ 7, & 9, & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 3 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 5, & 4, & 3 \\ 4, & 3, & 2 \end{bmatrix}$.

3. a) $\begin{bmatrix} 1, & 5, & -5 \\ 3, & 10, & 0 \\ 2, & 9, & -7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 11, & -22, & 29 \\ 9, & -27, & 32 \\ 13, & -17, & 26 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1, & 9, & 15 \\ -5, & 5, & 9 \\ 12, & 26, & 32 \end{bmatrix}$

4. a) $\begin{bmatrix} 7, & 4, & 4 \\ 9, & 4, & 3 \\ 3, & 3, & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 18, & -9, & 0 \\ -9, & 27, & -18 \\ 9, & -18, & 27 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 15, & 20 \\ 20, & 35 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1, & n \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$.

6. Levá strana má stopu rovnou $s = 0$, kdežto pravá strana $s = n$.

7. $\begin{bmatrix} a, & 2b \\ 3b, & a + 3b \end{bmatrix}$. 8. a) $\begin{bmatrix} 2, & -23 \\ 0, & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3, & 2, & 0 \\ -4, & 5, & -2 \\ -5, & 3, & 0 \end{bmatrix}$.

9. a) $\begin{bmatrix} -2, & 1 \\ 3/2, & -1/2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1, & -1, & 1 \\ -38, & 41, & -34 \\ 27, & -29, & 24 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -6, & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8, & -9 \\ -3, & 4 \end{bmatrix}$.

8. VEKTORY A LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

Mějme uspořádanou skupinu čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Této skupině můžeme přiřadit dvě matice, a to buď matici $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, která je typu n/1, nebo matici typu 1/n tvaru

$$\mathbf{X}' = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

8.1. Definice. 1. Vektorem v n-rozměrném prostoru rozumíme uspořádanou skupinu n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, napsanou ve tvaru matice $\mathbf{X}$ typu n/1. (To znamená, že vektory ztotožňujeme přímo s maticemi typu n/1.)

2. Přitom se uvedená čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývají souřadnice vektoru $\mathbf{X}$.

8.2. Tři základní operace s vektory. Pro vektory v n-rozměrném prostoru definujeme tři základní operace: rovnost, sčítání a skalární násobení, a to tím způsobem, že na vektory, ztotožněné s maticemi typu n/1 aplikujeme příslušné operace s maticemi:

8.2.1. Rovnost vektorů $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ je vyjádřena n rovnicemi tvaru

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots, \quad x_n = y_n \tag{36}$$

a zapisujeme je symbolem $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

8.2.2. Součet vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je vektor tvaru $\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$. Značíme jej symbolem $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

8.2.3. Skalární součin čísla k s vektorem $\mathbf{x}$ je vektor $\begin{bmatrix} k x_1 \\ k x_2 \\ \vdots \\ k x_n \end{bmatrix}$, který stručně označujeme $k\mathbf{x}$.

Podobně se skalární součin vektoru $\mathbf{x}$ s číslem k stručně značí $\mathbf{x}k$.

8.3. POZNÁMKY. 1. Pro uvedené operace s vektory platí pravidla 5.1 a 5.2.

2. Dále si všimněme, že každou matici typu m/n můžeme považovat za uspořádaný systém n vektorů v m-rozměrném prostoru anebo za uspořádaný systém m vektorů v n-rozměrném prostoru.

8.4. Lineární transformace o dané matici. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n a nechť $\mathbf{x}$ je vektor v n-rozměrném prostoru.

Matice tvaru

$$\boxed{\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}} \tag{37}$$

je zřejmě typu m/1. Můžeme ji považovat za vektor v m-rozměrném prostoru. Pravíme pak, že vektor $\mathbf{x}^*$ vznikl z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací (popř. lineární substitucí) o matici $\mathbf{A}$.

Přitom při obvyklém označení prvků v matici $\mathbf{A}$ dostanem pro souřadnice vektoru $\mathbf{x}^*$ vztahy

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^* &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

8.5. Vztahy mezi operacemi s maticemi a lineárními transformacemi. V souvislosti s pojmem lineární transformace jeví se nám definice rovnosti, sčítání, skalárního násobení a násobení matic, jak jsme je zavedli v kap 4, velmi přirozenými:

8.5.1. Rovnost matic. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ značí matice téhož typu m/n. Transformuje-li lineární substituce o matici $\mathbf{A}$ každý vektor $\mathbf{x}$ v týž vektor jako lineární transformace o matici $\mathbf{B}$, pak je $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Důkaz. Za daných předpokladů platí identické rovnosti

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n$$

Odtud plynou, dosadíme-li např. $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, rovnosti

$$a_{11} = b_{11},\ a_{21} = b_{21},\ \dots,\ a_{m1} = b_{m1}.$$

Podobně dostaneme pro $x_j = 1$, $x_k = 0$ pro $k \neq j$ vztahy

$$a_{1j} = b_{1j},\ \dots,\ a_{mj} = b_{mj}.$$

Je tedy $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

8.5.2. Sčítání matic. Nechť opět $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ značí matice téhož typu m/n, kdežto $\mathbf{x}$ je libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, $\mathbf{x}^*$ (popř. $\mathbf{x}^{**}$) vektor transformovaný z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matice $\mathbf{A}$ (popř. $\mathbf{B}$).

Pak matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (tj. součet matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{B}$) je právě taková, že lineární transformace o matici ($\mathbf{A} + \mathbf{B}$) transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**}$.

Důkaz. Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ plyne

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{x} \quad ,$$

jak plyne z pravidla 5.3.2.

8.5.3. Skalární násobení matice číslem. Nechť $\mathbf{A}$ značí matici typu m/n a nechť k je libovolné číslo. Je-li $\mathbf{x}$ libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, kdežto $\mathbf{x}^*$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$, pak matice $k\mathbf{A}$ (jakožto skalární součin čísla k a matice $\mathbf{A}$) je právě taková, že lineární transformace o matici $k\mathbf{A}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $k\mathbf{x}$.

Důkaz. Z rovnice $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$ plyne

$$k\mathbf{x}^* = k(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (k\mathbf{A})\,\mathbf{x} \quad .$$

8.5.4. Násobení matic. Nechť $\mathbf{A}$ značí matici typu m/n, kdežto $\mathbf{B}$ matici typu h/m. Dále nechť $\mathbf{x}$ je libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, kdežto $\mathbf{x}^*$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}^{**}$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}^*$ lineární transformací o matici $\mathbf{B}$.

Pak matice $\mathbf{BA}$ (tj. součin matice $\mathbf{B}$ s maticí $\mathbf{A}$) je právě taková, že lineární transformace o matici $\mathbf{BA}$ převede vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^{**}$.

Důkaz. Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}^*$ plyne

$$\mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} .$$

8.5.5. Inverzní matice. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n a nechť $\mathbf{x}$ značí libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, kdežto $\mathbf{x}^*$ je vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$.

Pak matice $\mathbf{A}^{-1}$, reciproká (inverzní) k matici $\mathbf{A}$, je právě taková, že lineární transformace o matici $\mathbf{A}^{-1}$ převede vektor $\mathbf{x}^*$ v původní vektor $\mathbf{x}$.

Důkaz. Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^{**} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x} .$$

8.5.6. Upozornění. Všimněme si, že každý vektor v n-rozměrném prostoru se libovolnou transformací o matici typu m/n převede ve vektor v prostoru m-rozměrném.

9. CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MATICE

9.1. Transformace vektoru $\mathbf{x}$ ve vektor $\lambda\mathbf{x}$. Nechť $\mathbf{A}$ značí libovolnou čtvercovou matici řádu n. Hledejme, zda existuje v n-rozměrném prostoru vektor $\mathbf{x}$, který se lineární transformací o dané matici $\mathbf{A}$ změní ve vektor $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}$, kde λ je nějaké číslo.

Všimněme si, že v této úloze je pro $\lambda = 1$ zahrnuta úloha určit vektory, které se lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ nezmění (neboli jsou invariantní). Přitom ovšem nás zajímají vlastně jen nenulové vektory, jejichž souřadnice nejsou vesměs nuly.

Označme prvky matice $\mathbf{A}$ symboly a_{jk}, takže $\mathbf{A} = \| a_{jk} \|$. Každý vektor $\mathbf{x}$, který má uvažovanou vlastnost, vyhovuje lineárním rovnicím

$$\begin{array}{l} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dotfill \\ \lambda x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{array}$$

neboli rovnicím

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (40)$$

Proto existuje-li vektor $\mathbf{x}$ s uvedenými vlastnostmi, musí být

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \dots, (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{41}$$

Levá strana tohoto vztahu je polynom n-tého stupně proměnné λ, takže (41) představuje algebraickou rovnici n-tého stupně pro neznámou λ.

9.2. Definice. Algebraická rovnice n-tého stupně pro neznámou λ, vyjádřená ve tvaru (41), se nazývá charakteristická rovnice (popř. sekulární rovnice) matice $\mathbf{A}$ (pokud je matice $\mathbf{A}$ symetrická).

Příslušný polynom proměnné λ se nazývá charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$. Budeme jej stručně značit $\varphi(\lambda)$, takže platí

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|. \tag{42}$$

Z předešlého odstavce 9.1. plyne tato věta:

9.3. Věta. Když se nějaký nenulový vektor $\mathbf{x}$ transformuje lineární substitucí o matici $\mathbf{A}$ ve vektor $\lambda\mathbf{x}$, je číslo λ kořenem charakteristické rovnice (41), kterou stručně píšeme v maticovém tvaru

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0. \tag{41*}$$

Přitom se vektory $\mathbf{x}$ příslušné ke každému charakteristickému kořenu λ vypočtou ze soustavy rovnic (40).

9.4. POZNÁMKA. Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice (41), pak zřejmě platí vztah

$$\boxed{\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n).} \tag{42*}$$

PŘÍKLAD 9. Určeme všechny invariantní vektory vzhledem k lineární transformaci o matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8, & 3 \\ 7, & 4 \end{bmatrix}$.

Řešení. Charakteristický polynom

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda, & 3 \\ 7, & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = (\lambda - 11)(\lambda - 1),$$

takže $\lambda_1 = 11, \lambda_2 = 1$.

Pro $\lambda_1 = 11$ dostáváme soustavu rovnic

$$-3x_1 + 3x_2 = 0, \qquad 7x_1 - 7x_2 = 0,$$

takže $x_1 = x_2 = t$, kde t je libovolné číslo.

Podobně pro $\lambda_2 = 1$ dostáváme rovnice

$$7x_1 + 3x_2 = 0, \qquad 7x_1 + 3x_2 = 0,$$

takže $x_2 = -\frac{7}{3}x_1$ neboli $x_1 = 3t$, $x_2 = -7t$.

Všechny invariantní vektory jsou tedy tvaru $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3t \\ -7t \end{bmatrix}$, kde t značí libovolné číslo.

10. ORTOGONÁLNÍ MATICE

10.1. Délka vektoru. V euklidovské geometrii se každému vektoru v n-rozměrném prostoru přiřazuje určitá délka, a to tak, že délkou vektoru $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se rozumí nezáporné číslo

$$\boxed{s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geqq 0} \tag{39}$$

Čtverec délky vektoru $\mathbf{x}$ je tedy

$$\begin{bmatrix} s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}'\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x}'$ je matice transponovaná z matice $\mathbf{x}$. Je to zřejmě matice typu 1/1.

10.2. Definice ortogonální matice. Lineární transformace

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\mathbf{x} \tag{43}$$

o čtvercové matici $\mathbf{R}$ se nazývá ortogonolní, má-li vždy transformovaný vektor $\mathbf{x}^*$ tutéž délku jako původní vektor $\mathbf{x}$ neboli (jinými slovy), když tato transformace zachovává délky vektorů.

V tom případě se také matice $\mathbf{R}$ nazývá ortogonální.

Lineární ortogonální transformace jsou pro euklidovskou geometrii velmi důležité vzhledem k tomu, že se v ní studují vlastnosti útvarů (např. vektorů, lineárních prostorů, křivek ap.), které se lineárními transformacemi nemění.

10.3. Věta o ortogonální matici. 1. Matice $\mathbf{R}$ je ortogonální, právě když platí vztah

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}. \tag{44}$$

2. Ortogonální matice je vždy regulární a její determinant $|\mathbf{R}|$ má hodnotu buď

+ 1 nebo −1. Podle toho se ortogonální matice $\mathbf{R}$ nazývá vlastní (je-li $|\mathbf{R}| = 1$) nebo nevlastní (je-li $|\mathbf{R}| = -1$).

3. V determinantu $|\mathbf{R}|$ každé ortogonální matice $\mathbf{R}$ je algebraický doplněk libovolného prvku roven hodnotě tohoto prvku, je-li $\mathbf{R}$ vlastní ortogonální matice, popř. záporné hodnotě uvažovaného prvku, když $\mathbf{R}$ je nevlastní ortogonální matice.

Důkaz. 1a) Budiž $\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\mathbf{x}$ ortogonální transformace, takže je

$$|\mathbf{x}^*|^2 = |\mathbf{x}|^2$$

neboli

$$(\mathbf{x}^*)'\mathbf{x}^* = \mathbf{x}'\mathbf{x}\,.$$

Odtud máme

$$(\mathbf{R}\mathbf{x})'\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{x}$$

neboli podle (18) je

$$\mathbf{x}'(\mathbf{R}'\mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{x}. \tag{45}$$

Tato rovnice je zřejmě splněna, platí-li vztah $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$. Je tedy platnost rovnice (44) dostačující podmínkou k tomu, aby lineární transformace o matici $\mathbf{R}$ byla ortogonální.

1b) Ukážeme, že rovnice (44) je nutnou podmínkou pro ortogonální transformaci. Označme prvky matice $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ znaky c_{jk}, kde $j,k = 1,2,\dots,n$.

Protože je $(\mathbf{R}'\mathbf{R})' = \mathbf{R}'\mathbf{R}$, je matice $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ symetrická, takže

$$c_{jk} = c_{kj}.$$

Zvolme za vektor $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}_j$, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě j-té, která je $x_j = 1$. Pak na levé straně rovnice (42) dostaneme

$$\begin{bmatrix} \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{j}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Big\} j = \begin{bmatrix} c_{jj} \end{bmatrix},$$

kdežto na pravé straně bude

$$\begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Odtud máme

$$c_{jj} = 1.$$

Zvolme nyní za vektor $\mathbf{x}$ vektor, jehož všechny souřadnice jsou nulové kromě souřadnice x_j a x_k, přičemž $x_j = x_k = 1$, kde $j < k$. Pak na levé straně vztahu (42) obdržíme

$$\begin{bmatrix} 0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{jj} + c_{kj} + c_{jk} + c_{kk} \end{bmatrix}$$

Zatímco na pravé straně bude $\mathbf{x}'\mathbf{x} = [2]$.

Proto je
$$c_{jj} + c_{kk} + c_{jk} + c_{kj} = 2.$$
Protože však $c_{jj} = c_{kk} = 1$, dostáváme z předešlé rovnosti vztah
$$c_{jk} = - c_{kj}.$$
Odtud vzhledem k vztahu $c_{jk} = c_{kj}$ plyne $c_{jk} = 0$ pro $j \neq k$. Je tedy $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$, jak jsme měli dokázat.

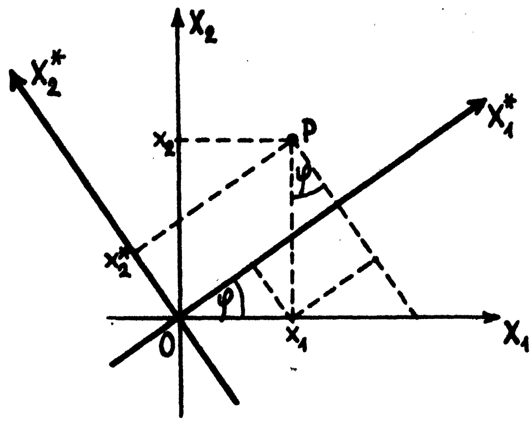
2. Z rovnice $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$ bezprostředně plyne
$$|\mathbf{R}'\mathbf{R}| = |\mathbf{R}'||\mathbf{R}| = |\mathbf{E}| = 1.$$
Protože pak $|\mathbf{R}'| = |\mathbf{R}|$, je $|\mathbf{R}|^2 = 1$, odkud $|\mathbf{R}| = \pm 1$.

3. Protože matice $\mathbf{R}$ je regulární, plyne z rovnice $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$ násobením zprava maticí $\mathbf{R}^{-1}$ vztah
$$\mathbf{R}'(\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{E}\mathbf{R}^{-1}$$
a odtud
$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}.$$
Avšak
$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} \operatorname{adj} \mathbf{R} = \pm \operatorname{adj} \mathbf{R},$$
takže
$$\mathbf{R}' = \pm \operatorname{adj} \mathbf{R}, \qquad (46)$$
přičemž platí znaménko +, když $\mathbf{R}$ je vlastní, kdežto znaménko −, je-li $\mathbf{R}$ nevlastní ortogonální matice.

Značí-li r_{jk} prvky matice $\mathbf{R}$, kdežto R_{jk} algebraický doplněk prvku r_{jk} v determinantu $|\mathbf{R}|$, je v j-tém řádku a k-tém sloupci matice na levé straně rovnice (46) prvek r_{kj}, kdežto na pravé straně číslo $\pm R_{kj}$. Je tedy (pro $j,k = 1,2,\ldots,n$)
$$r_{jk} = \pm R_{jk}. \qquad (47)$$

<u>PŘÍKLAD 10.</u> Ukažme, že transformace o matici $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix}$, kde φ je libovolné číslo, představuje vlastní ortogonální transformaci, která značí rotaci v euklidovské rovině. Určíme všechny vektory, které se při této transformaci nemění (neboli jsou invariantní).

Řešení. Zde je
$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$
Protože $|\mathbf{R}| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, jde o vlastní ortogonální matici.
Příslušná lineární transformace $\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\mathbf{x}$ je dána rovnicemi
$$x_1^* = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$
$$x_2^* = - x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi.$$



obr. 1.

a představuje rotaci v euklidovské rovině (obr. 1). Při této transformaci se pro $\varphi \neq 2k\pi$, kde k je celé číslo, nemění pouze jediný vektor, a to nulový vektor $\mathbf{o} = [0, 0]$. Vskutku, nemá-li se nějaký vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ uvedenou transformací měnit, je nutné a stačí, aby platily rovnice

$$x_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi ,$$
$$x_2 = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi ,$$

tj. aby jeho souřadnice hověly rovnicím

$$x_1(1 - \cos\varphi) - x_2 \sin\varphi = 0,$$
$$x_1 \sin\varphi + x_2(1 - \cos\varphi) = 0.$$

Determinant této soustavy je

$$\Delta = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = (1 - \cos\varphi)^2 + (1 - \cos^2\varphi) = 2(1 - \cos\varphi) =$$
$$= 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$, a pro $\varphi \neq 2k\pi$ je $\Delta \neq 0$. V tom případě je $x_1 = x_2 = 0$.

<u>PŘÍKLAD 11.</u> Určeme všechny vektory, které se nemění při transformaci o matici

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ \sin\varphi, & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$, která je ortogonální nevlastní.

Řešení. Zde je

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ \sin\varphi, & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ \sin\varphi, & -\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix},$$

přičemž $|\mathbf{R}| = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1$, takže jde o nevlastní ortogonální matici. Příslušná transformace je dána rovnicemi

$$x_1^* = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi ,$$
$$x_2^* = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi . \qquad (48)$$

Je složena z rotace

$$x_1^{**} = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi$$
$$x_2^{**} = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi$$

a ze symetrie vzhledem k ose X_1

$$x_1^* = x_1^{**} , \quad x_2^* = -x_2^{**} .$$

V tomto případě existují vektory, které jsou vzhledem k substituci (48) invariantní. Vskutku, z rovnic

$$x_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi ,$$
$$x_2 = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi$$

plyne

$$x_1(1 - \cos\varphi) - x_2 \sin\varphi = 0,$$
$$x_1 \sin\varphi - x_2(1 + \cos\varphi) = 0.$$

Determinant soustavy je

$$\Delta = -(1 - \cos^2\varphi) + \sin^2\varphi = 0.$$

Proto řešení obou rovnic je při libovolném λ tvaru

$$x_1 = \lambda \sin\varphi, \quad x_2 = \lambda(1 - \cos\varphi).$$

Jsou tedy invariantní všechny vektory tvaru $\begin{bmatrix} \lambda \sin\varphi \\ \lambda(1 - \cos\varphi) \end{bmatrix}$.

10.4. Věta o charakteristické rovnici ortogonální matice $\mathbf{R}$. Je-li libovolná ortogonální matice $\mathbf{R}$ reálná, pak všechny kořeny λ_k charakteristické rovnice $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ mají absolutní hodnotu rovnou 1, takže je

$$\lambda_k^* = e^{i\varphi_k} \tag{49}$$

kde φ_k značí (pro k = 1, 2, ..., n) vhodné reálné číslo. Přitom imaginární kořeny jsou po dvou komplexně sdružené.

Důkaz. Vezměme v úvahu inverzní matici $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$, kde λ je libovolné číslo takové, že

$$|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| \neq 0.$$

Zřejmě platí

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}|} \operatorname{adj}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}).$$

Prvky matice adj$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})$ jsou (podle definice adjungované matice) algebraické doplňky prvků v determinantu $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}|$. Jsou to tedy polynomy stupně nejvýše (n-1)-ho v proměnné λ. Proto prvky matice $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ jsou racionální lomené funkce v proměnné λ a dají se tedy rozložit v částečné zlomky.

Nechť λ_0 značí libovolný kořen rovnice $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ a nechť tento kořen je h_1 - násobný. Pro společného dělitele všech minorů (n-1)-ho stupně v determinantu $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}|$ nechť je kořen λ_0 celkem h_2-násobný (přičemž může být $h_2 = 0$). Tedy pro čitatele každého prvku v matici $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ je tento kořen aspoň h_2 --násobný a pro čitatele aspoň jednoho prvku v této matici je právě h_2-násobný. Derivace determinantu $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}|$ podle λ je rovna součtu n determinantů, z nichž k-tý má v k-tém sloupci derivace prvků podle λ, takže

$$D_\lambda |\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| =$$

$$\begin{vmatrix} -1, & r_{12}, & \dots, & r_{1n} \\ 0, & r_{22} - \lambda, & \dots, & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & r_{n2}, & \dots, & r_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} r_{11} - \lambda, & r_{12}, & \dots, & 0 \\ r_{21}, & r_{22} - \lambda, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}, & r_{n2}, & \dots, & -1 \end{vmatrix}.$$

Proto je tato derivace rovna součtu minorů řádu n-1 v determinantu $|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E}|$ a je tedy dělitelná výrazem

$$(\lambda - \lambda_0)^{h_2}.$$

Proto λ_0 je aspoň $(h_2 + 1)$ - násobným kořenem rovnice $|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E}| = 0$. Odtud plyne, že $h_1 > h_2$.

Položíme-li $\alpha = h_1 - h_2 (> 0)$, bude rozklad v částečné zlomky libovolného prvku c_{jk} v matici $(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E})^{-1}$ tvaru

$$c_{jk} = \frac{a_{jk}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \frac{b_{jk}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha-1}} + \dots ,$$

kde a_{jk}, b_{jk} značí vhodná čísla a kde nenapsané členy obsahují kořenového činitele $\lambda - \lambda_0$ s exponentem $m > 1 - \alpha$ a kromě toho kořenové činitele patřící k ostatním kořenům rovnice $|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E}| = 0$. Čísla a_{jk} (pro $j,k = 1,2,\dots,n$) nejsou vesměs rovna nule, neboť pro čitatele aspoň jednoho prvku v matici $(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E})^{-1}$ je λ_0 kořenem právě h_2-násobným, takže rozklad tohoto prvku v částečné zlomky obsahuje zlomek

$$\frac{a}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}}, \text{ kde } a \neq 0.$$

Je tedy

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \dots, \dots, & \frac{a_{1n}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{a_{n1}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \dots, \dots, & \frac{a_{nn}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \dots \end{bmatrix},$$

přičemž matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, tj. je nenulová.

Proto je

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} \mathbf{A} + \dots$$

Odtud násobením maticí $\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E} = (\mathbf{R} - \lambda_0 \mathbf{E}) - (\lambda - \lambda_0) \mathbf{E}$ plyne

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} \left[(\mathbf{RA} - \lambda_0 \mathbf{A}) - (\lambda - \lambda_0) \mathbf{A} + \dots \right]$$

neboli

$$(\lambda - \lambda_0)^{\alpha} \mathbf{E} = (\mathbf{RA} - \lambda_0 \mathbf{A}) - (\lambda - \lambda_0) \mathbf{A} + \dots .$$

Odtud porovnáním koeficientů při $(\lambda - \lambda_0)^0$ obdržíme

$$\mathbf{RA} - \lambda_0 \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

neboli

$$\mathbf{RA} = \lambda_0 \mathbf{A}. \tag{50}$$

Nechť $\bar{\lambda}_0$ značí číslo komplexně sdružené s číslem λ_0 a $\bar{A}$ matici komplexně sdruženou s maticí A, takže $\bar{A} = \| \bar{a}_{jk} \|$. Protože R je podle předpokladu reálná, je $\bar{R} = R$, takže z rovnice (50) plyne

$$R\bar{A} = \bar{\lambda}_0\bar{A}, \tag{51}$$

odtud transformováním dostaneme

$$\bar{A}'R' = \bar{\lambda}_0\bar{A}'.$$

Násobíme-li zprava tuto rovnici rovnicí (50), dostaneme

$$\bar{A}'(R'R)A = \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{A}'A$$

neboli

$$\bar{A}'A(1 - \bar{\lambda}_0\lambda_0) = 0$$

vzhledem k tomu, že $R'R = E$. Protože $\bar{A}'A \neq 0$ (neboť $A \neq 0$), musí být

$$\bar{\lambda}_0\lambda_0 = 1.$$

Odtud plyne, že kořen λ_0 má absolutní hodnotu rovnou 1. Protože rovnice $|R-\lambda E| = 0$ má reálné koeficienty, jsou imaginární kořeny po dvou komplexně sdružené.

<u>10.5. Věta o tvaru všech ortogonálních matic.</u> Všechny ortogonální matice R (řádu n), pro které platí $|R+E| \neq 0$, se dají vyjádřit vzorcem

$$R = \frac{E-T}{E+T}, \tag{52}$$

kde T značí libovolnou polosouměrnou matici řádu n, která hoví vztahu $|E+T| \neq 0$.

Důkaz. 1. Nechť R je libovolná ortogonální matice řádu n, pro niž platí

$$|R+E| \neq 0.$$

To znamená, že charakteristická rovnice matice R nemá kořen $\lambda = -1$, takže neexistuje nenulový vektor x, který lineární transformací o matici R přejde v opačný vektor $-x$.

Utvořme pomocí matice R matici T tvaru

$$T = (E-R)(E+R)^{-1}.$$

Odtud násobením zprava maticí $(E+R)$ dostaneme

$$T(E+R) = E-R. \tag{53}$$

Přechodem k maticím transponovaným obdržíme vztah

$$(E+R)'T' = (E-R)'$$

neboli

$$(E+R')T' = E-R'$$

Násobme zleva poslední vztah maticí R. Vzhledem k rovnici $RR' = E$ obdržíme

$$(R+E)T' = R-E;$$

takže po vynásobení zleva inverzní maticí $(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1}$ dostaneme

$$\mathbf{T}' = -(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{R}).$$

Matice $(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1}$, $\mathbf{E}-\mathbf{R}$ jsou zaměnitelné, neboť platí

$$(\mathbf{R}+\mathbf{E})(\mathbf{E}-\mathbf{R}) = \mathbf{R}+\mathbf{E}-\mathbf{R}^2-\mathbf{R} = \mathbf{E}^2-\mathbf{R}^2 = (\mathbf{E}-\mathbf{R})(\mathbf{R}+\mathbf{E}),$$

což znamená, že $\mathbf{E}-\mathbf{R}$, $\mathbf{R}+\mathbf{E}$ jsou zaměnitelné, a tudíž také $(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1}$, $\mathbf{E}-\mathbf{R}$ jsou zaměnitelné. Proto je

$$\mathbf{T}' = -(\mathbf{E}-\mathbf{R})(\mathbf{R}+\mathbf{E})^{-1} = -\mathbf{T}.$$

Je tedy matice $\mathbf{T}$ polosouměrné. Kromě toho matice $(\mathbf{E}+\mathbf{T})$ je regulární, neboť je

$$\mathbf{E}+\mathbf{T} = (\mathbf{E}+\mathbf{R})(\mathbf{E}+\mathbf{R})^{-1} + (\mathbf{E}-\mathbf{R})(\mathbf{E}+\mathbf{R})^{-1} =$$
$$= (\mathbf{E}+\mathbf{R}+\mathbf{E}-\mathbf{R})(\mathbf{E}+\mathbf{R})^{-1} = 2\,\mathbf{E}(\mathbf{E}+\mathbf{R})^{-1},$$

takže

$$|\mathbf{E}+\mathbf{T}| = \frac{2^n}{|\mathbf{E}+\mathbf{R}|} \neq 0.$$

Ze vztahu (53) dostáváme

$$\mathbf{T}+\mathbf{T}\mathbf{R} = \mathbf{E}-\mathbf{R}$$

neboli

$$\mathbf{R}+\mathbf{T}\mathbf{R} = \mathbf{E}-\mathbf{T},$$
$$(\mathbf{E}+\mathbf{T})\mathbf{R} = \mathbf{E}-\mathbf{T}.$$

Protože $(\mathbf{E}+\mathbf{T})$ je regulární, existuje $(\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}$ a platí

$$\mathbf{R} = (\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{T}).$$

Matice $(\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}$, $(\mathbf{E}-\mathbf{T})$ jsou zaměnitelné, takže poslední vztah můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{T}}{\mathbf{E}+\mathbf{T}}.$$

2. Budiž $\mathbf{T}$ libovolná polosouměrná matice, pro niž platí $|\mathbf{E}+\mathbf{T}| \neq 0$. Ukážeme, že matice

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{T}}{\mathbf{E}+\mathbf{T}} \tag{52}$$

je ortogonální a matice $(\mathbf{E}+\mathbf{R})$ regulární. Vskutku, zřejmě je

$$\mathbf{R}' = \left[(\mathbf{E}-\mathbf{T})(\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}\right]' = \left[(\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}\right]'(\mathbf{E}-\mathbf{T})' =$$
$$= \left[(\mathbf{E}+\mathbf{T})'\right]^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = (\mathbf{E}-\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{T}),$$

takže

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = (\mathbf{E}-\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{T})(\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{T}) = \mathbf{E}.$$

Z toho plyne, že $\mathbf{R}$ je ortogonální. Dále ze vztahu (52) plyne

$$\mathbf{E}-\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = (\mathbf{R}+\mathbf{E}-\mathbf{E})(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = (\mathbf{R}+\mathbf{E})(\mathbf{E}+\mathbf{T}) - (\mathbf{E}+\mathbf{T})$$

a odtud

$$(\mathbf{R}+\mathbf{E})(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = 2\,\mathbf{E}.$$

Proto

$$|\mathbf{R}+\mathbf{E}| = \frac{2^n}{|\mathbf{E}+\mathbf{T}|} \neq 0.$$

Tím je věta dokázána.

PŘÍKLAD 12. Napišme explicitně výraz (52) pro ortogonální matici $\mathbf{R}$ řádu $n = 2$.

Řešení. Každá polosouměrná matice řádu 2 je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0, & u \\ -u, & 0 \end{bmatrix},$$

kde u značí libovolné číslo. Přitom je

$$|\mathbf{E} + \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1, & u \\ -u, & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2,$$

takže budeme předpokládat, že $1 + u^2 \neq 0$.

Je tedy

$$\mathbf{E} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1, & u \\ -u, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{E} + \mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1, & -u \\ u, & 1 \end{bmatrix},$$

takže

$$(\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1} = \frac{1}{1 + u^2} \begin{bmatrix} 1, & -u \\ u, & 1 \end{bmatrix}.$$

Příslušná ortogonální matice $\mathbf{R}$ bude podle (52) tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1, & -u \\ u, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & -u \\ u, & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2} \begin{bmatrix} 1-u^2, & -2u \\ 2u, & 1 - u^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}, & \dfrac{-2u}{1 + u^2} \\ \dfrac{2u}{1 + u^2}, & \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} \end{bmatrix}$$

Dosadíme-li sem $u = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, obdržíme

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Tím jsme obdrželi všechny ortogonální matice 2. řádu, které vyhovují rovnici $|\mathbf{R} + \mathbf{E}| \neq 0$. Vidíme, že jsou to právě všechny vlastní ortogonální matice. (Viz př. 10.)

PŘÍKLAD 13. Napišme explicitně výraz (52) pro ortogonální matice $\mathbf{R}$ řádu $n = 3$.

Řešení. Polosouměrná matice $\mathbf{T}$ řádu 3 je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0, & u, & v \\ -u, & 0, & t \\ -v, & -t, & 0 \end{bmatrix}$$

kde u, v, t značí nějaká čísla. Determinant

$$|\mathbf{E}+\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1, & u, & v \\ -u, & 1, & t \\ -v, & -t, & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2 + v^2 + t^2,$$

takže budeme předpokládat, že je $1 + u^2 + v^2 + t^2 \neq 0$.

Dále je

$$\operatorname{adj}(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1+t^2, & -u-vt, & ut-v \\ u-vt, & 1+v^2, & -t-uv \\ v+ut, & t-uv, & 1+u^2 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{E}-\mathbf{T})\operatorname{adj}(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1, & -u, & -v \\ u, & 1, & -t \\ v, & t, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t^2, & -u-vt, & ut-v \\ u-vt, & 1+v^2, & -t-uv \\ v+ut, & t-uv, & 1+u^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-u^2-v^2+t^2, & -2u-2vt, & -2v+2ut \\ 2u-2vt, & 1-u^2+v^2-t^2, & -2t-2uv \\ 2v+2ut, & 2t-2uv, & 1+u^2-v^2-t^2 \end{bmatrix}$$

Proto

$$\mathbf{R} = \frac{1}{1+u^2+v^2+t^2} \begin{bmatrix} 1-u^2-v^2+t^2, & -2u-2vt, & -2v+2ut \\ 2u-2vt, & 1-u^2+v^2-t^2, & -2t-2uv \\ 2v-2ut, & 2t-2uv, & 1+u^2-v^2-t^2 \end{bmatrix}$$

představuje všechny ortogonální matice řádu 3, pro něž je $|\mathbf{R}+\mathbf{E}| \neq 0$.

11. UNITÁRNÍ MATICE

11.1. Hermitovská délka vektoru. V hermitovské (neboli parabolické) geometrii se obvykle uvažuje o imaginárních vektorech na rozdíl od euklidovské geometrie, kde uvažované vektory jsou obvykle reálné.

V hermitovské geometrii přiřazujeme každému vektoru $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ délku $s \geq 0$ vzorcem

$$s = \left| \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n} \right| \geq 0 \tag{54}$$

kde $\bar{x}_k$ značí komplexně sdružené číslo s číslem x_k.

Druhá mocnina s^2 délky vektoru $\mathbf{x}$ je tedy rovna součinu matice $\bar{\mathbf{x}}'$s maticí $\mathbf{x}$, tj

$$\boxed{[s^2] = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}.} \tag{55}$$

11.2. Definice unitární transformace. Lineární transformace

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

o čtvercové matici $\mathbf{U}$ se nazývá unitární, když transformovaný vektor $\mathbf{x}^*$ má tutéž hermitovskou délku jako původní vektor $\mathbf{x}$.

V tom případě se také matice $\mathbf{U}$ nazývá unitární.

11.3. Věta o unitární matici. Matice $\mathbf{U}$ je unitární, právě když platí vztah

$$\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E} \ . \tag{56}$$

Důkaz. 1. Nechť

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

značí unitární transformaci, takže platí

$$(\bar{\mathbf{x}}^*)'\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}. \tag{57}$$

Odtud plyne

$$(\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{x}})'(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}$$

neboli

$$\bar{\mathbf{x}}'(\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U})\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x} \ . \tag{58}$$

Zvolíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, kde $\mathbf{e}_j$ značí vektor, jehož všechny souřadnice jsou nuly mimo j-tou, která je rovna 1, dostaneme (podobně jako u ortogonálních matic) pro prvky c_{jk} matice $\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U}$ vztah

$$c_{jj} = 1.$$

Zvolíme-li však za $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}_{jk}$, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě souřadnice j-té a k-té, které jsou rovny 1, obdržíme (podobně jako v důkazu věty 10.3) relaci (pro $j \neq k$)

$$c_{jk} + c_{kj} = 0.$$

Zvolíme-li konečně za $\mathbf{x}$ vektor, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě j-té, rovné 1, a kromě k-té, rovné číslu i, obdržíme podobným způsobem pro $j \neq k$ vztah

$$c_{jk} - c_{kj} = 0.$$

Je tedy $c_{jj} = 1$, $c_{jk} = 0$ pro $j \neq k$, kde $j,k = 1,2,\dots,n$. Tím jsme dokázali, že platí vztah (56).

2. Je-li splněna rovnice (56), pak platí vztah (58) a tudíž i vztah (57). To však znamená, že $\mathbf{x}^* = \mathbf{U}\mathbf{x}$ je unitární transformace a matice $\mathbf{U}$ unitární.

PŘÍKLAD 14. Určíme všechny unitární matice řádu $n = 2$.

Řešení. Je-li matice $U = \begin{bmatrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{21}, & u_{22} \end{bmatrix}$ unitární, pak podle (56) platí vztah

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{11}, & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12}, & \bar{u}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{21}, & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Proto prvky u_{ik}, $\bar{u}_{ik}$ splňují rovnice

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11}u_{11} + \bar{u}_{21}u_{21} &= 1, & \bar{u}_{12}u_{11} + \bar{u}_{22}u_{21} &= 0, \\ \bar{u}_{11}u_{12} + \bar{u}_{21}u_{22} &= 0, & \bar{u}_{12}u_{12} + \bar{u}_{22}u_{22} &= 1. \end{aligned} \tag{59}$$

Z těchto vztahů především plyne, že u_{11}, u_{22} mají stejné absolutní hodnoty. Je totiž

$$u_{11}\bar{u}_{11} = u_{11}\bar{u}_{11}(\bar{u}_{12}u_{12} + \bar{u}_{22}u_{22}) = \bar{u}_{11}u_{12}\cdot u_{11}\bar{u}_{12} + u_{11}\bar{u}_{11}\cdot u_{22}\bar{u}_{22} =$$

$$= -\bar{u}_{21}u_{22}\cdot u_{11}\bar{u}_{12} + u_{11}\bar{u}_{11}\cdot u_{22}\bar{u}_{22} = \bar{u}_{21}u_{22}\cdot\bar{u}_{22}u_{21} + u_{11}\bar{u}_{11}\cdot u_{22}\bar{u}_{22} =$$

$$= (u_{11}\bar{u}_{11} + u_{21}\bar{u}_{21})u_{22}\bar{u}_{22} = u_{22}\bar{u}_{22}.$$

Odečteme-li první od poslední rovnice soustavy (59), dostaneme z předešlého vztahu rovnici $\bar{u}_{12}u_{12} = \bar{u}_{21}u_{21}$.

To znamená, že též čísla u_{12}, u_{21} mají stejné absolutní hodnoty. Proto označíme-li $|u_{11}| = u$, $|u_{12}| = v$, kde $u \geq 0$, $v \geq 0$, můžeme psát

$$\begin{aligned} u_{11} &= u\,e^{i\varphi}, & u_{12} &= v\,e^{i\psi} \\ u_{21} &= v\,e^{i\varrho}, & u_{22} &= u\,e^{i\omega}, \end{aligned} \tag{60}$$

přičemž $\varphi, \psi, \varrho, \omega$ jsou vhodná reálná čísla. Z relací (59) dostáváme

$$u^2 + v^2 = 1, \qquad e^{i(\psi-\varphi)} + e^{i(\omega-\varrho)} = 0 \tag{61}$$

Existuje proto takové $\phi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, že je

$$u = \cos\phi, \qquad v = \sin\phi.$$

Z druhé relace (61) plyne (pro $uv \neq 0$) vztah

$$\psi - \varphi = \omega - \varrho + (2k+1)\pi,$$

kde k je libovolné celé číslo. Přitom čísla $\varphi, \psi, \varrho, \omega$ jsou rovnicemi (60) určena až na celé násobky čísla 2π. Můžeme tedy v poslední rovnici vynechat člen $2k\pi$, takže je

$$\psi - \varphi = \omega - \varrho + \pi = 2\tau.$$

Odtud plyne $\psi = \varphi + 2\tau, \quad \omega = 2\tau + \varrho - \pi.$

Píšeme-li $\varphi = \varphi_1 - \tau, \quad \varrho = \varrho_1 - \tau,$

obdržíme $\psi = \varphi_1 + \tau, \quad \omega = \varrho_1 + \tau - \pi.$

Rovnice (60) přejdou v rovnice (kde jsme u φ a ϱ vynechali indexy)

$$u_{11} = e^{i(\varphi-\tau)}\cos\phi, \qquad u_{12} = e^{i(\varphi+\tau)}\sin\phi,$$

$$u_{21} = e^{i(\varrho-\tau)}\sin\phi, \qquad u_{22} = -e^{i(\varrho+\tau)}\cos\phi.$$

Naopak, pro každá reálná čísla ϕ, φ, ϱ, τ je matice

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{i(\varphi-\tau)}\cos\phi, & e^{i(\varphi+\tau)}\sin\phi \\ e^{i(\varrho-\tau)}\sin\phi, & -e^{i(\varrho+\tau)}\cos\phi \end{bmatrix} \tag{62}$$

unitární, jak se snadno zjistí výpočtem. Proto matice (62) představuje všechny unitární matice řádu $n = 2$.

11.4. Věta o charakteristické rovnici unitární matice. Všechny kořeny charakteristické rovnice $|\mathbf{U} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ každé unitární matice $\mathbf{U}$ mají absolutní hodnotu rovnou 1.

První důkaz. Uvedené tvrzení se dokáže podobně jako u ortogonální matice (věta 10.4). Vskutku, je-li $\mathbf{U}$ libovolná unitární matice, existuje rozvoj

$$(\mathbf{U} - \lambda\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{\kappa}}\,\mathbf{A} + \ldots, \tag{63}$$

kde λ_0 je libovolný kořen charakteristické rovnice $|\mathbf{U} - \lambda\mathbf{E}| = \mathbf{E}$, kde je $\kappa \geq 1$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ je regulární matice. Přitom nenapsané členy obsahují kořenové činitele $\lambda - \lambda_0$ v mocnině $> -\kappa$ a kromě toho další členy příslušné k ostatním kořenům. Násobíme-li rovnici (63) maticí

$$\mathbf{U} - \lambda\mathbf{E} = -(\lambda - \lambda_0)\mathbf{E} + (\mathbf{U} - \lambda_0\mathbf{E}),$$

obdržíme

$$\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{U} - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{A}}{(\lambda-\lambda_0)^{\kappa}} + \ldots$$

a odtud porovnáním koeficientů při $(\lambda - \lambda_0)^{-\kappa}$ plyne

$$\mathbf{U}\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Proto je

$$\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{A}},$$

$$\bar{\mathbf{A}}'\bar{\mathbf{U}}' = \bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{A}}',$$

takže

$$\bar{\mathbf{A}}'\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U}\mathbf{A} = \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A}.$$

Protože $\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E}$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, dostáváme odtud

$$\bar{\lambda}_0\lambda_0 = |\lambda_0| = 1.$$

Druhý důkaz. Označme symbolem $\mathbf{g}'$ vektor $[1,1,\ldots,1]$ v n-rozměrném prostoru.

Pak pro libovolný vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ platí

$$s'x = [x_1 + x_2 + \dots + x_n],$$

Nechť $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, kde α, β jsou vhodná reálná čísla, je libovolný kořen charakteristické rovnice

$$|U - \lambda E| = 0,$$

kde U je libovolná unitární matice. Nechť $a + ib = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$ je příslušný invariantní vektor lineární transformace o matici U, přičemž souřadnice uvažovaného vektoru nejsou vesměs nuly a čísla a_k, b_k jsou reálná. Proto je

$$(\alpha + i\beta)(a + ib) = U(a + ib).$$

Odtud máme

$$s'(a^2 + b^2) = (a + ib)'(a - ib) = (a + ib)'U'\bar{U}(a - ib) =$$

$$= [U(a + ib)]'[\bar{U}(a - ib)] = [(\alpha + i\beta)(a + ib)]'[(\alpha - i\beta)(a - ib)]$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)(a + ib)'(a - ib) = (\alpha^2 + \beta^2)s'(a^2 + b^2).$$

Protože $s'(a^2 + b^2) > 0$, dostáváme

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

11.5. Definice hermitovské matice. Čtvercová matice H se nazývá hermitovská, platí-li

$$H' = \bar{H},$$

tj. jsou-li prvky h_{jj} v hlavní diagonále matice H reálné, kdežto prvky h_{jk} jsou pro $j \neq k$ komplexně sdružené s prvky h_{kj}, takže je (pro $j \neq k$)

$$\bar{h}_{jk} = h_{kj}.$$

11.6. Věta. Nechť U je libovolná unitární matice, pro niž $|U + E| \neq 0$. Pak existuje taková hermitovská matice H, že platí

a) matice $E - iH$ je regulární a

b) $$U = \frac{E + iH}{E - iH}. \qquad (64)$$

Důkaz. Pomocí dané matice U utvořme matici H tak, že

$$H = i(E - U)(E + U)^{-1} \qquad (65)$$

Odtud násobením zprava maticí $E + U$ obdržíme

$$H(E + U) = i(E - U). \qquad (66)$$

Záměnou -i za i plyne

$$\bar{H}(E+\bar{U}) = -i(E-\bar{U}).$$

Přejdeme-li k transponovaným maticím, dostaneme

$$(E+\bar{U}')\bar{H}' = i(\bar{U}-E).$$

Násobením zleva maticí U obdržíme pomocí vztahu $U\bar{U}' = E$ vztah

$$(U+E)\bar{H}' = i(E-U).$$

Odtud násobením zleva maticí $(U+E)^{-1}$ plyne

$$\bar{H}' = i(U+E)^{-1}(E-U).$$

Matice $U+E$, $E-U$ jsou zřejmě zaměnitelné. Proto jsou zaměnitelné i matice $(U+E)^{-1}$, $E-U$, takže podle (65) je

$$\bar{H}' = i(E-U)(U+E)^{-1} = H$$

neboli $\bar{H}' = H$. To znamená, že matice H je hermitovská.

Dále ukážeme, že matice $E - iH$ je regulární. Je totiž

$$E - iH = (E+U)(E+U)^{-1} + (E-U)(E+U)^{-1} =$$

$$=(E+U+E-U)(E+U)^{-1} = 2E(E+U)^{-1},$$

takže $$|E-iH| = 2^n\,|E+U|^{-1} \neq 0.$$

Ze vztahu (66) pak plyne

$$(H+iE)U = iE - H$$

neboli (po vynásobení číslem -i)

$$(E-iH)U = E+iH.$$

Odtud dostáváme dokazovaný vztah (64).

11.7..Věta. Všechny unitární matice U řádu $n \geq 2$, pro něž je $|U+E| \neq 0$, se dají vyjádřit ve tvaru

$$U = \frac{E+iH}{E-iH}, \tag{64}$$

kde H je hermitovská matice řádu n, přičemž $|E-iH| \neq 0$.

Důkaz. 1. Je-li U unitární, dokázali jsme v předešlé větě, že ji lze psát ve tvaru (64).

2. Dokážeme nyní, že matice U tvaru (64) je unitární za předpokladu, že $E - iH$ je regulární a H je hermitovská.

Vskutku, předně je
$$\bar{U} = \frac{E-i\bar{H}}{E+i\bar{H}},$$

$$\bar{U}' = \frac{E-i\bar{H}'}{E+i\bar{H}'}.$$

Protože $\mathbf{H}$ je hermitovská, je $\bar{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}$, takže bude
$$\bar{\mathbf{U}}' = \frac{\mathbf{E} - i\mathbf{H}}{\mathbf{E} + i\mathbf{H}}$$
a odtud
$$\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E}.$$
To znamená, že $\mathbf{U}$ je unitární. Tím je věta dokázána.

<u>11.8. POZNÁMKA.</u> V obou předcházejících větách 11.6 a 11.7 jsme předpokládali, že matice $\mathbf{U} + \mathbf{E}$ je regulární. V další větě se tohoto předpokladu zřekneme.

<u>11.9. Věta.</u> Všechny unitární matice $\mathbf{U}$ řádu n lze vyjádřit vzorcem
$$\mathbf{U} = e^{i\varphi}\frac{\mathbf{E} + i\mathbf{H}}{\mathbf{E} - i\mathbf{H}} \tag{67}$$
kde $\mathbf{H}$ značí hermitovskou matici řádu n a kde φ je reálné číslo.

Důkaz. Nechť značí libovolnou unitární matici řádu n, takže je
$$\bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E}.$$
Nechť φ je libovolné reálné číslo. Dokážeme, že matice
$$\mathbf{V} = e^{i\varphi}\mathbf{U}$$
je též unitární. Vskutku, neboť platí
$$\bar{\mathbf{V}} = e^{-i\varphi}\bar{\mathbf{U}}, \qquad \bar{\mathbf{V}}' = e^{-i\varphi}\bar{\mathbf{U}}',$$
a odtud
$$\bar{\mathbf{V}}'\mathbf{V} = \bar{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E}.$$
Dále ukážeme, že je-li λ_0 kořenem charakteristické rovnice matice $\mathbf{U}$, pak $\lambda_0 e^{i\varphi}$ je kořenem charakteristické rovnice matice $\mathbf{V} = e^{i\varphi}\mathbf{U}$.

Vskutku, podle věty 11.4 jsou všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{U}$ tvaru
$$e^{i\varphi_1}, \quad e^{i\varphi_2}, \quad \dots, \quad e^{i\varphi_n},$$
přičemž φ_k značí vhodná reálná čísla (příp. i stejná), která jsou určena až na celé násobky čísla 2π.

Proto můžeme zvolit takové reálné číslo φ, že pro k = 1,2,...,n je
$$\varphi_k + \varphi \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$$
tj. takové φ, že žádné z čísel
$$\varphi_1 + \varphi, \quad \varphi_2 + \varphi, \quad \dots, \quad \varphi_n + \varphi$$
se nerovná lichému násobku čísla π. Pak žádné z čísel
$$e^{i(\varphi_1+\varphi)}, \quad e^{i(\varphi_2+\varphi)}, \quad \dots, \quad e^{i(\varphi_n+\varphi)}$$
není rovno −1; to znamená, že charakteristická rovnice matice $\mathbf{V} = e^{i\varphi}\mathbf{U}$,

kde φ je právě zvolené číslo, nemá kořen -1. Existuje proto hermitovská matice $\mathbf{H}$ tak, že je $|\mathbf{E} - i\mathbf{H}| \neq 0$ a platí

$$\mathbf{V} = e^{i\varphi}\mathbf{U} = \frac{\mathbf{E} + i\mathbf{H}}{\mathbf{E} - i\mathbf{H}}$$

neboli

$$\mathbf{U} = e^{-i\varphi}\frac{\mathbf{E} + i\mathbf{H}}{\mathbf{E} - i\mathbf{H}}\,,$$ což jsme měli dokázat.

PŘÍKLAD 15. Vypočtěme (explicitně) všechny unitární matice řádu 2.

Řešení. Zvolme takovou libovolnou hermitovskou matici řádu 2, aby bylo $|\mathbf{E} - i\mathbf{H}| \neq$ tedy matici

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a, & b + ic \\ b - ic, & d \end{bmatrix} \tag{68}$$

přičemž a, b, c, d jsou reálná čísla, vázaná vztahem

$$|\mathbf{E} - i\mathbf{H}| = \begin{vmatrix} 1 - ia, & -ib + c \\ -ib - c, & 1 - id \end{vmatrix} \neq 0. \tag{69}$$

To znamená, že musí platit

$$1 + b^2 + c^2 - ad - i(a + d) \neq 0,$$

takže aspoň jedno z čísel $(a + d)$, $(1 + b^2 + c^2 - ad)$ je různé od nuly.

Je-li $a + d = 0$, tj. $d = -a$, pak zřejmě

$$1 + b^2 + c^2 - ad \geq 1.$$

Je-li $1 + b^2 + c^2 - ad = 0$, pak je

$$ad = 1 + b^2 + c^2 > 0,$$

takže obě čísla a, d jsou pak od nuly různá a mají stejné znaménko. Proto

$$a + d \neq 0.$$

Vidíme tedy, že ať zvolíme $\mathbf{H}$ jakkoli, je vždycky splněn vztah (69).

Dále je

$$\operatorname{adj}(\mathbf{E} - i\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 1 - id, & ib - c \\ ib + c, & 1 - ia \end{bmatrix}$$

takže

$$(\mathbf{E} + i\mathbf{H})\operatorname{adj}(\mathbf{E} - i\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 1 + ia, & ib - c \\ ib + c, & 1 + id \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - id, & ib - c \\ ib + c, & 1 - ia \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + ad - b^2 - c^2 + i(a - d), & -2(c - ib) \\ 2(c + ib), & 1 + ad - b^2 - c^2 - i(a - d) \end{bmatrix}$$

Proto

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{E} + i\mathbf{H}}{\mathbf{E} - i\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+ad-b^2-c^2+i(a-d)}{1-ad+b^2+c^2-i(a+d)}, & \dfrac{-2(c-ib)}{1-ad+b^2+c^2-i(a+d)} \\ \dfrac{2(c+ib)}{1-ad+b^2+c^2-i(a+d)} & \dfrac{1+ad-b^2-c^2-i(a-d)}{1-ad+b^2+c^2-i(a+d)} \end{bmatrix}$$

je explicitní výraz pro všechny unitární matice druhého řádu. Tento výraz se ovšem dá převést na transcendentní tvar (62) , uvedený v příkladě 14.

12. POZNÁMKA O MATICÍCH PŘEVÁDĚJÍCÍCH DANOU MATICI V SEBE

12.1. Definice. Nechť A je daná čtvercová matice řádu n. Má-li nějaká čtvercová matice P řádu n takovou vlastnost, že

$$P'AP = A \quad , \tag{70}$$

říkáme, že matice P převádí matici A v sebe.

Je-li přitom determinant $|P| = +1$, pravíme, že transformace matice A v sebe je vlastní. Je-li však $|P| = -1$, mluvíme o nevlastní transformaci matice A v sebe.

Všimněme si nyní některých vlastností matice P , která převádí regulární matici A v sebe.

12.2. Věta. Nechť matice P převádí regulární matici A v sebe. Pak platí tato tvrzení:

1. determinant $|P| = \pm 1$;
2. matice P a $(A^{-1}A')$ jsou zaměnitelné, takže platí
$$(A^{-1}A')P = P(A^{-1}A') \tag{71}$$
3. matice $P = A^{-1}A'$ převádí matici A v sebe transformací vlastní.

Důkaz. 1. Z relace (70) plyne
$$|P'|\,|A|\,|P| = |A|$$
neboli
$$|P|^2|A| = |A|.$$
Protože $|A| \neq 0$, máme $|P|^2 = 1$, takže $|P| = \pm 1$.

2. Z relace (70) dostáváme jednak
$$(P'AP)^{-1} = A^{-1} \text{ neboli } P^{-1}A^{-1}(P')^{-1} = A^{-1},$$
jednak
$$(P'AP)' = A' \text{ neboli } P'A'P = A'.$$
Vynásobením posledních dvou rovnic obdržíme
$$\left[P^{-1}A^{-1}(P')^{-1}\right](P'A'P) = A^{-1}A'$$
neboli
$$P^{-1}A^{-1}(P'^{-1}P')A'P = A^{-1}A',$$
takže
$$P^{-1}(A^{-1}A')P = A^{-1}A'.$$
Odtud násobením zleva maticí P dostáváme vztah (71).

3. Dosadíme-li do vztahu (70) $P = A^{-1}A'$, obdržíme

$$(A^{-1}A')'A(A^{-1}A') = A(A^{-1})'(AA^{-1})A' = A(A^{-1})'A' =$$
$$= A[(A')^{-1}A'] = AE = A.$$

Dále je

$$|A^{-1}A'| = |A^{-1}||A'| = |A|^{-1}|A| = \frac{|A|}{|A|} = +1.$$

12.3. POZNÁMKY. 1. Zvolíme-li ve vztahu (70) za matici A matici jednotkovou E, vidíme, že všechny matice R, které převádějí matici E v sebe, vyhovují vztahu

$$R'ER = E$$

neboli

$$R'R = E.$$

Jsou tedy R matice ortogonální. Proto každá ortogonální matice má vlastnosti 1,2,3 uvedené ve větě 12.2; vidíme však, že vlastnosti 2 a 3 jsou pro ortogonální matice triviální.

2. Kdybychom definici transformace matice A v sebe maticí Q definovali vztahem

$$\bar{Q}'AQ = A,$$

obdrželi bychom podobné výsledky a jako zvláštní případ pro $A = E$ dostali bychom (místo ortogonálních matic) matice unitární.

13. RACIONÁLNÍ FUNKCE MATIC

13.1. Definice. 1. Je-li A libovolná čtvercová matice řádu n, pak pro k celé nezáporné definujeme

a) $A^k = \underbrace{A.A\ldots A}_{k}$, je-li $k > 0$ (přirozené); (72)

b) $A^0 = E$, je-li $k = 0$.

2. Je-li matice A regulární řádu n, takže existuje inverzní matice A^{-1}, pak pro k přirozené klademe

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}.A^{-1}\ldots A^{-1}}_{k} = (A^{-1})^k. \qquad (73)$$

13.2. Věta o mocninách matice. 1. Je-li A libovolná matice řádu n, pak pro celá nezáporná čísla p,r platí vztah

$$A^p \cdot A^r = A^{p+r} \qquad (74)$$

2. Je-li však A matice regulární, pak vztah (74) platí i v případě, že p,r jsou libovolná celá čísla (třebas i záporná).

3. Pro libovolné celé číslo k platí

$$E^k = E. \qquad (75)$$

Důkaz. 1. První tvrzení plyne z asociativního zákona pro násobení matic.

2. Předpokládejme, že oba exponenty p,r jsou záporné. Pak položme

$$p = -\tilde{p}\,,\ r = -\tilde{r},$$

kde $\tilde{p} > 0$, $\tilde{r} > 0$. Odtud plyne

$$A^p A^r = A^{-\tilde{p}} A^{-\tilde{r}} = \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{\tilde{p}} \cdot \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{\tilde{r}} = A^{-(\tilde{p}+\tilde{r})} = A^{p+r}.$$

Je-li jenom $p < 0$, kdežto $r > 0$, a je-li např. $-p = \tilde{p} < r$, pak je

$$A^p . A^r = \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{\tilde{p}} \ \underbrace{A \dots A}_{r} = A^{-1} \dots A^{-1} (A^{-1} A) A \dots A =$$

$$= \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{\tilde{p}-1} \ \underbrace{A \dots A}_{r-1} = \dots = \underbrace{A \dots A}_{r-\tilde{p}} = A^{r-\tilde{p}} = A^{r+p}.$$

Analogicky je tomu v ostatních případech. ●

3. Je zřejmé.

13.3. Věta. Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n a nechť k je libovolné celé číslo, kdežto $x \neq 0$ libovolná konstanta. Pak existuje-li matice A^k, platí tyto vztahy:

1. $(x A)^k = x^k A^k,$
2. $(A^k)' = (A')^k,$
3. $|A^k| = |A|^k.$

Důkaz je zřejmý a proto jej přenechávám čtenáři jako cvičení. ●

13.4. Definice polynomu v matici. Nechť

$$g(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

značí polynom stupně $m \geq 0$, přičemž $a_0, a_1, \dots, a_m$ jsou určité konstanty, z nichž aspoň $a_0 \neq 0$.

Je-li A libovolná čtvercová matice řádu n, pak matici tvaru

$$a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_n A^0 \tag{76}$$

nazýváme polynomem v matici A a značíme ji stručně $g(A)$.

Všimněme si, že ke každému polynomu $g(x)$ a ke každé čtvercové matici A můžeme definovat matici $g(A)$ způsobem uvedeným v předešlé definici.

13.5. Věta o polynomech v matici A. Nechť $g(A)$, $h(A)$ jsou polynomy v matici $\mathbf{A}$. Pak platí tato tvrzení:

a) $[g(\mathbf{A})]' = g(\mathbf{A}')$;

b) $g(\mathbf{A}).h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}).g(\mathbf{A})$;

c) $g(\mathbf{A}).[h(\mathbf{A})]^{-1} = [h(\mathbf{A})]^{-1}\, g(\mathbf{A})$, pokud $h(\mathbf{A})$ je regulární.

To znamená, že v případě b) jsou matice $g(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{A})$ zaměnitelné. Podobně v případě c) jsou zaměnitelné matice $g(\mathbf{A})$, $[h(\mathbf{A})]^{-1}$.

Důkaz. 1. V prvním případě je

$$[g(\mathbf{A})]' = (a_o\, \mathbf{A}^m + a_1\, \mathbf{A}^{m-1} + \dots + a_m\, \mathbf{A}^o)' = (a_o\, \mathbf{A}^m)' + (a_1\, \mathbf{A}^{m-1})' + \dots + (a_m\, \mathbf{A}^o)' = a_o(\mathbf{A}')^m + a_1(\mathbf{A}')^{m-1} + \dots + a_m(\mathbf{A}')^o = g(\mathbf{A}').$$

2. Jsou-li
$$g(\mathbf{A}) = a_o\, \mathbf{A}^m + \dots + a_m\, \mathbf{A}^o,$$
$$h(\mathbf{A}) = b_o\, \mathbf{A}^r + \dots + a_r\, \mathbf{A}^o$$

dané polynomy v matici $\mathbf{A}$, pak je každá z matic $a_k.\mathbf{A}^{m-k}$ zaměnitelná s každou maticí $b_j\, \mathbf{A}^{r-j}$, a proto polynom $g(\mathbf{A})$ je zaměnitelný s polynomem $h(\mathbf{A})$.

3. Protože $g(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{A})$ jsou zaměnitelné, jsou podle věty 6.10.2 jsou zaměnitelné též matice $g(\mathbf{A})$, $[h(\mathbf{A})]^{-1}$.

<u>13.6. Definice racionální funkce v matici.</u> Jsou-li $g(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{A})$ polynomy v matici $\mathbf{A}$, přičemž $h(\mathbf{A})$ je regulární, pak matice

$$f(\mathbf{A}) = \frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}$$

je definována a nazývá se racionální funkce v matici $\mathbf{A}$.

O racionálních funkcích v matici platí tato tvrzení:

<u>13.7. Věta o transponování racionální funkce matici $\mathbf{A}$.</u> Platí vztah

$$\left[\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}\right]' = \frac{g(\mathbf{A}')}{h(\mathbf{A}')}\,. \tag{77}$$

Důkaz. Úpravou dostáváme

$$\left[\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}\right]' = \left[g(\mathbf{A}).\,[h(\mathbf{A})]^{-1}\right]' = \left[\left[h(\mathbf{A})\right]^{-1}\right]'.\,[g(\mathbf{A})]' = \left[h(\mathbf{A}')\right]^{-1} g(\mathbf{A}') = \frac{g(\mathbf{A}')}{h(\mathbf{A}')}\,.$$

Přitom předpokládáme, že $h(\mathbf{A})$ je regulární maticí.

13.8. Věta o zaměnitelnosti racionálních funkcí. 1. Jsou-li matice A, B zaměnitelné, je každá racionální funkce $f(A)$ v matici A zaměnitelná s každou racionální funkcí $\varphi(B)$ v matici B, tj.

$$f(A).\varphi(B) = \varphi(B).f(A).$$

2. (Důsledek.) Každé dvě racionální funkce v téže matici A jsou zaměnitelné.

Důkaz. Jsou-li matice A, B zaměnitelné, je A^j zaměnitelná s maticí B^k pro všechna celá nezáporná čísla j,k. Je totiž

$$A^j B^k = \underbrace{A\ldots A}_{j}\underbrace{(AB)B\ldots B}_{k} = \underbrace{A\ldots A}_{j-1}(BA)\underbrace{B\ldots B}_{k-1} = \underbrace{A\ldots A}_{j-2}(BA)A\,.$$

$$.\underbrace{B\ldots B}_{k-1} = \ldots = B\underbrace{A\ldots A}_{j}\underbrace{B\ldots B}_{k-1} = B^2\underbrace{A\ldots A}_{j}\underbrace{B\ldots B}_{k-2} = \ldots = B^k A^j\,.$$

Proto každý polynom v matici A je zaměnitelný s každým polynomem v matici B. Jsou-li tedy

$$f(A) = \frac{g_1(A)}{h_1(A)}\,, \quad \varphi(B) = \frac{g_2(B)}{h_2(B)}$$

libovolné racionální funkce v příslušných maticích, je každý z polynomů $g_1(A)$, $h_1(A)$ zaměnitelný s každým z polynomů $g_2(B)$, $h_2(B)$. Tedy též každá z matic $g_1(A)$, $[h_1(A)]^{-1}$ je zaměnitelná s každou z matic $g_2(B)$, $[h_2(B)]^{-1}$. Proto

$g_1(A)\,[h_1(A)]^{-1}$ je zaměnitelná s maticí $g_2(B).[h_2(B)]^{-1}$.

14. CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE RACIONÁLNÍ FUNKCE V MATICI

Budiž A libovolná čtvercová matice řádu n. Z odst. 9.2 víme, že k matici A přísluší určitá charakteristická rovnice

$$\varphi(\lambda) = |A-\lambda E| = 0. \tag{78}$$

Značí-li $f(A) = g(A)/h(A)$ libovolnou racionální funkci v matici A, má tato racionální funkce opět charakteristickou rovnici, a to

$$|f(A) - \lambda E| = 0. \tag{79}$$

Mezi kořeny charakteristických rovnic (78) a (79) platí určité vztahy, které si odvodíme.

14.1. Věta. Nechť $g(A)$ je polynom v matici A. Pak determinant $|g(A)|$ představuje resultant polynomu $g(\lambda)$ a charakteristického polynomu $\varphi(\lambda) = |A-\lambda E|$ matice A.

Důkaz. Nechť

$$g(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m = a_0(\lambda - h_1)(\lambda - h_2)\dots(\lambda - h_m),$$

kde $h_1, \dots, h_m$ značí kořeny algebraické rovnice $g(\lambda) = 0$.

Zřejmě je

$$g(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^m + \dots + a_m\mathbf{E} = a_0(\mathbf{A} - h_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - h_2\mathbf{E})\dots(\mathbf{A} - h_m\mathbf{E}),$$

takže

$$|g(\mathbf{A})| = a_0^n\,|\mathbf{A} - h_1\mathbf{E}|\,.\,|\mathbf{A} - h_2\mathbf{E}|\,.\,\dots\,.\,|\mathbf{A} - h_m\mathbf{E}|\,.$$

Označíme-li $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, z předešlého vztahu obdržíme

$$|g(\mathbf{A})| = a_0^n\,\varphi(h_1).\varphi(h_2)\dots\varphi(h_m). \tag{80}$$

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$, pak je

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n).$$

Proto podle (80) dostáváme

$$\left.\begin{aligned} |g(\mathbf{A})| = a_0^n\,&(-1)^n(h_1 - \lambda_1)(h_1 - \lambda_2)\dots(h_1 - \lambda_n).\\ .\;&(-1)^n(h_2 - \lambda_1)(h_2 - \lambda_2)\dots(h_2 - \lambda_n).\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ .\;&(-1)^n(h_m - \lambda_1)(h_m - \lambda_2)\dots(h_m - \lambda_n).\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Odtud plyne, že rovnice $\varphi(\lambda)$, $g(\lambda)$ mají společný kořen $h_k = \lambda_j$, právě když je

$$|g(\mathbf{A})| = 0.$$

Vzhledem k tomu představuje determinant $|g(\mathbf{A})|$ rezultant uvedených dvou algebraických rovnic.

14.2. POZNÁMKY. 1. Ze vztahu (81) plyne

$$|g(\mathbf{A})| = g(\lambda_1)g(\lambda_2)\dots g(\lambda_n)\,. \tag{82}$$

2. Z předešlé věty 14.1 plyne (vzhledem k vlastnosti rezultantu algebraických rovnic), že matice $g(\mathbf{A})$ je singulární, právě když algebraická rovnice $g(\lambda) = 0$ a charakteristická rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice $\mathbf{A}$ mají společný kořen.

14.3. Věta o kořenech charakteristické rovnice matice $f(\mathbf{A})$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ a značí-li $f(\mathbf{A})$ racionální funkci o matici $\mathbf{A}$, pak platí tato tvrzení:

1. $$|f(\mathbf{A})| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\dots f(\lambda_n); \tag{83}$$

2. charakteristická rovnice $|f(\mathbf{A}) - \mathbf{E}| = 0$ má kořeny $f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),\ \dots,\ f(\lambda_n)$.

Důkaz. 1. Je-li $f(\mathbf{A})$ polynom v matici $\mathbf{A}$, první tvrzení je správné podle vztahu (82), položíme-li $g(\lambda) = f(\lambda)$.

Nechť je tedy

$$f(\mathbf{A}) = \frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})},$$

kde $g(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{A})$ jsou polynomy v matici $\mathbf{A}$, přičemž $|h(\mathbf{A})| \neq 0$.

Pak podle (82) máme

$$|g(\mathbf{A})| = g(\lambda_1)\, g(\lambda_2) \dots g(\lambda_n),$$
$$|h(\mathbf{A})| = h(\lambda_1)\, h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n).$$

Odtud plyne

$$|f(\mathbf{A})| = |g(\mathbf{A})| \cdot |h(\mathbf{A})|^{-1} = g(\lambda_1) \dots g(\lambda_n) \left[h(\lambda_1) \dots h(\lambda_n)\right]^{-1} =$$
$$= \frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} \dots \frac{g(\lambda_n)}{h(\lambda_n)} = f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n).$$

2. Pro každé λ je

$$\lambda \mathbf{A}^0 - f(\mathbf{A})$$

racionální funkce v matici $\mathbf{A}$. Tedy podle předešlého tvrzení je

$$|\lambda \mathbf{E} - f(\mathbf{A})| = |\lambda \mathbf{A}^0 - f(\mathbf{A})| = \left[\lambda \lambda_1^0 - f(\lambda_1)\right] \left[\lambda \lambda_2^0 - f(\lambda_2)\right] \dots$$
$$\dots \left[\lambda \lambda_n^0 - f(\lambda_n)\right] = \left[\lambda - f(\lambda_1)\right] \left[\lambda - f(\lambda_2)\right] \dots \left[\lambda - f(\lambda_n)\right].$$

Avšak levá strana této rovnice je až na součinitel $(-1)^n$ charakteristický polynom matice $f(\mathbf{A})$, kdežto pravá strana je její rozklad v kořenové faktory.

14.4. POZNÁMKA. Je-li $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$, pak platí vztah

$$\boxed{|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = (-\lambda)^n.} \qquad (84)$$

Vskutku, podle poznámky 14.2.2 je $\varphi(\mathbf{A})$ singulární matice.
Podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice $|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = 0$ kořeny

$$\varphi(\lambda_1),\ \varphi(\lambda_2),\ \dots,\ \varphi(\lambda_n),$$

přičemž $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$. Proto je

$$\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = \dots = \varphi(\lambda_n) = 0.$$

To znamená, že rovnice $|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = 0$ má všechny kořeny rovné nule. Odtud plyne vztah (84).

Tento výsledek později (v odst. 15.6) upřesníme, když ukážeme, že $\varphi(\mathbf{A})$ je vždy nulová matice.

15. MINIMÁLNÍ POLYNOM MATICE

15.1. Definice vzájemně nezávislých matic. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{M}$ značí čtvercové matice téhož řádu n.

Uvedené matice se nazývají vzájemně nezávislé, když maticové rovnici

$$x_1\mathbf{A} + x_2\mathbf{B} + \dots + x_m\mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{85}$$

lze vyhovět čísly $x_1, x_2, \dots, x_m$ jen tehdy, je-li

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

V opačném případě se uvedené matice nazývají vzájemně závislé.

PŘÍKLAD 16. Zjistěme, zda všechny matice $\mathbf{E}_{jk}$ druhého řádu jsou vzájemně nezávislé.

Řešení. Rovnice (85) bude zde tvaru

$$x_1\mathbf{E}_{11} + x_2\mathbf{E}_{12} + x_3\mathbf{E}_{21} + x_4\mathbf{E}_{22} = x_1\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{bmatrix} +$$

$$+ x_3\begin{bmatrix}0, & 0\\ 1, & 0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0, & x_2\\ 0, & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0, & 0\\ x_3, & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & x_4\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}x_1, & x_2\\ x_3, & x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix}.$$

Proto je $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, takže uvedené matice $\mathbf{E}_{jk}$ jsou vzájemně nezávislé.

15.2. Věta. Libovolné čtvercové matice n-tého řádu

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{n^2}, \dots, \mathbf{A}_{n^2+k}$$

v počtu $n^2 + k > n^2$ jsou vždy vzájemně závislé.

Důkaz. Rovnice

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r = \mathbf{0}, \quad \text{kde } r = n^2 + k,$$

zastupuje celkem n^2 lineárních homogenních rovnic o neznámých x_ν v počtu $r = n^2 + k$. Tyto rovnice mají vždy netriviální řešení, neboť neznámých je víc než rovnic.

15.3. POZNÁMKY. 1. Z věty 15.2 plyne, že každý systém vzájemně nezávislých čtvercových matic řádu n obsahuje nejvýš n^2 matic.

Naproti tomu se snadno zjistí, že ať zvolíme přirozené číslo $p \leq n^2$ jakkoli, vždycky existuje p matic n-tého řádu, které jsou vzájemně nezávislé.

Vskutku, stačí zvolit matici typu n^2/p tak, aby měla hodnost p. Označme její prvky podle tohoto schématu

$$\left.\underbrace{\begin{array}{cccc}
{}^1a_{11}, & {}^2a_{11}, & \ldots, & {}^pa_{11}, \\
{}^1a_{12}, & {}^2a_{12}, & \ldots, & {}^pa_{12}, \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
{}^1a_{1n}, & {}^2a_{1n}, & \ldots, & {}^pa_{1n}, \\
{}^1a_{21}, & {}^2a_{21}, & \ldots, & {}^pa_{21}, \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
{}^1a_{ik}, & {}^2a_{ik}, & \ldots, & {}^pa_{ik}, \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
{}^1a_{nn}, & {}^2a_{nn}, & \ldots, & {}^pa_{nn}
\end{array}}_{p}\right\} n^2 \tag{86}$$

Pak rovnice

$$x_1\, {}^1a_{ik} + x_2\, {}^2a_{ik} + \ldots + x_p\, {}^pa_{ik} = 0$$

o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_p$ jsou vzájemně nezávislé a lze jím vyhověti jenom tak, že $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$.

Značí-li $\mathbf{A}_j = \| {}^ja_{ik} \|$ matici utvořenou z prvků j-tého sloupce schématu (86), pak z předešlé úvahy plyne, že matice

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_p$$

jsou vzájemně nezávislé.

2. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice libovolného řádu n, pak ve skupině matic

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^r \qquad (r > n^2)$$

existuje matice $\mathbf{A}^p$ taková, že matice

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{p-1}$$

jsou vzájemně nezávislé, kdežto matice

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{p-1}, \mathbf{A}^p$$

jsou vzájemně závislé.

15.4. Definice minimálního polynomu matice. Je-li $p \geq 0$ celé číslo, o němž je řeč v poznámce 15.3.2, a jsou-li $a_0, a_1, \ldots, a_p$ taková čísla, že pro $a_0 \neq 0$ platí

$$a_0\, \mathbf{A}^p + a_1\, \mathbf{A}^{p-1} + \ldots + a_p\, \mathbf{A}^0 = \mathbf{0},$$

ak minimálním polynomem matice $\mathbf{A}$ rozumíme polynom tvaru

$$\psi(\lambda) = a_o \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p. \tag{87}$$

5.5. POZNÁMKY. 1. Minimální polynom matice $\mathbf{A}$ je určen jednoznačně až na konstantní od nulu různý faktor.

Vskutku, platí-li současně

$$a_o \mathbf{A}^p + a_1 \mathbf{A}^{p-1} + \dots + a_p \mathbf{A}^o = \mathbf{0},$$

$$b_o \mathbf{A}^p + b_1 \mathbf{A}^{p-1} + \dots + b_p \mathbf{A}^o = \mathbf{0},$$

de $a_o b_o \neq 0$, pak mohou nastat dva případy:

Je-li $a_o = b_o$, obdržíme po odečtení obou předešlých rovnic

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \dots, \quad a_p = b_p$$

zhledem k tomu, že matice $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{p-1}$ jsou vzájemně nezávislé.

Je-li však $a_o \neq b_o$, pak je

$$\left(\frac{a_1}{a_o} - \frac{b_1}{b_o}\right) \cdot \mathbf{A}^{p-1} + \left(\frac{a_2}{a_o} - \frac{b_2}{b_o}\right) \mathbf{A}^{p-2} + \dots + \left(\frac{a_p}{a_o} - \frac{b_p}{b_o}\right) \mathbf{A}^0 = 0.$$

roto bude

$$\frac{a_o}{b_o} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_p}{b_p} = \mu,$$

de μ značí nenulový konstantní faktor.

2. Mezi charakteristickým polynomem $\varphi(\lambda)$ a minimálním polynomem $\psi(\lambda)$ téže matice $\mathbf{A}$ řádu n platí jednoduché vztahy. Než si je odvodíme, dokážeme ásledující důležitou větu, která se nazývá Cayleyova - Hamiltonova.

15.6. Věta. Je-li $\mathbf{A}$ libovolná čtvercová matice řádu n a je-li $\varphi(\lambda)$ její harakteristický polynom, pak matice $\varphi(\mathbf{A})$ je vždy nulová, takže

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{88}$$

ůkaz. Nechť

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = c_o \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n, \text{ kde } c_o = (-1)^n.$$

atice adj$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ má za prvky A_{jk} algebraické doplňky prvků determinantu $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$. Proto prvky A_{jk} jsou polynomy stupně nejvýš (n-1) v proměnné λ. Je edy

$$A_{jk} = \sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh} \lambda^h,$$

takže
$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \|A_{jk}\| = \left\|\sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh}\lambda^h\right\| = \sum_{h=0}^{n-1}\lambda^h \|a_{jkh}\| =$$
$$= \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h.$$

Přitom $\mathbf{A}_h$ značí matici tvaru
$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} a_{11h}, \dots, a_{1nh} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1h}, \dots, a_{nnh} \end{bmatrix}.$$

Podle definice adjungované matice platí
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\operatorname{adj}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|\,\mathbf{E} \quad ,$$
takže
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h = \left(\sum_{h=0}^{n} c_{n-h}\lambda^h\right)\mathbf{E}.$$
Odtud je
$$\mathbf{A}\sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h - \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^{h+1}\mathbf{A}_h = \sum_{h=0}^{n} (c_{n-h}\mathbf{E})\,\lambda^h.$$

Porovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda, \dots, \lambda^n$ obdržíme
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}_0 &= c_n\mathbf{E}, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 &= c_{n-1}\mathbf{E}, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 &= c_{n-2}\mathbf{E}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2} &= c_1\mathbf{E}, \\ -\mathbf{A}_{n-1} &= c_0\mathbf{E}: \end{aligned}$$

Násobíme-li zleva tyto rovnice postupně maticemi $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^n$, sčítáním dostaneme
$$\mathbf{A}\mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}^2\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}\mathbf{A}_0) + (\mathbf{A}^3\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}^2\mathbf{A}_1) + \dots - \mathbf{A}^n\mathbf{A}_{n-1} = \varphi(\mathbf{A}).$$
Jak patrno, na levé straně se všechny součiny navzájem ruší, takže
$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

PŘÍKLAD 17. Přímým výpočtem dokažme, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu 2 je
$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$
Řešení. Položme $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$. Pak bude
$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ c, & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Dále je
$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc, & ab + bd \\ ac + dc, & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$
Proto
$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - (a + d)\mathbf{A} + (ad - bc)\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a^2 + bc, & ab + bd \\ ac + dc, & bc + d^2 \end{bmatrix} -$$
$$- \begin{bmatrix} a(a + d), & b(a + d) \\ c(a + d), & d(a + d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc, & 0 \\ 0, & ad - bc \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc, & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd, & bc + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}.$$
Je tedy
$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0} .$$

15.7. POZNÁMKA. Z předešlé věty plyne, že pro stupeň p minimálního polynomu libovolné matice n-tého řádu platí
$$p \leqq n,$$
takže matice $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^n$ jsou vždy vzájemně závislé.

15.8. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Nechť $\psi(\lambda)$ je její minimální polynom, kdežto $g(\lambda)$ je libovolný polynom, pro který platí
$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{0} .$$
Pak polynom $g(\lambda)$ je dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$.

Důkaz. Dělme polynom $g(\lambda)$ polynomem $\psi(\lambda)$. Pak podle algoritmu dělení se zbytkem platí
$$g(\lambda) = \psi(\lambda).h(\lambda) + r(\lambda),$$
kde $h(\lambda)$ značí podíl a $r(\lambda)$ zbytek, který je stupně nižšího než polynom $\psi(\lambda)$.

Odtud plyne $\qquad \mathbf{0} = g(\mathbf{A}) = \psi(\mathbf{A}).h(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A})$.

Protože $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, plyne odtud $r(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Vzhledem k tomu, že $\psi(\lambda) = 0$ je rovnice nejnižšího stupně, které matice $\mathbf{A}$ vyhovuje, a protože $r(\lambda)$ je nižšího stupně než $\psi(\lambda)$, nutně musí být $r(\lambda)$ nulový polynom.

Je tedy
$$g(\lambda) = \psi(\lambda).h(\lambda),$$
takže minimální polynom $\psi(\lambda)$ dělí (beze zbytku) polynom $g(\lambda)$.

15.9. Důsledek. Podle vět 15.6 a 15.8 je charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$ každé matice dělitelný jejím minimálním polynomem. Proto každý kořen minimálního polynomu je zároveň kořenem charakteristického polynomu téže matice.

15.10. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Minimální polynom $\psi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ je roven podílu charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ a největšího společného dělitele $d(\lambda)$ všech minorů (n-1)-ho řádu determinantu $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$, takže

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}. \tag{89}$$

Důkaz. Rozvineme-li determinant $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ ve shodě s Laplaceovou větou podle prvků některého řádku, jsou v tomto rozvoji koeficienty těchto prvků jejich algebraickými doplňky, tedy minory řádu n-1, násobené číslem +1 nebo -1. Je tedy polynom $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ dělitelný největším společným dělitelem $d(\lambda)$ všech minorů řádu n-1, takže

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda)d(\lambda), \tag{90}$$

přičemž $q(\lambda)$ značí vhodný polynom stupně ≥ 0.

Dále je

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathrm{adj}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \varphi(\lambda)\mathbf{E}.$$

Prvky matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ mají největšího společného dělitele $d(\lambda)$, takže

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = d(\lambda).\mathbf{B},$$

kde $\mathbf{B}$ značí vhodnou matici, jejíž prvky nemají společného dělitele v proměnné λ.

Proto

$$d(\lambda).(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = q(\lambda)d(\lambda)\mathbf{E}$$

a odtud

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = q(\lambda)\mathbf{E}. \tag{91}$$

Nechť α značí stupeň polynomu $d(\lambda)$. Pak podíl $q(\lambda)$ je stupně $n-\alpha$ a prvky matice $\mathbf{B}$ jsou polynomy stupně $\leq n-\alpha-1$.

Položme

$$\mathbf{B} = \sum_{h=0}^{n-\alpha-1} \lambda^h \mathbf{B}_h, \qquad q(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h}\lambda^h,$$

přičemž ovšem $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{n-\alpha-1}$ značí vhodné matice.

Podle (91) pak máme

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) \sum_{h=0}^{n-\alpha-1} \lambda^h \mathbf{B}_h = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h} \lambda^h \mathbf{E}.$$

Srovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^{n-\alpha}$ obdržíme

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_0 = a_{n-\alpha}\mathbf{E},$$
$$\mathbf{A}\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0 = a_{n-\alpha-1}\mathbf{E},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} - \mathbf{B}_{n-\alpha-2} = a_1\mathbf{E},$$
$$-\mathbf{B}_{n-\alpha-1} = a_0\mathbf{E}.$$

ásobíme-li zleva tyto rovnice postupně maticemi $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-\alpha}$, po sečtení ostaneme

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{B}_0 + (\mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0) + \dots + \mathbf{A}^{n-\alpha}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} - \mathbf{A}^{n-\alpha-1}\mathbf{B}_{n-\alpha-2} - \mathbf{A}^{n-\alpha}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} =$$
$$= a_0\mathbf{A}^{n-\alpha} + a_1\mathbf{A}^{n-\alpha-1} + \dots + a_{n-\alpha}\mathbf{A}^0 = q(\mathbf{A}).$$

e tedy
$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

roto (podle věty 15.8) je polynom $q(\lambda)$ dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$.
e-li $p(\lambda)$ příslušný podíl, můžeme psát

$$q(\lambda) = \psi(\lambda)p(\lambda). \tag{92}$$

kažme, že také naopak je polynom $\psi(\lambda)$ dělitelný polynomem $q(\lambda)$, takže $p(\lambda)$ e rovný nenulové konstantě.

Vedle λ vezměme v úvahu další proměnnou η a položme

$$\psi(\lambda) - \psi(\eta) = (\lambda - \eta)F(\lambda,\eta),$$

de $F(\lambda,\eta)$ značí vhodný polynom proměnných λ, η a s koeficienty v uvažovaném íselném tělese.

dtud je

$$\psi(\lambda)\mathbf{E} - \psi(\mathbf{A}) = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})F(\lambda,\mathbf{A}).$$

ežto $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, obdržíme

$$\psi(\lambda)\mathbf{E} = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})F(\lambda,\mathbf{A})$$

odtud násobením polynomem $q(\lambda)$ plyne

$$\psi(\lambda)q(\lambda)\mathbf{E} = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})q(\lambda)F(\lambda,\mathbf{A}).$$

zhledem k vztahu (91) máme odtud

$$\psi(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = -(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})q(\lambda)F(\lambda,\mathbf{A}).$$

otože $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ není identicky (pro všechna λ) roven nule, existuje $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$, tedy

$$\psi(\lambda)\mathbf{B} = -q(\lambda)F(\lambda,\mathbf{A}).$$

otože prvky matice $\mathbf{B}$ nemají společného dělitele v proměnné λ, existuje ke aždému kořenovému činiteli $\lambda - \lambda_0$ polynomu $q(\lambda)$ aspoň jeden prvek b_{jk} matici $\mathbf{B}$, který není dělitelný tímto kořenovým činitelem a tedy ani polynomem $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0}$, kde α_0 značí násobnost kořenového činitele $\lambda - \lambda_0$ v polynomu $q(\lambda)$.

Označíme-li F_{jk} prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci matice $F(\lambda,\mathbf{A})$, z poední rovnice plyne vztah

$$\psi(\lambda)b_{jk} = q(\lambda)\left[-F_{jk}\right],$$

takže polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný výrazem $(\lambda - \lambda_0)^{k_0}$. Z toho soudíme, že polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný polynomem $q(\lambda)$.

Proto ze vztahu (92) máme

$$p(\lambda) = c, \tag{93}$$

kde c je nenulová konstanta. Odtud máme

$$\varphi(\lambda) = c\,\psi(\lambda)d(\lambda),$$

takže

$$c\,\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}.$$

Protože $\psi(\lambda)$ je minimální polynom, je také $c\,\psi(\lambda)$ minimálním polynomem.

15.11. Věta. Každý kořen charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ libovolné matice $\mathbf{A}$ je kořenem jejího minimálního polynomu.

Důkaz. Z rovnice (91) plyne

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{B}| = [q(\lambda)]^n\,|\mathbf{E}| = [q(\lambda)]^n,$$

kde n značí řád matice $\mathbf{A}$. Odtud podle (92) a (93) máme

$$\varphi(\lambda)|\mathbf{B}| = c^n\,[\psi(\lambda)]^n = c_1\,[\psi(\lambda)]^n.$$

Ostatní je už zřejmé.

15.12. POZNÁMKA. Z odst. 15.9 a z předešlé věty 15.11 plyne, že charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$ má tytéž kořeny jako minimální polynom $\psi(\lambda)$ téže matice $\mathbf{A}$; jen násobnost kořenů nemusí být stejná.

PŘÍKLAD 18. Určeme minimální polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Určíme nejprve charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$. Obdržíme

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1-\lambda, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1-\lambda, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -2-\lambda, & -\lambda(\lambda+1)+2, & \lambda \\ -2\lambda, & -2\lambda, & 0 \\ 4, & -4, & -2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^2(\lambda+2) + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 + \lambda^2(\lambda^2+\lambda-2) = \lambda^4.$$

Minory 3. řádu v prvním determinantu jsou

$$\begin{array}{llll} -\lambda(\lambda^2+4), & -2\lambda^2, & -2\lambda^2, & -8\lambda \\ -\lambda(\lambda+2), & -\lambda^2(\lambda+1), & -\lambda^2, & -2\lambda(\lambda+2), \\ -\lambda(\lambda-2), & \lambda^2, & -\lambda^2(\lambda-1), & -2\lambda(\lambda-2), \\ 2\lambda, & \lambda^2, & \lambda^2, & -\lambda(\lambda^2-4). \end{array}$$

Jejich největší společný dělitel $d(\lambda) = \lambda$. Proto minimální polynom matice $\mathbf{A}$ je

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)} = \lambda^3 .$$

Odtud z definice minimálního polynomu plyne, že je

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{0} \,, \quad \mathbf{A}^2 \neq \mathbf{0} \,, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{0} \,.$$

15.13. Věta. Je-li $\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}$ racionální funkce v matici $\mathbf{A}$, existuje takový polynom $p(\lambda)$, že platí

$$\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})} = p(\mathbf{A}). \tag{94}$$

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ a nechť $\psi(\lambda)$ je její minimální polynom.

Protože $|h(\mathbf{A})| \neq 0$ a kromě toho podle (83) je

$$|h(\mathbf{A})| = h(\lambda_1) \cdot h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n),$$

nevymizí $h(\lambda)$ pro žádné z čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Proto žádný kořenový činitel $\lambda - \lambda_k$ polynomu $\varphi(\lambda)$ není dělitelem polynomu $h(\lambda)$, a proto též žádný kořenový činitel polynomu $\psi(\lambda)$ nedělí polynom $h(\lambda)$. Proto polynomy $h(\lambda), \psi(\lambda)$ jsou nesoudělné. Existují tedy takové polynomy $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, že platí

$$h(\lambda)p(\lambda) - \psi(\lambda)q(\lambda) = g(\lambda).$$

Odtud máme

$$h(\mathbf{A})p(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}),$$

takže

$$p(\mathbf{A}) = \frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}.$$

15.14. První věta o nilpotentních maticích. Právě když charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má všechny kořeny nulové, při vhodném celém $k > 0$ platí

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{0} \,. \tag{95}$$

Důkaz. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice $\mathbf{A}$ pak podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}^k$ kořeny

$$\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$$

při každém celém k. Když tedy pro určité celé $k > 0$ platí $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, pak kořeny rovnice

$$|\mathbf{A}^k - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{0} - \lambda \mathbf{E}| = (-\lambda)^n = 0$$

jsou vesměs nuly, takže

$$\lambda_1^k = \lambda_2^k = \ldots = \lambda_n^k = 0$$

a proto

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Když naopak pro nějakou matici $\mathbf{A}$ je

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n,$$

pak podle 15.10 je minimální polynom $\psi(\lambda)$ tvaru

$$\psi(\lambda) = c\,\lambda^k$$

při vhodném celém $k > 0$. Odtud máme

$$\mathbf{0} = \psi(\mathbf{A}) = c\,\mathbf{A}^k$$

neboli $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, neboť $c \neq 0$.

15.15. Druhá věta o nilpotentních maticích. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a nechť při vhodném celém $k > 0$ je

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{0}.$$

Pak je-li $\mathbf{B}$ zaměnitelná s maticí $\mathbf{A}$, platí

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{B}|. \tag{96}$$

Speciálně pro $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ máme

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 1. \tag{97}$$

Důkaz. 1. Nejprve dokážeme vztah (97). Podle věty 15.14 je

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^n,$$

odkud pro $\lambda = -1$ dostáváme vztah (97).

2. Protože $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné, jsou též vzájemně zaměnitelné matice $t\mathbf{E} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ při každém t. Vskutku

$$(t\mathbf{E} + \mathbf{B})\mathbf{A} = t\mathbf{A} + \mathbf{BA} = \mathbf{A}t + \mathbf{AB} = \mathbf{A}(t\mathbf{E} + \mathbf{B}).$$

Odtud plyne, že též $(t\mathbf{E} + \mathbf{B})^{-1}, \mathbf{A}$ jsou vzájemně zaměnitelné za předpokladu, že $t\mathbf{E} + \mathbf{B}$ je regulární.

Označme

$$\mathbf{X} = (t\mathbf{E} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}.$$

Pak je

$$\mathbf{X}^k = [(t\mathbf{E}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}]^k = (t\mathbf{E}+\mathbf{B})^{-k}\mathbf{A}^k = (t\mathbf{E}+\mathbf{B})^k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Proto podle (97) je

$$|\mathbf{X} + \mathbf{E}| = 1$$

neboli

$$|(t\mathbf{E} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 1.$$

Položme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{E} = (t\mathbf{E} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E}.$$

Pak je $|\mathbf{Y}| = 1$ a kromě toho

$$(t\mathbf{E} + \mathbf{B})\mathbf{Y} = \mathbf{A} + (t\mathbf{E}+\mathbf{B})\mathbf{E} = \mathbf{A} + (t\mathbf{E}+\mathbf{B}).$$

Proto

$$|t\mathbf{E} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B} + t\mathbf{E}|.$$

Levá i pravá strana této rovnice je polynom proměnné t. Proto pro $t = 0$ obdržíme

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|.$$

16. CVIČENÍ 2.

11. Dány jsou vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, přičemž $\mathbf{a}' = [3,4,-2,14]$, $\mathbf{b}' = [2,0,-6,3]$. Určete $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$.

12. Dokažte, že matice $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cosh t, & -i \sinh t \\ 0, & 0, & i \sinh t, & \cosh t \end{bmatrix}$, kde t je reálné a $i = \sqrt{-1}$, je ortogonální.

(Uvedená matice se vyskytuje v teorii relativity.)

13. Dokažte, že součin dvou ortogonálních matic je matice ortogonální.

14. Dokažte, že pro matici $\mathbf{A}$ řádu 3 platí vztah

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda^3 + |s(\mathbf{A})|\lambda^2 - |h(\mathbf{A})|\lambda + |\mathbf{A}|,$$

kde $|s(\mathbf{A})| = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ je stopa matice $\mathbf{A}$, $|h(\mathbf{A})| = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ je součet hlavních minorů řádu 2 v determinantu $|\mathbf{A}|$.

15. Dokažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = (-1)^n |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|.$$

16. Jednotkové vektory $\mathbf{x}$, o nichž se mluví ve větě 9.3 a které tedy splňují vztahy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{x}| = 1$,
se obvykle nazývají charakteristické, (popř. vlastní) vektory matice $\mathbf{A}$. Určete je pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & -3 \\ 0, & 2, & \sqrt{3} \\ -3, & \sqrt{3}, & -2 \end{bmatrix}$

17. Podle předešlého cvičení 16 určete vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ a ukažte, že jsou lineárně nezávislé; přitom je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 3, & -2 \\ 0, & 3, & 1 \\ 0, & -4, & -2 \end{bmatrix}$$

18. Dokažte, že součet charakteristických kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matice $\mathbf{A}$ je roven její stopě (tj. $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$) a jejich součin je roven determinantu $|\mathbf{A}|$. (Použijte věty o symetrických funkcích kořenů.)

19. Určete charakteristické kořeny matice $(\mathbf{A}'\mathbf{A})$ řádu 3.

20. Dokažte, že všechny charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}$ jsou různé od nuly, právě když je $\mathbf{A}$ regulární. (Použijte výsledku cvičení 18.)

21. Dokažte, že charakteristické kořeny inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ jsou rovny převráceným hodnotám charakteristických kořenů matice $\mathbf{A}$.

22. Ověřte Cayleyovu-Hamiltonovu větu o matici $\varphi(\mathbf{A})$, je-li

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4, & 0, & -1 \\ 2, & 5, & 0 \\ -3, & -2, & 1 \end{bmatrix}$.

23. Určete charakteristický a minimální polynom matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & -3, & 2 \\ -1, & 5, & -2 \\ -1, & 3, & 0 \end{bmatrix}$.

24. Určete minimální polynom matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4, & -2, & 2 \\ -5, & 7, & -5 \\ -6, & 6, & -4 \end{bmatrix}$.

Výsledky.

11. $\mathbf{a}'\mathbf{b} = 2.3 + 0 + 2.6 + 14.3 = 60, |\mathbf{a}| = \sqrt{9+16+4+196} = 15, |\mathbf{b}| = \sqrt{4+0+36+9} = 7.$

12. Použijte vztahu $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

16. Vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, pro něž je $\mathbf{x}_1' = [1/2, \sqrt{3}/2, 0]$, $\mathbf{x}_2' = [-3/4, \sqrt{3}/4, 1/2$
$\mathbf{x}_3' = [\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{3}/2]$.

17. $\mathbf{x}_1' = [11/\sqrt{189}, -2/\sqrt{189}, 8/\sqrt{189},]$ $\mathbf{x}_2' = [1,0,0]$, $\mathbf{x}_3' = [5/\sqrt{27}, 1/\sqrt{27}, -1/$ 2

19. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2$.

22. $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{A}^3 - 15\mathbf{A}^2 - 18\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}^3 - 10\mathbf{A}^2 + 26\mathbf{A} - 9\mathbf{E} = 0$.

23. $\varphi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$, $\psi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$.

24. $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, $\lambda^2 - 5\lambda + 6$.

17. HODNOST A NULITA MATICE

Pojem hodnosti matice, známý z přednášek o determinantech, jsme uvedli v poznámce 1.6. S pojmem hodnosti matice úzce souvisí pojem nulity čtvercové matice.

17.1. Definice nulity matice. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu n a je-li a její hodnost, pak nulitou matice $\mathbf{A}$ rozumíme číslo

$$\alpha = n - a,$$

které budeme značit symbolem nul $\mathbf{A}$.

17.2. POZNÁMKA. Z předešlé definice nulity matice plyne, že když má matice $\mathbf{A}$ nulitu α, existuje v matici $\mathbf{A}$ aspoň jeden nenulový determinant řádu $m = n - \alpha >$

kdežto všechny determinanty řádu $n - \alpha + 1$ jsou (pro $\alpha > 0$) rovny nule.

17.3. Úmluva. Výrok, že matice ($\mathbf{A}$) řádu n má nulitu $\alpha = n$, znamená, že všechny prvky matice ($\mathbf{A}$) jsou nuly.

Naproti tomu výrok, že matice ($\mathbf{A}$) řádu n má nulitu $\alpha = 0$, značí, že $\mathbf{A}$ je regulární.

Uveďme ještě následující dvě věty 17.4 a 17.6, které se dokazují v teorii lineárních rovnic.

17.4. Věta. 1. Nechť matice $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|$ je čtvercová řádu n a má nulitu $\alpha = n - a$.

Pak existuje právě α nezávislých řešení soustavy n homogenních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{98}$$

2. Když naopak existuje k nezávislých řešení soustavy (98), pak pro nulitu α matice $\mathbf{A}$ platí

$$\alpha \geq k.$$

17.5. POZNÁMKY. 1. Každý systém všech nezávislých řešení (v počtu α) soustavy (98) tvoří fundamentální systém řešení v tom smyslu, že každé řešení soustavy rovnic (98) je lineární kombinací jednotlivých řešení fundamentálního řešení. Přitom se fundamentální systém řešení soustavy (98) nalezne, když se např. Frobeniovou metodou určí fundamentální systém řešení soustavy redukované ze soustavy (98), tj. soustavy skládající se z nezávislých rovnic (v počtu a) vybraných ze soustavy (98). Srv. poznámku 6.3.

2. Soustava (98) určuje zřejmě takové vektory $\mathbf{x}$ v n-rozměrném prostoru, jejichž transformované vektory

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad ,$$

vzniklé lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ typu n/n, jsou nulové (tj. mají všechny souřadnice rovny nule). Hořejší věta se pak snadno vykládá v tom smyslu, že udává největší počet lineárně nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}$ transformují na nulový vektor.

3. Poznamenejme ještě, že vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ o souřadnicích

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n};$$
$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn},$$

nazýváme lineárně nezávislými, existují-li taková čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, z nichž aspoň jedno je od nuly různé, že platí

$$\lambda_1 x_{11} + \dots + \lambda_k x_{k1} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_1 x_{1n} + \dots + \lambda_k x_{kn} = 0,$$

tj. existuje-li k-rozměrný vektor $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ tak, že platí $\boldsymbol{X\lambda} = \boldsymbol{0}$,

kde $$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn} \end{bmatrix}.$$

17.6. Věta. Libovolná matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}_1$, vzniklá z $\boldsymbol{A}$ rozšířením o sloupec, který je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$, mají stejnou hodnost.

Podobně je tomu, je-li matice $\boldsymbol{A}_1$ rozšířena o řádek, který je lineární kombinací řádků dané matice $\boldsymbol{A}$.

V dalším výkladu se obeznámíme s několika důležitými větami o hodnosti matic.

17.7. Věta o hodnosti součinu dvou matic. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ čtvercové matice řádu n a jsou-li a,b jejich hodnosti, pak pro hodnost c matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ platí vztah

$$c \leq a, \qquad c \leq b. \tag{99}$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{A} = \| a_{jk} \|$, $\boldsymbol{B} = \| b_{jk} \|$, $\boldsymbol{AB} = \| c_{jk} \|$. Pak podle věty 17.6 mají stejnou hodnost matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}_1$ tvaru

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn}, a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n}, c_{11} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn}, c_{n1} \end{bmatrix}$$

Podobně mají stejnou matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{A}_n$ tvaru

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}, \dots, a_{1n}, & c_{11}, \dots, c_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn}, & c_{n1}, \dots, c_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \end{array}\right].$$

Protože matice $\mathbf{AB} = \| c_{jk} \|$ o hodnosti c je částí matice $\mathbf{A}_n$, zřejmě musí být

$$c \leq a.$$

Podle věty 17.4 existuje n-b lineárně nezávislých řešení rovnice $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Každé takové řešení hoví rovnicím

$$(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

neboť je

$$(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Avšak nezávislých řešení soustavy $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je nanejvýš n-c. Proto

$$n - c \geq n - b \qquad \text{neboli} \qquad c \leq b.$$

17.8. Věta a nulitě součinu dvou matic. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou čtvercové matice řádu n a nechť α, β jsou jejich nulity. Je-li γ nulita matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, pak platí vztah

$$\gamma \leq \alpha + \beta. \tag{100}$$

To znamená, že nulita součinu dvou čtvercových matic téhož řádu n je nanejvýš rovna součtu nulit obou matic.

Důkaz. Podle definice existují lineárně nezávislé vektory:

a) např. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\alpha$ (v počtu α), přičemž $\mathbf{A}\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$,

b) např. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta$ (v počtu β), přičemž $\mathbf{B}\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$,

c) např. $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\gamma$ (v počtu γ), přičemž $\mathbf{C}\mathbf{c}_h = \mathbf{0}$,

kde $j = 1,2,\dots,\alpha$; $k = 1,2,\dots,\beta$; $h = 1,2,\dots,\gamma$. Protože pak

$$\mathbf{B}\mathbf{b}_k = \mathbf{0},$$

plyne odtud

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{b}_k) = (\mathbf{AB})\mathbf{b}_k = \mathbf{C}\mathbf{b}_k,$$

takže je

$$\gamma \geq \beta.$$

1. Je-li $\gamma = \beta$, je zřejmě $\gamma \leq \alpha + \beta$.

2. Budiž $\gamma > \beta$. Pak za vektory $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_\gamma$ můžeme zvolit vektory

$$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta, \mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma.$$

Označme pro $i = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \gamma$ vektory

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{B}\mathbf{c}_i . \tag{101}$$

Pak je

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_i = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{c}_i) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{c}_i = \mathbf{C}\mathbf{c}_i = \mathbf{0} .$$

Tvrdíme, že vektory $\mathbf{y}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{y}_\gamma$ jsou nezávislé. Kdyby totiž byly závislé, existoval by ($\gamma - \beta$)-rozměrný vektor $\mathbf{a}$ takový, že všechny jeho souřadnice nejsou nuly a že je

$$[\mathbf{y}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{y}_\gamma]\,\mathbf{a} = \mathbf{0} ,$$

kde $[\mathbf{y}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{y}_\gamma]$ značí matici, jejíž jednotlivé sloupce představují vektory $\mathbf{y}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{y}_\gamma$.

Ze vztahu (101) dostáváme

$$[\mathbf{B}\mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{B}\mathbf{c}_\gamma]\,\mathbf{a} = \mathbf{0} ,$$

takže

$$\mathbf{B}\,[\mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma]\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

neboli

$$\mathbf{B}\big([\mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma]\,\mathbf{a}\big) = \mathbf{0} .$$

Vektor $\mathbf{r} = [\mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma]\,\mathbf{a}$ není nulový, neboť jinak by vektory

$$\mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma$$

byly závislé, což je proti předpokladu. Protože vektor $\mathbf{r}$ se transformuje maticí $\mathbf{B}$ v nulový vektor, je závislý na vektorech $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta$. Vzhledem k tomu jsou vektory

$$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta, \mathbf{c}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{c}_\gamma$$

závislé. To však je proti předpokladu. Proto vektory $\mathbf{y}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{y}_\gamma$ jsou nezávislé, jak jsme tvrdili.

Podle předpokladu však existuje právě α nezávislých vektorů takových, že se maticí $\mathbf{A}$ transformují v nulový vektor. Proto

$$\gamma - \beta \leqq \alpha$$

a odtud

$$\gamma \leqq \alpha + \beta .$$

Tím je věta dokázána. Ve zvláštních případech (viz věty 17.9 a 17.10) je nulita součinu dvou matic právě rovna součtu nulit obou matic.

17.9. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice řádu n. Nechť $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ jsou libovolné nesoudělné polynomy.

Pak je

$$\operatorname{nul}\,[\,f(\mathbf{A}).g(\mathbf{A})\,] = \operatorname{nul} f(\mathbf{A}) + \operatorname{nul} g(\mathbf{A}).$$

Důkaz. Nulity matic $f(\mathbf{A})$, $g(\mathbf{A})$, $f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A})$ označme postupně symboly α, β, γ . Podle věty 17.8 platí

$$\gamma \leqq \alpha + \beta .$$

Stačí proto dokázat, že

$$\gamma \geqq \alpha + \beta .$$

Protože $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ jsou nesoudělné polynomy, existují podle známé věty polynomy $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ takové, že

$$f(\lambda)F(\lambda) + g(\lambda)G(\lambda) = 1.$$

Pak je
$$f(\mathbf{A})F(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})G(\mathbf{A}) = \mathbf{E}. \tag{102}$$

Protože $\alpha = \text{nul } f(\mathbf{A})$, $\beta = \text{nul } g(\mathbf{A})$, existují tyto nezávislé vektory

a) $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha$ takové, že pro $j = 1,2,\ldots,\alpha$ platí $f(\mathbf{A})\,\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$,

b) $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\beta$ takové, že pro $k = 1,2,\ldots,\beta$ platí $g(\mathbf{A})\,\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$.

Tvrdíme, že vektory

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha, \quad \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\beta \tag{103}$$

jsou lineárně nezávislé.

Vskutku, jsou-li závislé, existuje $(\alpha+\beta)$-rozměrný vektor $\mathbf{z}$ takový, že aspoň jedna z jeho prvních α a posledních β souřadnic je nenulová a platí

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\beta]\,\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{104}$$

Složíme-li tuto rovnici s maticí (102), obdržíme vzhledem k vztahu

$$g(\mathbf{A})G(\mathbf{A})\mathbf{y}_k = G(\mathbf{A})\,[g(\mathbf{A})\,\mathbf{y}_k] = G(\mathbf{A})\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

vztah
$$[\mathbf{E}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{x}_\alpha, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\,\mathbf{y}_1, \ldots, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{y}_\beta]\,\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

neboli
$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{y}_1, \ldots, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{y}_\beta]\,\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{105}$$

Z rovnice (104) složením s maticí $\mathbf{C} = f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})$ dostaneme

$$[\mathbf{C}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{C}\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{C}\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{C}\mathbf{y}_\beta]\,\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Protože pak $\mathbf{C}\mathbf{x}_j = f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{x}_j = F(\mathbf{A})f(\mathbf{A})\mathbf{x}_j = F(\mathbf{A})\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, z předešlé rovnice plyne

$$[\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{y}_1, \ldots, f(\mathbf{A})F(\mathbf{A})\mathbf{y}_\beta]\,\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Odečtením této rovnice od rovnice (105) obdržíme

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]\,\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{106}$$

Protože aspoň jedna z prvních α souřadnic vektoru $\mathbf{z}$ je nenulová, plyne z rovnice (105), že vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha$ jsou závislé. To však je proti předpokladu. Vzhledem k tomu vektory (103) jsou nezávislé. Avšak každý z těchto vektorů hoví zřejmě relaci

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})\,\mathbf{x}_j = \mathbf{0},$$
$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})\,\mathbf{y}_k = \mathbf{0},$$

neboť matice $f(\mathbf{A})$, $g(\mathbf{A})$ jsou zaměnitelné. Proto $\gamma \geq \alpha + \beta$, čímž je věta dokázána.

<u>17.10. Věta.</u> Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice o nulitě α, kdežto $\mathbf{B}$ je regu-

lární matice téhož řádu n, takže nul $\mathbf{B} = \beta = 0$. Pak je

$$\text{nul}\, \mathbf{AB} = \text{nul}\, \mathbf{A} + \text{nul}\, \mathbf{B} = \text{nul}\, \mathbf{A} \; .$$

Důkaz. Vskutku, podle vět 17.7 a 17.8 je

$$\alpha = \max(\alpha, \beta) \leqq \text{nul}\, \mathbf{AB} \leqq \alpha + \beta = \alpha \, ,$$

takže

$$\alpha \leqq \text{nul}\, \mathbf{AB} \leqq \alpha \, ,$$

a tedy

$$\text{nul}\, \mathbf{AB} = \alpha = \alpha + \beta \; .$$

17.11. POZNÁMKA. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n. Nechť $\mathbf{Q}$ je libovolná regulární matice téhož řádu n. Pak podle věty 17.10 má matice $\mathbf{AQ}$, a tedy i matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \tag{107}$$

tutéž nulitu jako matice $\mathbf{A}$.

17.12. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je matice řádu n a budiž $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$, kde $\mathbf{Q}$ je libovolná regulární matice téhož řádu n jako $\mathbf{A}$. Pak platí tato dvě tvrzení:

1. $$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| \; , \tag{108}$$

takže matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$ mají stejný charakteristický polynom.

2. Pro libovolné přirozené k platí

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{Q} \; . \tag{109}$$

Důkaz. 1. Protože

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} - \lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{EQ} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q} \, ,$$

zřejmě je

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{Q}^{-1}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|\,|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| \; .$$

2. Úplnou indukcí. Pro k = 1 vztah (109) je správný. Budiž k > 1 a předpokládejme, že vzorec platí pro exponent k − 1. Pak je

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^{k-1}\mathbf{B} = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{Q})(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^{k-1}(\mathbf{QQ}^{-1})\mathbf{AQ} =$$
$$= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{Q} \; .$$

17.13. Věta. Nechť γ (kde $1 \leqq \gamma < n$) značí nulitu čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n, Pak existuje regulární matice $\mathbf{Q}$ taková, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ je tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\gamma \\ \}n-\gamma \end{array} \\ \underbrace{}_{\gamma}\;\underbrace{}_{n-\gamma} \end{array} \tag{110}$$

kde $\mathbf{K}$ je určitá matice typu $\gamma \times (n-\gamma)$, kdežto $\mathbf{L}$ je čtvercová matice řádu $n-\gamma$.

Důkaz. Protože $\varrho (\geq 1)$ je nulita matice $\mathbf{A}$, existují nezávislé vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\varrho$ takové, že se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}$ transformují v nulový vektor. Nechť

$$\mathbf{x}_{\varrho+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$$

značí další vektory takové, že všechny vektory

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$$

jsou nezávislé. Pak matice

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$$

je regulární a matice $\mathbf{AQ}$ má pak v prvních sloupcích v počtu ϱ samé nuly. Totéž platí o matici $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$. Tím je tvrzení dokázáno.

<u>17.14. Věta.</u> Mezi maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{L}$, o nichž je řeč v předešlé větě 17.13, platí tyto vztahy:

1. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^\varrho |\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}|$;
2. nul $\mathbf{A}^k = \varrho +$ nul $\mathbf{L}^{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$;
3. nul $\mathbf{L} \leq \varrho$.

Důkaz. 1. Podle (108) je $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}|$. Z tvaru matice (110) plyne

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^\varrho |\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}| ,$$

odkud plyne tvrzení 1.

2. Podle odst 17.11 a věty 17.12.2 platí pro $k = 1, 2, \ldots$ vztah

$$\text{nul } \mathbf{A}^k = \text{nul } \mathbf{B}^k.$$

Proto stačí ukázat, že je

$$\text{nul } \mathbf{B}^k = \varrho + \text{nul } \mathbf{L}^{k-1}. \tag{111}$$

Pro $k = 1$ je vztah zřejmě správný. Proto předpokládejme, že $k > 1$. Snadno se vidí, že je

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{B}.\mathbf{B}^{k-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{k-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{L}^{k-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{K}_k \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{L}^k \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\varrho \\ \}n-\varrho \end{array}$$

$$\underbrace{\quad}_{\varrho}\ \underbrace{\quad}_{n-\varrho} \qquad \underbrace{\quad}_{\varrho}\ \underbrace{\quad}_{n-\varrho} \qquad \underbrace{\quad}_{\varrho}\ \underbrace{\quad}_{n-\varrho}$$

kde $\mathbf{K}_{k-1}$, $\mathbf{K}_k$ značí vhodné matice. Protože nulita matice $\mathbf{B}$ je ϱ a její hodnost $n-\varrho$, jsou poslední sloupce v počtu $n-\varrho$ v matici $\mathbf{B}$ lineárně nezávislé. Poslední sloupce v počtu $n-\varrho$ v poslední matici $\mathbf{B}^k$ jsou lineárními kombinacemi oněch sloupců v matici $\mathbf{B}$, přičemž koeficienty v těchto lineárních kombinacích jsou souřadnicemi $(n-\mathfrak{g})$-rozměrných vektorů. Tyto souřadnice jsou prvky matice $\mathbf{L}^{k-1}$. Označíme-li tedy písmeny $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ libovolné stejnolehlé matice řádu $n-\mathfrak{g}$, utvořené z posledních $n-\mathfrak{g}$ sloupců matic $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^k$, máme vztah

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{L}^{k-1}.$$

Hodnost matice $\mathbf{B}^k$ je zřejmě rovna hodnosti matice $\mathbf{Y}$, která má největší hodnost, a tedy nejmenší nulitu. Protože podle věty 17.9 je

$$\text{nul } \mathbf{L}^{k-1} \leq \text{nul } \mathbf{Y} \leq \text{nul } \mathbf{X} + \text{nul } \mathbf{L}^{k-1}, \tag{112}$$

vidíme, že nejmenší nulitu má taková matice $\mathbf{Y}$, jejíž stejnolehlá matice $\mathbf{X}$ má nulitu 0. Taková matice $\mathbf{X}$ existuje, neboť poslední sloupce v počtu $n-\mathfrak{g}$ v matici $\mathbf{B}$ jsou lineárně nezávislé. Zvolíme-li tedy za $\mathbf{X}$ uvažovanou matici, podle (112) obdržíme vztah

$$\text{nul } \mathbf{Y} = \text{nul } \mathbf{L}^{k-1}.$$

Odtud máme $\quad \text{nul } \mathbf{B}^k = n - \text{hodnost } \mathbf{B}^k = n - \text{hodnost } \mathbf{Y} = n - n + \mathfrak{g} +$

$$+ \text{ nul } \mathbf{Y} = \mathfrak{g} + \text{nul } \mathbf{Y} = \mathfrak{g} + \text{nul } \mathbf{L}^{k-1}.$$

Tím je dokázáno tvrzení 2.

3. Podle předešlého tvrzení pro $k=2$ máme

$$\text{nul } \mathbf{L} = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 ,$$

kde $\mathfrak{g}_1 = \text{nul } \mathbf{A}$, $\mathfrak{g}_2 = \text{nul } \mathbf{A}^2$. Protože matice $\mathbf{L}$ je řádu $n-\mathfrak{g}_1$, její hodnost je

$$n - \mathfrak{g}_1 - (\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1) = n - \mathfrak{g}_2 .$$

Proto obsahuje právě $n-\mathfrak{g}_2$ nezávislých řádků. Odtud plyne, že v posledních $n-\mathfrak{g}_1$ řádcích matice $\mathbf{B}$ je právě $n-\mathfrak{g}_2$ nezávislých řádků. Tedy hodnost matice $\mathbf{B}$ je nanejvýš rovna číslu $n-\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_1$, takže

$$\mathfrak{g}_1 - \text{nul } \mathbf{B} \geq n-(n-\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 ,$$

čímž je dokázáno i tvrzení 3.

<u>17.15. POZNÁMKA.</u> Všimněme si, že výsledek 17.14.3 můžeme psát ve tvaru

$$\boxed{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_0 \geq \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 ,} \tag{113}$$

kde $\mathfrak{g}_k = \text{nul } \mathbf{A}^k$, přičemž $\mathfrak{g}_0 = \text{nul } \mathbf{A}^0 = \text{nul } \mathbf{E} = 0$.

18. CHARAKTERISTICKÁ ČÍSLA MATICE

<u>18.1. Úmluva a označení.</u> 1. V dalších úvahách vezmeme v úvahu libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu $n \geq 1$, o níž budeme předpokládat, že její charakteristická rovnice má $\lambda = 0$ za α-násobný kořen, přičemž $\alpha \geq 1$.

2. Pro k = 0,1,2,... použijeme označení

$$\gamma_k = \text{nul}\ \mathbf{A}^k,$$

přičemž $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 > 1$.

18.2. Věta. Číslo $\lambda = 0$ je α – násobným kořenem všech charakteristických rovnic matic $\mathbf{A}^k$, kde k je libovolné přirozené číslo.

Důkaz. Vskutku, označme kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ čísly

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-\alpha},$$

kde $(\lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_{n-\alpha}) \neq 0$. Pak podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}^k$ kořeny

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha}, \lambda_1^k, \dots, \lambda_{n-\alpha}^k .$$

18.3. Věta. Značí-li α násobnost kořene $\lambda = 0$ charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$, jejíž nulita je $\gamma_1 = \text{nul}\ \mathbf{A}$, pak pro k = 0,1,2, ... platí

$$\gamma_k \leqq \alpha . \tag{114}$$

Důkaz. 1. Tvrzení je zřejmě správné pro k = 0, neboť $\gamma_0 = 0 < \alpha$.

2. Dokážeme je pro k = 1. Všimněme si, že charakteristickou rovnici matice $\mathbf{A}$ můžeme psát ve tvaru

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n,$$

kde S_k značí součet hlavních minorů řádu k v determinantu $|\mathbf{A}|$.
Protože $\lambda = 0$ je α – násobný kořen rovnice $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$, bude

$$S_{n-\alpha} \neq 0.$$

Odtud plyne, že v determinantu $|\mathbf{A}|$ je aspoň jeden minor řádu $n-\alpha$ nenulový.
Proto hodnost matice $\mathbf{A}$ je $\underline{a} \geqq n - \alpha$, takže

$$a = n - \gamma_1 \geqq n - \alpha$$

a tedy

$$\gamma_1 \leqq \alpha .$$

3. Pro k > 1 tvrzení plyne z věty 18.2 vzhledem k předešlému výsledku (pro k = 1).

18.4. Věta. Nechť α je násobnost kořene $\lambda = 0$ charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ a nechť $\gamma_k = \text{nul}\ \mathbf{A}^k$.

Pak pro k = 0,1,2, ... platí vztahy:

1. Vždy je
$$\gamma_k \leqq \gamma_{k+1}. \tag{115}$$

2. Když pro určité k platí $\gamma_k = \alpha$, pak je

$$\alpha = \gamma_k = \gamma_{k+1} \dots .$$

3. Když pro určité k je však $\gamma_k < \alpha$, pak nutně

$$\gamma_k < \gamma_{k+1}. \tag{116}$$

4. Vždy je
$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \geq \gamma_{k+2} - \gamma_{k+1} \tag{117}$$

Důkaz. 1. První tvrzení plyne ze vztahu $A^{k+1} = A^k.A$ podle věty 17.7, takže je

$$n - \gamma_{k+1} \leq n - \gamma_k.$$

2. Je-li $\gamma_k = \alpha$, pak podle (114) a (115) máme

$$\alpha = \gamma_k \leq \gamma_{k+1} \leq \alpha,$$

takže
$$\gamma_{k+1} = \alpha = \gamma_{k+2} = \dots$$

3. Budiž $\gamma_k < \alpha$. Tvrzení (116) dokážeme úplnou indukcí vzhledem k řádu matice. Ukážeme nejprve, že tvrzení platí pro každou matici řádu n = 1. Nechť je $A = [a]$ matice řádu n = 1, jejíž charakteristická rovnice má α-násobný (pro $\alpha \geq 1$) kořen $\lambda = 0$. Zde nutně $\alpha = 1$, takže $A = 0$. Je tedy

$$\gamma_0 = 0,\ 1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots .$$

Je-li tedy při některém $k \geq 0$ nulita $\gamma_k < \alpha$ (v našem případě pro k = 0), pak je

$$0 = \gamma_0 = \gamma_k < \gamma_{k+1} = \gamma_1 = 1.$$

Nechť tedy matice A má řád $n \geq 2$ a předpokládejme, že dokazované tvrzení je správné pro všechny matice řádu $\leq n - 1$.

Když k = 0, je $\gamma_0 = 0 < \alpha$ a skutečně je

$$\gamma_0 < \gamma_1, \text{ ježto } \gamma_1 > 0.$$

Nechť je $\gamma_k < \alpha$ pro určité $k \geq 1$. Pak nutně $\gamma_1 < n$. Podle výsledku věty 17.13 existuje matice L řádu $n - \gamma_1$ ($< n$) taková, že má $(\alpha - \gamma_1)$-násobný charakteristický kořen $\lambda = 0$ a pro j = 1,2, ... platí

$$\gamma_j = \gamma_1 + \text{nul } L^{j-1} \tag{118}$$

Odtud pro j = k máme

$$\text{nul } L^{k-1} = \gamma_k - \gamma_1 < \alpha - \gamma_1,$$

takže podle indukčního předpokladu je

$$\text{nul } L^{k-1} < \text{nul } L^k.$$

Proto je
$$\gamma_k - \gamma_{k+1} = \text{nul } L^{k-1} - \text{nul } L^k < 0,$$

čímž je dokázáno tvrzení 3.

4. Tvrzení (117) dokážeme opět indukcí vzhledem k řádu matice. Ukažme předně, že věta platí pro každou matici řádu n = 1. Nechť $A = [a]$ je libovolná ma-

tice řádu 1, jejíž charakteristický kořen $\lambda = 0$ je α - násobný (kde $\alpha \geq 1$). Proto je

$$\gamma_0 = 0, \quad 1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots,$$

takže tvrzení je správné.

Nechť proto matice $\mathbf{A}$ je řádu $n \geq 2$ a předpokládejme, že tvrzení (117) je správné pro všechny matice řádu $m \leq n - 1$. Pro $k = 0$ věta platí podle vztahu (113). Nechť tedy $k \geq 1$.

Je-li $\gamma_1 = n$, pak máme

$$n = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2,$$

a tvrzení zřejmě platí.

Nechť tedy $\gamma_1 < n$ a použijme vztahu (118). Dostaneme vztah

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = \text{nul } \mathbf{L}^k - \text{nul } \mathbf{L}^{k-1},$$

$$\gamma_{k+2} - \gamma_{k+1} = \text{nul } \mathbf{L}^{k+1} - \text{nul } \mathbf{L}^k.$$

Protože matice $\mathbf{L}$ má řád $< n$, podle indukčního předpokladu pravá strana první rovnosti není menší než pravá strana druhé rovnosti, tj.

$$\text{nul } \mathbf{L}^k - \text{nul } \mathbf{L}^{k-1} \geq \text{nul } \mathbf{L}^{k+1} - \text{nul } \mathbf{L}^k,$$

čímž je tvrzení 4 dokázáno.

<u>18.5. Upozornění.</u> Podle věty 18.4.2 a 18.4.3 soudíme, že v uspořádané skupině matic

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^r, \dots \tag{119}$$

existuje první matice $\mathbf{A}^r$ taková, že její nulita

$$\gamma_r = \alpha$$

a pak také všechny následující matice mají nulitu rovnou α.

Naproti tomu nulity předcházejících matic (před $\mathbf{A}^r$) rostou, takže je

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r = \alpha = \gamma_{r+1} = \dots .$$

Kimoto platí pro každá tři sousední čísla γ_k, γ_{k+1}, γ_{k+2} vztah (117).

Položme

$$\boxed{\alpha_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \dots, \quad \alpha_r = \gamma_r - \gamma_{r-1}.} \tag{120}$$

Pak nulity matic (119) postupně jsou

$$\alpha_1, \ (\alpha_1 + \alpha_2), \ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ \dots, \ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r) = \alpha.$$

Přitom všechna čísla

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

jsou přirozená a podle (117) splňují vztahy

$$\boxed{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_r > 0.} \tag{121}$$

<u>18.6. Definice charakteristických čísel matice.</u> Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n a nechť $\lambda = a$ je α-násobný (pro $\alpha \geq 1$) kořen charakteri-

stické rovnice matice $\mathbf{A}$, takže $\lambda = 0$ je α-násobný kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} - a\mathbf{E}$. Nechť

$$\alpha_1, \ \alpha_1 + \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha$$

značí nulity matic

$$\mathbf{A} - a\mathbf{E}, \ (\mathbf{A} - a\mathbf{E})^2, \ \ldots, \ (\mathbf{A} - a\mathbf{E})^r.$$

Pak přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ se nazývají charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$, příslušná k jejímu charakteristickému kořenu $\lambda = a$.

PŘÍKLAD 19. Určeme charakteristická čísla příslušná k charakteristickému kořenu $\lambda = 0$ matice $\mathbf{A}$ z příkladu 18. (odst. 15.12.)

Řešení. Charakteristický polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & 0 \end{bmatrix}$$

je $\varphi(\lambda) = \lambda^4$, jak jsme zjistili v příkladu 18. Má proto daná matice čtyřnásobný charakteristický kořen $\lambda = 0$.

Podle výpočtu minorů 3. řádu v uvedeném příkladu jsou pro $\lambda = 0$ tyto minory vesměs rovny nule. Proto matice $\mathbf{A}$ má všechny minory řádu 3 rovny nule. Naproti tomu existují v matici $\mathbf{A}$ nenulové minory řádu 2, např. minor v levém rohu nahoře. Má tedy matice $\mathbf{A}$ hodnost $h_1 = 2$ a její nulita

$$\nu_1 = \alpha_1 = 4 - 2 = 2.$$

Utvořme nyní $\mathbf{A}^2$. Obdržíme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4, & -2, & -2, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ -8, & 4, & 4, & -4 \end{bmatrix}$$

Vidíme, že $\mathbf{A}^2$ má hodnost $h_2 = 1$, takže nulita

$$\nu_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4 - 1 = 3.$$

Odtud dostáváme $\qquad \alpha_2 = 2.$

Konečně se zjistí, že $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, takže její hodnost $h_3 = 0$ a nulita

$$\nu_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4.$$

Proto je $\qquad \alpha_3 = 1.$

Proto k čtyřnásobnému charakteristickému kořenu $\lambda = 0$ matice $\mathbf{A}$ přísluší charakteristická čísla

$$\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = 1.$$

18.7. Věta o minimálním polynomu matice $\mathbf{A}$. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n a nechť

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s,$$

jsou vzájemně různé kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$, přičemž $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ značí násobnosti těchto jednotlivých kořenů.

Nechť charakteristická čísla příslušná ke kořenu:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \text{ jsou } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p_1}; \\ \lambda_2 \text{ jsou } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_s \text{ jsou } \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p_s}. \end{array}$$

Pak polynom

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$

je minimální polynom matice $\mathbf{A}$.

Důkaz. Podle definice charakteristických čísel matice

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1} & \text{má nulitu } \alpha, \\ (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^{p_2} & \text{má nulitu } \beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{E})^{p_s} & \text{má nulitu } \sigma. \end{array}$$

Protože polynomy

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$

jsou nesoudělné, má podle věty 17.9 matice

$$\psi(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^{p_2} \ldots (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{E})^{p_s}$$

nulitu rovnou $\alpha + \beta + \ldots + \sigma = n$,

takže $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

splňuje tedy matice $\mathbf{A}$ rovnici $\psi(\lambda) = 0$.

Nechť $f(\lambda)$ je libovolný polynom a nechť $d(\lambda)$ je největší společný dělitel polynomů $f(\lambda)$, $\psi(\lambda)$. Pak existují takové polynomy

$$f_1(\lambda), \quad \psi_1(\lambda),$$

že je $f_1(\lambda) f(\lambda) + \psi_1(\lambda)\, \psi(\lambda) = d(\lambda)$.

Odtud plyne

$$f_1(\mathbf{A}) f(\mathbf{A}) + \psi_1(\mathbf{A})\, \psi(\mathbf{A}) = d(\mathbf{A}).$$

Protože $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, je

$$f_1(\mathbf{A}) f(\mathbf{A}) = d(\mathbf{A}). \tag{122}$$

Když se nějaký vektor $\mathbf{x}$ lineární substitucí o matici $f(\mathbf{A})$ transformuje v nulový vektor $\mathbf{0}$, takže

$$f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

podle (122) platí

$$d(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Proto

$$\text{nul } f(\mathbf{A}) \leq \text{nul } d(\mathbf{A}).$$

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $f(\lambda)$, při vhodném polynomu $d_1(\lambda)$ máme

$$d_1(\lambda)d(\lambda) = f(\lambda), \tag{123}$$

takže

$$d_1(\mathbf{A})d(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}).$$

Když pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ platí

$$d(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

pak je

$$d_1(\mathbf{A})\,[d(\mathbf{A})\mathbf{x}] = f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Odtud plyne

$$\text{nul } d(\mathbf{A}) \leq \text{nul } f(\mathbf{A}),$$

takže vzhledem k hořejšímu výsledku dostáváme

$$\text{nul } f(\mathbf{A}) = \text{nul } d(\mathbf{A}). \tag{124}$$

Předpokládejme nyní, že $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, takže

$$\text{nul } f(\mathbf{A}) = n = \text{nul } d(\mathbf{A}).$$

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $\psi(\lambda)$, při vhodném $q(\lambda)$ máme

$$\psi(\lambda) = q(\lambda)d(\lambda).$$

Je-li $d(\lambda)$ nižšího stupně než $\psi(\lambda)$, je

$$\text{nul } d(\mathbf{A}) < n.$$

Polynom $d(\lambda)$ je pak totiž součinem polynomů

$$(\lambda - \lambda_1)^{c_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{c_2},\ \dots,\ (\lambda - \lambda_s)^{c_s},$$

kde $0 \leq c_1 \leq p_1$, $0 \leq c_2 \leq p_2$, …, $0 \leq c_s \leq p_s$. Podle 17.9 tedy je

$$\text{nul } d(\mathbf{A}) \leq c_1 + c_2 + \dots + c_s \leq p_1 + p_2 + \dots + p_s = n.$$

Proto

$$\psi(\lambda) = c.d(\lambda), \text{ kde } c \neq 0 \text{ je konstanta.}$$

Z (123) plyne

$$f(\lambda) = \frac{1}{c}\, d_1(\lambda)\ \psi(\lambda).$$

Vychází tedy, že každý polynom $f(\lambda)$, pro nějž $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, je dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$. Zejména je tedy minimální polynom dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$, a tedy $\psi(\lambda)$ je minimální polynom matice $\mathbf{A}$.

19. SOUSTAVA NORMÁLNÍCH VEKTORŮ

19.1. Definice vektoru řádu k. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n. Vektor $\mathbf{x}$, který se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^k$ transformuje v nulový vektor $\mathbf{0}$, kdežto lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^{k-1}$ v nenulový vektor, přičemž $k \geq 1$, nazýváme vektor řádu k.

Pro vektor $\mathbf{x}$ řádu k tedy platí (pro $k \geq 1$) vztahy

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

19.2. Úmluva. O matici $\mathbf{A}$ řádu n budeme předpokládat, že její charakteristický kořen $\lambda = 0$ je α-násobný, kde $\alpha \geq 1$, a že

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r > 0$$

jsou charakteristická čísla příslušná ke kořenu $\lambda = 0$.

Jak víme, mají matice

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^r$$

nulity

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \alpha,$$

přičemž všechny další mocniny matice $\mathbf{A}$ mají stále nulitu α.

V dalších úvahách opět položíme

$$\text{nul } \mathbf{A}^k = \gamma_k,$$

přičemž pro $1 \leq k \leq r$ platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \gamma_k.$$

19.3. Věta. Nechť matice $\mathbf{A}$ splňuje předpoklady odst. 19.2. Pak je-li $1 \leq k \leq r$, existuje aspoň α_k vektorů

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_k},$$

které se vyznačují tím, že vektory:

(1) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_k}$ jsou řádu k,

(2) $\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_{\alpha_k}$ jsou řádu $k-1$,

....

(k) $\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_{\alpha_k}$ jsou řádu 1,

přičemž všechny uvedené vektory jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Protože $\gamma_k = \text{nul } \mathbf{A}^k$, existuje γ_k nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^k$ transformují v nulový vektor, a to vektory

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\gamma_k} \tag{125}$$

Označme pro $m = 1, 2, \ldots, \gamma_k$ vektory

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m^1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_m^1 = \mathbf{x}_m^2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_m^k = \mathbf{x}_m^{k+1}, \tag{126}$$

takže je

$$\mathbf{x}_m^1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_m,$$
$$\mathbf{x}_m^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_m, \tag{126*}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m^{k-1} = A^{k-1} x_m,$$
$$x_m^k = A^k x_m = 0.$$

Vezměme v úvahu vektory $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_{\gamma_k}^{k-1}$ (127)

Jsou-li tyto vektory vesměs nulové, plyne z předposlední rovnosti (126*), že se vektory (125) transformují v nulové vektory lineární substitucí o matici A^{k-1}. Tato matice má nulitu rovnou γ_{k-1}, takže největší počet nezávislých vektorů, které transformací o matici A^{k-1} přejdou v nulový vektor, je roven γ_{k-1}. Protože $\gamma_k > \gamma_{k-1}$, došli jsme ke sporu. Odtud soudíme, že mezi vektory (127) je aspoň jeden nenulový.

Nechť $h (\geqq 1)$ značí největší počet vektorů (127), které jsou nezávislé, a nechť jsou označeny tak, že jsou to právě vektory

$$x_1^{k-1}, \ldots, x_h^{k-1}. \tag{128}$$

Pak každý vektor (127) je lineární kombinací vektorů (128), takže je

$$x_m^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} x_\nu^{k-1}$$

neboli

$$A^{k-1} x_m = \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} A^{k-1} x_\nu ,$$

kde $a_{m\nu}$ jsou vhodné konstanty. Poslední rovnost můžeme psát ve tvaru

$$A^{k-1} \left[x_m - \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} x_\nu \right] = 0 .$$

Odtud vidíme, že všechny vektory

$$x_m - \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} x_\nu$$

jsou lineárními kombinacemi vhodných, pro všechny vektory týchž, nezávislých vektorů v počtu γ_{k-1}, neboť nul $A^{k-1} = \gamma_{k-1}$. Odtud pak plyne dále, že všechny vektory (125) jsou lineárními kombinacemi těchto nezávislých vektorů (v počtu γ_{k-1}) a vektorů (128) v počtu h, tedy celkem $h + \gamma_{k-1}$ vektorů. Protože vektory (125) jsou nezávislé a je jich γ_k, máme

$$\gamma_k \leqq \gamma_{k-1} + h$$

neboli

$$h \geqq \gamma_k - \gamma_{k-1} = \alpha_k.$$

Tím jsme zjistili, že vektory

$$x_1^{k-1}, \ldots, x_{\alpha_k}^{k-1} \tag{129}$$

jsou lineárně nezávislé.

Nyní ukážeme, že pro $\mu = 0,1,\dots,k-1$ představují vektory
$$A^{\mu}x_1,\ A^{\mu}x_2,\ \dots,\ A^{\mu}x_{\alpha_k}$$
vektory řádu $k-\mu$.

Nuže, pro $\beta = 1,2,\dots,\alpha_k$ platí vztahy
$$A^{k-\mu}(A^{\mu}x_{\beta}) = A^k x_{\beta} = \mathbf{0},$$
$$A^{k-\mu-1}(A^{\mu}x_{\beta}) = A^{k-1}x_{\beta} = x_{\beta}^{k-1} \neq \mathbf{0},$$
čímž je tvrzení dokázáno.

Zbývá zjistit, že pro $\mu = 0,1,\dots,k-1$ a pro $\beta = 1,2,\dots,\alpha_k$ jsou nezávislé všechny vektory
$$A^{\mu}x_{\beta}.$$
V opačném případě platí relace tvaru
$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta}x_{\beta} + \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{1\beta}Ax_{\beta} + \dots + \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{k-1,\beta}A^{k-1}x_{\beta} = \mathbf{0}, \tag{130}$$
v níž všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ nejsou nulové. Složením rovnosti (130) s maticí A^{k-1} obdržíme
$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta}x_{\beta} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
odkud plyne $a_{0\beta} = 0$ vzhledem k tomu, že vektory (125) jsou nezávislé. Podobně složením s maticí A^{k-2} obdržíme
$$a_{1\beta} = 0, \text{ atd.},$$
takže v relaci (130) jsou všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ nulové. Tím docházíme ke sporu, čímž je důkaz proveden.

19.4. Nechť matice A splňuje předpoklady odst. 19.2. Pak existuje celkem $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ vektorů
$$x_1^1,\ \dots,\ x_{\alpha_r}^1;\ x_1^2,\ \dots,\ x_{\alpha_{r-1}}^2;\ \dots,\ x_1^r,\ \dots,\ x_{\alpha_1}^r \tag{131}$$
s těmito vlastnostmi:

1. Vektory $x_1^1, \dots, x_{\alpha_r}^1$ jsou řádu r,
$x_1^2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}^2$ jsou řádu $r-1$,
....
$x_1^r, \dots, x_{\alpha_1}^r$ jsou řádu 1;

2. Pro $k = 1,2,\dots,r-1$ platí
$$Ax_1^k = x_1^{k+1},\ \dots\ Ax_{\alpha_{r-k+1}}^k = x_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1}.$$

3. Vektory (131) jsou lineárně nezávislé.

Poznamenejme, že soustava α vektorů (131) o uvedených vlastnostech se nazývá soustavou normálních vektorů, příslušnou k α-násobnému charakteristickému kořenu $\lambda = 0$ matice $\mathbf{A}$.

Důkaz. (Úplnou indukcí.) Je-li $r = 1$, je věta správná podle předcházející věty 19.3. Budiž tedy $r \geq 2$. Nechť $k = 1,2,\ldots,r-1$ a předpokládejme, že existují vektory

$$x_1^1, \ldots, x_{\alpha_r}^1 \; ; \; \ldots\ldots\ldots ; \; x_1^k, \ldots, x_{\alpha_{r-k+1}}^k , \tag{132}$$

které mají tyto vlastnosti:

1. vektory $x_1^1, \ldots, x_{\alpha_r}^1$ jsou řádu r,

   ....

   vektory $x_1^k, \ldots, x_{\alpha_{r-k+1}}^k$ jsou řádu $r-k+1$;

2. Pro $1 \leq \mu \leq k-1$ platí

$$\mathbf{A}x_1^\mu = x_1^{\mu+1}, \ldots, \mathbf{A}x_{\alpha_{r-\mu+1}}^\mu = x_{\alpha_{r-\mu+1}}^{\mu+1}$$

3. Vektory

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}x_1^k, \ldots, \mathbf{A}x_{\alpha_{r-k+1}}^k & \text{jsou řádu } r-k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{A}^{r-k}x_1^k, \ldots, \mathbf{A}^{r-k}x_{\alpha_{r-k+1}}^k & \text{jsou řádu } 1 \end{array}\right\} \tag{133}$$

4. Všechny vektory (132) a (133) jsou nezávislé.

Tento předpoklad je splněn pro $k=1$, jak plyne z věty 19.3, píšeme-li v ní r místo k. Ukážeme, že pak existují další vektory

$$x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_{r-k}}^{k+1} \tag{134}$$

takové, že o vektorech (132) a (134) platí hořejší výroky 1 až 4, v nichž místo k píšeme $k+1$. Tím bude důkaz věty 19.4 proveden (pro $k = r$).

Nuže, označme

$$\mathbf{A}x_1^k = x_1^{k+1}, \ldots, \mathbf{A}x_{\alpha_{r-k+1}}^k = x_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1} , \tag{135}$$

takže vzorce (132) platí i pro $\mu = k$. Protože

$$\text{nul } \mathbf{A}^{r-k} = \gamma_{r-k} ,$$

existuje γ_{r-k} nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^{r-k}$ transformují v nulový vektor. Podle předpokladů 3 a 4 jsou vektory

$$x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1}$$

řádu $r-k$, a tedy se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^{r-k}$ transformují v nulový vektor, a jsou nezávislé. Existují tudíž další vektory

$$x^{k+1}_{\alpha_{r-k+1}+1}, \dots, x^{k+1}_{\gamma_{r-k}}$$

v počtu $\gamma_{r-k} - \alpha_{r-k+1}$ takové, že se všechny vektory

$$x^{k+1}_1, \dots, x^{k+1}_{\gamma_{r-k}} \tag{136}$$

transformují lineární substitucí o matici A^{r-k} v nulový vektor a jsou lineárně nezávislé.

Pro m = 1,2,..., γ_{r-k} označme vektory

$$x^{k+2}_m = A x^{k+1}_m, \dots, x^r_m = A x^{r-1}_m ,$$

takže

$$\left.\begin{aligned} x^{k+2}_m &= A x^{k+1}_m , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x^r_m &= A^{r-k-1} x^{k+1}_m , \\ 0 &= A^{r-k} x^{k+1}_m . \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Vezměme nyní v úvahu vektory $x^r_1, \dots, x^r_{\gamma_{r-k}}$ (138)

Mezi těmito vektory je aspoň α_{r-k+1} nezávislých vektorů, totiž vektory řádu 1, a to (jak plyne z předpokladu 4) vektory

$$x^r_1, \dots, x^r_{\alpha_{r-k+1}} .$$

Podobně jako jsme v důkazu věty 19.3 zjistili o vektorech (podle tamějšího označení) (127), zjistíme i nyní, že mezi vektory (138) je aspoň h nezávislých vektorů, kde

$$h \geq \gamma_{r-k} - \gamma_{r-k-1} = \alpha_{r-k}.$$

Při vhodném označení jsou tedy nezávislé právě vektory

$$x^r_1, \dots x^r_{\alpha_{r-k}} .$$

Nyní ukážeme, že pro μ = 0,1,...,r-k-1 jsou vektory

$$A^{\mu} x^{k+1}_1, \dots, A^{\mu} x^{k+1}_{\alpha_{r-k}}$$

vektory řádu k. Pro β = 1,2,..., α_{r-k} platí totiž vztahy

$$A^{r-k-\mu}\left(A^{\mu} x^{k+1}_{\beta}\right) = A^{r-k} x^{k+1}_{\beta} = 0 ,$$

$$A^{r-k-\mu-1}\left(A^{\mu} x^{k+1}_{\beta}\right) = A^{r-k-1} x^{k+1}_{\beta} = x^{k+1}_{\beta} \neq 0 .$$

Zbývá tedy zjistit, že všechny vektory

$$
\begin{array}{l}
x_1^1, \ldots\ldots, x_{\alpha_r}^1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{k+1}, \ldots\ldots, x_{\alpha_{r-k}}^{k+1}, \\
A x_1^{k+1}, \ldots\ldots, A x_{\alpha_{r-k}}^{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A^{r-k-1} x_1^{k+1}, \ldots, A^{r-k-1} x_{\alpha_{r-k}}
\end{array}
$$

jsou nezávislé. V opačném případě totiž platí relace tvaru

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_r} a_{1\beta}\, x_\beta^1 + \ldots + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+1,\nu}\, x_\nu^{k+1} + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+2,\nu}\, A x_\nu^{k+1} + \ldots + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{r\nu} A^{r-k-1} x_\nu^{k+1}$$

přičemž všechny koeficienty $a_{1\beta}, \ldots, a_{r\nu}$ nejsou rovny 0. Složíme-li však tuto rovnost postupně s maticemi A^{r-1}, A^{r-2}, ..., A^0, zjistíme, že všechny koeficienty $a_{1\beta}$, ... $a_{r\nu}$ jsou rovny nule. Tím jsme dospěli ke sporu, a důkaz věty je ukončen.

19.5. Definice. Nechť A je libovolná matice řádu n, nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny vzájemně různé charakteristické kořeny matice A a nechť α, β, ..., σ značí násobnosti těchto kořenů, takže

$$\alpha + \beta + \ldots + \sigma = n.$$

Přitom kořen $\lambda = 0$ charakteristické rovnice matice

$$
\begin{array}{ll}
A - \lambda_1 E & \text{je } \alpha\text{-násobný}, \\
A - \lambda_2 E & \text{je } \beta\text{-násobný}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
A - \lambda_s E & \text{je } \sigma\text{-násobný}.
\end{array}
$$

Nechť soustava normálních vektorů příslušných ke kořenu $\lambda = 0$ je u matice

$$
\left.
\begin{array}{ll}
A - \lambda_1 E & \text{tvaru } a_1, a_2, \ldots, a_\alpha ; \\
A - \lambda_2 E & \text{tvaru } b_1, b_2, \ldots, b_\beta ; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A - \lambda_s E & \text{tvaru } s_1, s_2, \ldots, s_\sigma .
\end{array}
\right\} \qquad (139)
$$

Pak soustava všech vektorů (139) v počtu n je tzv. soustava normálních vektorů matice A.

19.6. Věta. Vektory soustavy (139) jsou lineárně nezávislé, takže čtvercová matice řádu n tvaru

$$[\, a_1, \ldots, a_\alpha, \quad b_1, \ldots, b_\beta, \quad \ldots, s_1, \ldots, s_\sigma \,]$$

je regulární.

Důkaz. Ve skupině vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\alpha$ nechť jsou vektory uspořádány tak, že vektory vyššího řádu předcházejí vektory nižšího řádu. Podobně tomu budiž v ostatních skupinách soustavy (139).

Předpokládejme, že vektory (139) nejsou lineárně nezávislé, takže existuje lineární relace

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu \mathbf{a}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu \mathbf{b}_\nu + \dots + \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi \mathbf{s}_\pi = \mathbf{0} , \tag{140}$$

přičemž některá z čísel m_μ , n_ν , ... p_π nejsou nuly. Označme tuto relaci stručně symbolem

$$\{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta, \dots, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_\sigma \} = \mathbf{0} . \tag{140*}$$

Když vektor na levé straně a na pravé straně v relaci (140) složíme s maticí $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}$, obdržíme

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{a}_\mu] + \dots + \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{s}_\pi] = \mathbf{0} . \tag{141}$$

Když vektory $\mathbf{a}_1 , \dots, \mathbf{a}_\alpha$ označíme tak jako v (131), vidíme, že vzhledem k relaci (126) je

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{a}_\mu] = m_1 \mathbf{x}_1^2 + \dots + m_{\alpha_r} \mathbf{x}_{\alpha_r} + \dots + m_{\alpha-\alpha_1} \mathbf{x}_{\alpha_2}^{r} =$$

$$= m_1 \mathbf{a}_{\alpha_r+1} + m_2 \mathbf{a}_{\alpha_r+2} + \dots + m_{\alpha-\alpha_1} \mathbf{a}_{\alpha-\alpha_1-\alpha_2} .$$

Dále např. je

$$\begin{aligned} n_\nu [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{b}_\nu] &= n_\nu [(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) + (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{E}] \mathbf{b}_\nu = \\ &= n_\nu (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{b}_\nu + n_\nu (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{b}_\nu , \end{aligned} \tag{142}$$

takže

$$\sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{b}_\nu] = (\lambda_2 - \lambda_1) [n_1 \mathbf{b}_1 + \dots + n_\beta \mathbf{b}_\beta] +$$

$$+ n_1 \mathbf{b}_{\beta_{r_2}+1} + \dots$$

Je tedy relace (141) tvaru

$$\{ \mathbf{a}_{\alpha_r+1}, \dots, \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta, \dots, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_\sigma \} = \mathbf{0} .$$

Případnými dalšími složeními s maticí $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}$ a pak s maticemi $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}$, ..., $\mathbf{A} - \lambda_{s-1} \mathbf{E}$ dojdeme konečně k relaci

$$\{ \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_\sigma \} = \mathbf{0} . \tag{143}$$

Nejsou-li všechna čísla $p_1, \dots, p_\sigma$ nuly, (což můžeme předpokládat, neboť jinak bychom mohli vynechat poslední součet ve vztahu (140) a usuzovat pak o předposledním), není relace (143) identická.

Vskutku, je-li např. $p_1 \neq 0$, podobně jako v (142) platí

$$p_1 [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{s}_1] = p_1 [(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{E}) + (\lambda_s - \lambda_1) \mathbf{E}] \mathbf{s}_1 =$$

$$= p_1 (\lambda_s - \lambda_1) \mathbf{s}_1 + p_1 \mathbf{s}_{\sigma} + \dots,$$

kde $\sigma > 1$. Je tedy koeficient při $\mathbf{s}_1$ v relaci (141)

$$p_1 (\lambda_s - \lambda_1)$$

a podobně v relaci (143) je p_1-krát součin vhodných mocnin výrazů $(\lambda_i - \lambda_k)$ pro $i \neq k$. Je tedy tento koeficient různý od nuly, a tedy relace (143) není identická.

To je však nemožné, neboť podle významu jsou vektory $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{\sigma}$ lineárně nezávislé. Tím je věta dokázána.

20. PODOBNÉ MATICE

20.1. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n. Matice $\mathbf{B}$ téhož řádu n se nazývá podobná s maticí $\mathbf{A}$, existuje-li regulární matice $\mathbf{Q}$ řádu n taková, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} .$$

20.2. Věta. Nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou čtvercové řádu n. Pak platí tyto zákony:

1. Zákon reflexivnosti: Matice $\mathbf{A}$ je podobná s maticí $\mathbf{A}$.
2. Zákon symetrie: Je-li $\mathbf{A}$ podobná s $\mathbf{B}$, je $\mathbf{B}$ podobná s $\mathbf{A}$.
3. Zákon transitivnosti: Je-li $\mathbf{A}$ podobná s $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ podobná s $\mathbf{C}$, pak $\mathbf{A}$ je podobná s $\mathbf{C}$.

Důkaz. 1. První zákon je zřejmý (pro $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$).

2. Předně je $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$; odtud máme

$$\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{A} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{A} ,$$

takže matice $\mathbf{Q}^{-1}$ má nyní tutéž úlohu jako dříve matice $\mathbf{Q}$.

3. V třetím případě z relací

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} , \qquad \mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}$$

plyne $$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{A} (\mathbf{Q} \mathbf{P}) = (\mathbf{Q}\mathbf{P})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{Q}\mathbf{P}),$$

což dokazuje tvrzení 3.

20.3. POZNÁMKY. 1. Protože vztah mezi prvky dané množiny, který splňuje zákon reflexivní, symetrický a transitivní, se nazývá ekvivalence, z předešlé věty plyne, že podobnost matic téhož řádu n je ekvivalencí.

2. Vzhledem k zákonu symetrie nemusíme u podobných matic rozeznávat jejich pořadí a můžeme stručně mluvit o podobných maticích $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

20.4. Věta. Dvě podobné matice mají stejné:

1. charakteristické kořeny;
2. charakteristická čísla, příslušná k jednotlivým kořenům;
3. minimální polynomy.

Důkaz. 1. První tvrzení bylo dokázáno ve větě 17.12.1.

2. Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ podobné matice, takže je např.

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q},$$

a je-li $\lambda = a$ kořen jejich charakteristických rovnic, pak

$$\mathbf{B} - a\mathbf{E} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\mathbf{E})\mathbf{Q}$$

a odtud podle 17.12.2 plyne

$$(\mathbf{B} - a\mathbf{E})^k = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^k\mathbf{Q}.$$

Protože matice $\mathbf{Q}$ je regulární, mají matice $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^k$, $(\mathbf{B} - a\mathbf{E})^k$ stejnou nulitu (srv. větu 17.10 a poznámku 17.11) pro každé přirozené k. Jsou tedy charakteristická čísla příslušná k témuž kořenu $\underline{a}$ podobných matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejná.

3. Třetí tvrzení plyne z předešlých dvou tvrzení a z věty 18.7.

20.5. Věta. Nechť matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou podobné, takže $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$. Nechť $\lambda = a$ je α- násobný (pro $\alpha > 0$) charakteristický kořen matice $\mathbf{B}$ (a ovšem též $\mathbf{A}$). Nechť

$$\mathbf{y}_1^1, \dots, \mathbf{y}_{\alpha_r}^1; \quad \mathbf{y}_1^2, \dots, \mathbf{y}_{\alpha_{r-1}}^2; \dots; \mathbf{y}_1^r \dots, \mathbf{y}_{\alpha_1}^r \tag{143}$$

je soustava normálních vektorů, příslušných k α-násobnému kořenu $\lambda = 0$ matice $\mathbf{B} - a\mathbf{E}$.

Pak

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}_1^1, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_r}^1, \dots\dots, \mathbf{Q}\mathbf{y}_1^r, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_1}^r \tag{144}$$

je soustava normálních vektorů, příslušných k α-násobnému kořenu $\lambda = 0$ matice $\mathbf{A} - a\mathbf{E}$.

Důkaz. Pro zjednodušení pišme

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{Q}\mathbf{y}_1^1, \dots \mathbf{x}_{\alpha_r}^1 = \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_r}, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r = \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_1}^r.$$

Podle předpokladu jsou pro matici $\mathbf{B} - a\,\mathbf{E}$ vektory

$$\mathbf{y}_1^1 , \dots, \mathbf{y}_{\alpha_r}^1 \qquad \text{řádu } r,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{y}_1^r , \dots, \mathbf{y}_{\alpha_1}^r \qquad \text{řádu } 1.$$

Přitom platí

$$(\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^1 = \mathbf{y}_1^2 , \dots, (\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_r}^1 = \mathbf{y}_{\alpha_r}^2,$$
$$(\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^2 = \mathbf{y}_1^3 , \dots, (\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_{r-1}}^2 = \mathbf{y}_{\alpha_{r-1}}^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^{r-1} = \mathbf{y}_1^r , \dots, (\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_2}^{r-1} = \mathbf{y}_{\alpha_2}^r .$$

Mimo to jsou vektory (143) lineárně nezávislé.

Z předpokladu, že pro $n = 1,2,\dots,\alpha_r$ jsou vektory $\mathbf{y}_n^1$ řádu r, plyne

$$\mathbf{0} = (\mathbf{B} - a\mathbf{E})^r\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\,\mathbf{E})^r\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\,\mathbf{E})^r\,\mathbf{x}_n^1 ,$$

$$\mathbf{0} \neq (\mathbf{B} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\mathbf{Q}\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{x}_n^1 .$$

Odtud složením s maticí $\mathbf{Q}$ plyne

$$(\mathbf{A} - a\,\mathbf{E})^r\,\mathbf{x}_n^1 = \mathbf{0} , \qquad (\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{x}_n^1 \neq \mathbf{0} .$$

Jsou tedy vektory $\mathbf{x}_1^1 , \dots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1$ řádu r. Podobně zjistíme, že vektory

$$\mathbf{x}_1^2 , \dots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-1}}^2 \qquad \text{jsou řádu } r-1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{x}_1^r , \dots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r \qquad \text{jsou řádu } 1.$$

Dále pro $k = 1,2,\dots,r-1$, kdežto $n = 1,2,\dots, \alpha_{r-k+1}$ z předpokladu

$$(\mathbf{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_n^k = \mathbf{y}_n^{k+1} \qquad \text{neboli} \qquad \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - a\mathbf{E})\mathbf{Q}\,\mathbf{y}_n^k = \mathbf{y}_n^{k+1}$$

plyne vztah

$$(\mathbf{A} - a\mathbf{E})\,\mathbf{x}_n^k = \mathbf{Q}\,\mathbf{y}_n^{k+1} = \mathbf{x}_n^{k+1},$$

tj.

$$(\mathbf{A} - a\mathbf{E})\,\mathbf{x}_n^k = \mathbf{x}_n^{k+1}.$$

Proto zbývá dokázat, že jsou lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1 \; ; \; \mathbf{x}_1^2 , \dots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-1}}^2 \; ; \dots, \mathbf{x}_1^r , \dots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r .$$

Předpokládejme naopak, že jsou závislé, takže existuje relace

$$m_1\mathbf{x}_1^1 + m_2\mathbf{x}_2^1 + \dots + m_k\mathbf{x}_{\alpha_1}^r = \mathbf{0} ,$$

kde aspoň jedno z čísel m_n je různé od nuly.

Pišme předešlou relaci stručněji ve tvaru

$$\sum m_n\,\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Odtud je

$$\sum m_n\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

takže

$$\mathbf{Q} \sum m_n \mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

což značí, že se vektor $\sum m_n \mathbf{y}_n$ transformuje lineární substitucí o matici $\mathbf{Q}$ v nulový vektor. Odtud složením s maticí $\mathbf{Q}^{-1}$ dostaneme

$$\sum m_n \mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Protože m_n nejsou všechna rovna nule, plyne z předešlého vztahu, že vektory $\mathbf{y}_n$ jsou lineárně závislé. To však je proti předpokladu, a důkaz je hotov.

<u>20.6. Věta.</u> Nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou podobné, takže $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.
Nechť

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\alpha \,;\; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta \,;\; \dots, \; \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_\sigma \tag{145}$$

je soustava normálních vektorů pro matici $\mathbf{B}$.

Pak soustava normálních vektorů pro matici $\mathbf{A}$ je tvaru

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{a}_\alpha \,;\; \mathbf{Q}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{b}_\beta \,;\; \dots ; \; \mathbf{Q}\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{s}_\sigma .$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem předešlé věty.

<u>20.7. Věta</u> (obrácení věty 20.4.1 a 2). Když dvě matice téhož řádu n mají stejné charakteristické kořeny i stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům, pak jsou nutně podobné.

Důkaz. Předně si všimněme, že je-li $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ a je-li

$$\mathbf{a}_1^+, \dots, \mathbf{a}_\alpha^+ \,;\; \mathbf{b}_1^+, \dots, \mathbf{b}_\beta^+ \,;\; \dots ; \; \mathbf{s}_1^+, \dots, \mathbf{s}_\sigma^+ \tag{146}$$

soustava normálních vektorů pro matici $\mathbf{B}$, pak podle věty 20.6 je soustava těchto vektorů pro matici $\mathbf{A}$ tvaru

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{a}_1^+, \dots, \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{Q}\mathbf{a}_\alpha^+, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{b}_1^+, \dots, \quad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{Q}\mathbf{b}_\beta^+ ; \dots, \quad \mathbf{s}_\sigma = \mathbf{Q}\mathbf{s}_\sigma^+ .$$

Přitom matice

$$\mathbf{M} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{s}_\sigma] = [\mathbf{Q}\mathbf{a}_1^+, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{b}_1^+, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{s}_\sigma^+] =$$

$$= \mathbf{Q}[\mathbf{a}_1^+, \dots, \mathbf{a}_\alpha^+, \mathbf{b}_1^+, \dots, \mathbf{b}_\beta^+, \dots, \mathbf{s}_1^+, \dots, \mathbf{s}_\sigma^+] = \mathbf{Q}\mathbf{P}.$$

Podle věty 19.6 je matice

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1^+, \dots, \mathbf{a}_\alpha^+, \dots, \mathbf{s}_\sigma^+] \tag{147}$$

regulární, takže

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{P}^{-1} . \tag{148}$$

Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu věty.

Předpokládejme, že obě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ téhož řádu n mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla, příslušná k jednotlivým kořenům

nům. Nechť (145) je soustava normálních vektorů pro matici $\mathbf{B}$, kdežto (146) je soustava normálních vektorů pro matici $\mathbf{A}$, přičemž vždy k témuž charakteristickému kořenu patří skupiny vektorů označené stejným písmenem. Např. ke kořenu $\lambda = d$ vektory

$$a_1^+, \ldots, a_\kappa^+ ; \qquad a_1, \ldots, a_\kappa ; \text{ atd.} \tag{149}$$

Protože matice (147) je regulární, určeme matici $\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{P}^{-1}$, takže

$$a_1 = \mathbf{Q} a_1^+, \ldots, a_\kappa = \mathbf{Q} a_\kappa^+, \quad b_1 = \mathbf{Q} b_1^+, \ldots, \quad s_\sigma = \mathbf{Q} s_\sigma^+ \tag{150}$$

Označme pro okamžik např. písmenem d některý charakteristický kořen (obou matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$). K tomuto kořenu patří skupina vektorů (149). Označme tyto vektory postupně znaky

$$\tilde{x}_1^1, \ldots, \tilde{x}_{\kappa_r}^1, \ldots, \tilde{x}_1^r, \ldots, \tilde{x}_{\kappa_1}^r \quad \text{pro matici } \mathbf{B},$$

kdežto

$$x_1^1, \ldots, x_{\kappa_r}^1, \ldots, x_1^r ; \ldots, x_{\kappa_1}^r \quad \text{pro matici } \mathbf{A},$$

takže

$$a_1^+ = \tilde{x}_1^1, \ldots, a_\kappa^+ = \tilde{x}_{\kappa_1}^r, \quad a_1 = x_1^1, \ldots, a_\kappa = x_{\kappa_1}^r .$$

Přitom vektory

$$x_1^1, \ldots, x_{\kappa_r}^1$$

jsou řádu r, atd. Podle významu těchto vektorů pro $n = 1, 2, \ldots, \kappa_1$ platí

$$(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\, x_n^r = \mathbf{0}$$

a odtud

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^r = \mathbf{0} .$$

Podobně je

$$(\mathbf{B} - d\mathbf{E})\, \tilde{x}_n^r = \mathbf{0} ,$$

takže

$$(\mathbf{B} - d\mathbf{E})\, \tilde{x}_n^r = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^r .$$

Odtud přičtením vektoru $d\, x_n^r$ na obě strany dostaneme

$$\mathbf{B}\, \tilde{x}_n^r = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^r .$$

Podobně máme

$$(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\, x_n^{r-1} = x_n^r$$

a odtud podle (150) plyne

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^{r-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^r = \tilde{x}_n^r .$$

Podobně

$$(\mathbf{B} - d\mathbf{E})\, \tilde{x}_n^{r-1} = \tilde{x}_n^r$$

Je tedy

$$(\mathbf{B} - d\mathbf{E})\, \tilde{x}_n^{r-1} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - d\mathbf{E})\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^{r-1} .$$

Odtud přičtením vektoru $d\, \tilde{x}_n^{r-1}$ na obě strany plyne

$$\mathbf{B}\, \tilde{x}_n^{r-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\, \tilde{x}_n^{r-1} ,$$

atd. Vidíme tedy, že platí rovnice

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_1^+ = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{a}_1^+, \qquad \mathbf{B}\mathbf{a}_2^+ = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{a}_2^+, \ \ldots, \qquad \mathbf{B}\mathbf{a}_\sigma^+ = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{a}_\sigma^+,$$

takže je

$$\mathbf{B}\mathbf{P} = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{P}. \tag{151}$$

Protože matice $\mathbf{P}$ je regulární, složením předešlé relace (151) s inverzní maticí $\mathbf{P}^{-1}$ obdržíme

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q},$$

čímž je věta dokázána.

21. TRANSFORMACE PÁRŮ MATIC

21.1. Úvodní poznámka. Karl Weierstrass (1815-1897) ve svém proslulém pojednání „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen", (uveřejněném v časopisu „Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften" z r. 1868, str. 310) řešil tento problém:

Jsou dány dva páry čtvercových matic $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$; $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$ téhož řádu n. Jaké jsou nutné a postačující podmínky k tomu, aby existovaly takové regulární matice $\mathbf{H}, \mathbf{K}$ řádu n, že platí vztahy

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{K}, \qquad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K}.$$

Přitom se Weierstrass zabýval případem, že pro některá λ, μ je

$$|\lambda\mathbf{P} + \mu\mathbf{Q}| \neq 0.$$

Jeho řešení spočívá na pojmu tzv. elementárních dělitelů, o nichž se zmíníme v kap. 22. Z předcházející teorie, kterou vybudoval náš matematik Eduard Weyr (1852-1894) ve své práci „O theorii forem bilineárných (Praha 1889), plyne snadno jiné řešení, které se také vztahuje na případ, kdy pro některá λ, μ je $|\lambda\mathbf{P} + \mu\mathbf{Q}| \neq 0$. Toto řešení je obsaženo v následujících dvou větách, z nichž v první předpokládáme regulárnost matice $\mathbf{P}$.

21.2. Věta. Nechť $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$; $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$ jsou dva páry čtvercových matic téhož řádu n, přičemž $|\mathbf{P}| \neq 0$.

Pak existují regulární matice $\mathbf{H}, \mathbf{K}$ řádu n, pro něž platí

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{K}, \qquad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K} \tag{152}$$

právě tehdy, je-li $|\mathbf{P}_1| \neq 0$ a obě matice $\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}$ mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz. Existují-li regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, které splňují vztahy (152), zřejmě je

$$|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{H}|.|\mathbf{P}|.|\mathbf{K}| \neq 0,$$

takže matice $\mathbf{P}_1$ je regulární. Mimoto platí

$$\mathbf{K} = (\mathbf{H}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1,$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1})\mathbf{P}_1,$$

takže

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{H}^{-1}. \tag{153}$$

Jsou tedy matice $\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}$, $\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$ podobné.

Jsou-li naopak matice $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$ regulární a jsou-li obě matice

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$$

podobné, takže existuje taková regulární matice $\mathbf{H}$, že platí (153), můžeme určit matici $\mathbf{K}$ vzorcem

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1.$$

Pak máme

$$\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1) = \mathbf{H}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1})\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1,$$

$$\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K} = (\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1})\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1.$$

Proto existují regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, které splňují vztahy (152). Odtud plyne tvrzení věty 21.2 už bez obtíží.

21.3. Věta. Nechť $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$; $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_1$ jsou dva páry takových čtvercových matic téhož řádu n, že je

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_1| = 0,$$

avšak při vhodných λ_0, μ_0 je

$$|\lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q}| \neq 0.$$

Pak existují takové regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ řádu n, že platí vztahy (152), právě když obě matice

$$\mathbf{Q}(\lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q})^{-1}, \qquad \mathbf{Q}_1(\lambda_0\mathbf{P}_1 + \mu_0\mathbf{Q}_1)^{-1}$$

mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz. Z předpokladu plyne, že matice

$$\mathbf{R} = \lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q}$$

je regulární, takže $|\mathbf{R}| \neq 0$, přičemž zřejmě je $\lambda_0\mu_0 \neq 0$. Existují-li regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ takové, že platí (152), je

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_0\mathbf{P}_1 + \mu_0\mathbf{Q}_1 = \lambda_0\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{K} + \mu_0\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K} = \mathbf{H}(\lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q})\mathbf{K},$$

takže

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{K},$$

přičemž

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K}.$$

Proto $|R_1| = |H||R||K| \neq 0$ a matice

$$QR^{-1}\ ,\ Q_1R_1^{-1}$$

jsou podobné, jak plyne z předešlé věty 21.2.

Když naopak $|R_1| \neq 0$ a jsou-li $QR^{-1}, Q_1R_1^{-1}$ podobné, existují takové regulární čtvercové matice H, K řádu n, že

$$R_1 = HRK\ ,\ Q_1 = HQK,$$

takže

$$\lambda_0 P_1 + \mu_0 Q_1 = H(\lambda_0 P + \mu_0 Q)K = \lambda_0 HPK + \mu_0 HQK,$$
$$\mu_0 Q_1 = \mu_0 HQK\ .$$

Odčítáním obou rovnic obdržíme

$$\lambda_0 P_1 = \lambda_0 HPK\ .$$

Současně je

$$Q_1 = HQK.$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda_0 \neq 0$, plynou odtud vztahy (152).

22. PŘEHLED WEIERSTRASSOVY TEORIE ELEMENTÁRNÍCH DĚLITELŮ

Tato kapitola obsahuje stručný přehled Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů. Věty uvádíme většinou bez důkazů.

22.1. Definice svazku matic. Nechť A, B značí čtvercové matice téhož řádu n, přičemž A je regulární.

Množina čtvercových matic řádu n tvaru

$$\lambda A + B\ , \tag{154}$$

kde λ značí libovolné číslo, se nazývá regulární svazek matic určený maticemi A, B.

22.2. Zavedení pojmu elementárních dělitelů svazku matic.

1. Nechť D_k značí (pro k = 1,2,...,n) největšího společného dělitele všech minorů k-tého řádu v determinantu $|\lambda A + B|$.

Je tedy D_k polynom $F(\lambda)$ stupně $m \geqq 0$. Zvláště pak $D_n = |\lambda A + B|$ je polynom stupně n, neboť $|A| \neq 0$.

Snadno se zjistí, že (pro k = 1,2,...,n-1) je polynom D_{k+1} dělitelný polynom D_k , takže

$$\frac{D_{k+1}}{D_k} = f(\lambda) \qquad \text{je polynom proměnné } \lambda\ .$$

2. Zvolme libovolný polynom $\lambda - a$, zvaný stručně základ. Označme h_k exponent nejvyšší mocniny základu $\lambda - a$, která dělí polynom D_k. To znamená, že když $\lambda - a$ nedělí D_k, pak je $h_k = 0$. Když ale $\lambda - a$ dělí D_k, pak také $(\lambda - a)^{h_k}$ dělí D_k, zatímco $(\lambda - a)^{h_k+1}$ nedělí polynom D_k.

3. <u>Vlastnosti exponentů</u> h_k (pro libovolný základ $\lambda - a$):

a) $$h_k \leqq h_{k+1}, \tag{155}$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $h_{k+1} = 0$.

b) Když pro určité j nastane $h_j = 0$, $h_{j+1} > 0$, pak

$$\begin{gathered} h_1 = h_2 = \ldots = h_j = 0, \\ 0 < h_{j+1} < \ldots < h_n. \end{gathered} \tag{156}$$

4. Položme

$$e_1 = h_1, \quad e_2 = h_2 - h_1, \ \ldots, \quad e_n = h_n - h_{n-1}. \tag{157}$$

Přitom platí: a) $e_k = 0$ jen tehdy, když $h_k = 0$;

b) $e_1 \leqq e_2 \leqq \ldots \leqq e_n$;

c) Když pro určité j platí $e_j = 0$, $e_{j+1} > 0$, pak nutně je

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = e_2 = \ldots = e_j, \\ e_{j+1} > 0, \ e_{j+2} > 0, \ \ldots, \ e_n > 0, \end{array}\right\} \tag{158}$$

přičemž

$$e_{j+1} + e_{j+2} + \ldots + e_n = h_n. \tag{159}$$

5. Jsou-li e_k čísla definována vztahy (157), a platí-li (158), pak polynomy

$$(\lambda - a)^{e_{j+1}}, \quad (\lambda - a)^{e_{j+2}}, \ \ldots, \ (\lambda - a)^{e_n} \tag{160}$$

se nazývají <u>elementární dělitelé determinantu</u> $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$ patřící k základu $\lambda - a$ (popř. elementární dělitelé svazku $\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}$).

<u>22.3. Věta.</u> 1. Elementární dělitelé (160) mohou příslušet jen základu $\lambda - a$, který dělí determinant $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

2. Součin elementárních dělitelů, příslušných k témuž základu $\lambda - a$, je roven nejvyšší mocnině $(\lambda - a)^{h_n}$, která dělí determinant $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

3. Součin všech elementárních dělitelů, příslušných ke všem možným základům, je roven až na multiplikativní konstantu přímo determinantu $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

<u>Důkaz.</u> 1. Když $\lambda - a$ nedělí determinant $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$, pak všechna

$$h_n = h_{n-1} = \ldots = h_1 = 0,$$

a tedy též

$$e_n = e_{n-1} = \ldots = e_1 = 0.$$

2. Druhé tvrzení plyne ze vztahu (159).

3. Třetí tvrzení je důsledkem druhého.

PŘÍKLAD 20. Určeme všechny elementární dělitele daného svazku $\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Řešení. Nechť $a_1 a_2 \neq 0$ a nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_2 \end{bmatrix}.$$

Pak je

$$\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda a_1+b_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda a_1+b_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda a_1+b_1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \lambda a_2+b_2 \end{bmatrix}.$$

Zřejmě je $|\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}| = (\lambda a_1 + b_1)^3(\lambda a_2 + b_2) = a_1^3 a_2 (\lambda + \frac{b_1}{a_1})^3(\lambda + \frac{b_2}{a_2})$.

Předpokládejme, že $(b_2/a_2) \neq (b_1/a_1)$. Pak elementární dělitelé mohou příslušet pouze k dvěma základům, a to $\lambda + b_1/a_1$, $\lambda + b_2/a_2$.

1. Pro základ $\lambda + b_1/a_1$ zřejmě je

$$h_1 = 0,\quad h_2 = 1,\quad h_3 = 2,\quad h_4 = 3,$$
$$e_1 = 0,\quad e_2 = 1,\quad e_3 = 1,\quad e_4 = 1.$$

Příslušní elementární dělitelé jsou tři a jsou vesměs rovny $\lambda + b_1/a_1$.

2. Pro základ $\lambda + b_2/a_2$ zřejmě je

$$h_1 = 0,\quad h_2 = 0,\quad h_3 = 0,\quad h_4 = 1,$$
$$e_1 = 0,\quad e_2 = 0,\quad e_3 = 0,\quad e_4 = 1.$$

Příslušný elementární dělitel je $\lambda + b_2/a_2$.

Součin všech elementárních dělitelů je proroven

$$(\lambda + b_1/a_1)^3(\lambda + b_2/a_2) = \frac{1}{a_2 a_1^3} |\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}|.$$

22.4. Definice. Nechť polynom $\lambda - a$ dělí determinant $|\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ a nechť (pro $k = 1,2,\dots,n$) mají čísla h_k význam uvedený v odst. 22.2.2.

Každý minor k-tého řádu v determiantnu $|\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}|$, dělitelný právě mocninou $(\lambda - a)^{h_k}$, se nazývá regulární minor k-tého řádu vzhledem k základu $\lambda - a$.

22.5. Věta. 1. Každý regulární minor řádu k (pro k = 2,3,...,n) v determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k základu $\lambda - a$ obsahuje aspoň jeden regulární minor řádu k-1 vzhledem k témuž základu $\lambda - a$.

2. Každý regulární minor řádu k-1 v determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k základu $\lambda - a$ je jako minor obsažen v aspoň jednom regulárním minoru řádu k v determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k témuž základu $\lambda - a$.

Na základě uvedených vět se dá dokázat následující věta.

22.6. Weierstrassova věta. Nechť A, B jsou libovolné matice řádu n, z nichž A je regulární. Nechť

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, \quad (\lambda - a_2)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda - a_m)^{e_m}$$

představují všechny elementární dělitele determinantu $|\lambda A + B|$, přičemž $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nemusí být vzájemně různé, takže

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_n = n.$$

Pak existují matice regulární H, K řádu n, pro něž platí

$$HAK = E, \qquad HBK = W, \quad \text{kde}$$

$$W = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c:c:c:c}
\begin{matrix} a_1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_1, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_1 \end{matrix} & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline
0 & \begin{matrix} a_2, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_2, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_2 \end{matrix} & \ldots & 0 \\ \hdashline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline
0 & 0 & \ldots & \begin{matrix} a_m, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_m, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_m \end{matrix}
\end{array}\right] & \begin{matrix} \}\, e_1 \\ \\ \}\, e_2 \\ \\ \}\, e_m \end{matrix} \\
\quad \underbrace{\qquad}_{e_1} \qquad \underbrace{\qquad}_{e_2} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{e_m} &
\end{array}$$

22.7. POZNÁMKY. 1. Matice $\lambda\mathbf{E}+\mathbf{W}$ je tzv. Weierstrassův kanonický tvar svazku $\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

2. Všimněme si, že v uvedeném tvaru matice $\mathbf{W}$ se vyskytují pouze kořeny a exponenty elementárních dělitelů svazku $\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

3. Věta 22.6 má četné aplikace. Jednou z nich je např. následující věta, která udává nové řešení problému z odst. 30.1 o současné transformaci dvou matic.

22.8. Věta. Nechť $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$; $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_1$ značí dva páry matic téhož řádu n a nechť je např. $\mathbf{P}$ regulární.

Pak existují takové regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ řádu n, že je

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{HPK}, \qquad \mathbf{Q}_1=\mathbf{HQK}, \tag{161}$$

právě tehdy, když $|\mathbf{P}_1|\neq 0$ a když oba svazky matic $\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q}$, $\lambda\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}_1$ mají všechny elementární dělitele stejné.

Důkaz provedeme jen v hrubých rysech. 1. Uvedená podmínka je nutná. Vskutku, existují-li regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ o vlastnostech (161), dostáváme

$$|\mathbf{P}_1|=|\mathbf{H}|\,|\mathbf{P}|\,|\mathbf{K}| \neq 0,$$

takže $\mathbf{P}_1$ musí být regulární. Dále pro libovolné číslo je

$$\lambda\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}_1=\mathbf{H}(\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q})\mathbf{K}.$$

Odtud plyne

$$|\lambda\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}_1|=|\mathbf{H}|\,|\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q}|\,|\mathbf{K}|=c|\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q}|,$$

kde $c\neq 0$ je vhodná konstanta. Proto základy elementárních dělitelů obou svazků $\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q}$, $\lambda\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}_1$ jsou stejné. Dá se dokázat (důkaz neuvádíme), že i jejich exponenty jsou stejné.

2. Ukážeme, že uvedená podmínka je postačující. Vskutku, nechť $|\mathbf{P}|\neq 0$, $|\mathbf{P}_1|\neq 0$ a nechť

$$(\lambda-a_1)^{e_1},\quad (\lambda-a_2)^{e_2},\ \ldots,\ (\lambda-a_m)^{e_m}$$

jsou elementární dělitelé obou svazků $\lambda\mathbf{P}-\mathbf{Q}$, $\lambda\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}_1$. Podle Weierstrassovy věty 22.6 existují takové regulární matice $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{K}_1$; $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{K}_2$ řádu n, že je

$$\mathbf{H}_1\mathbf{P}\mathbf{K}_1=\mathbf{E}, \qquad \mathbf{H}_1\mathbf{Q}\mathbf{K}_1=\mathbf{W},$$

$$\mathbf{H}_2\mathbf{P}_1\mathbf{K}_2=\mathbf{E}, \qquad \mathbf{H}_2\mathbf{Q}\mathbf{K}_2=\mathbf{W},$$

kde $\mathbf{W}$ značí matici kanonického tvaru. Odtud plyne

$$\mathbf{P}_1=(\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1)\mathbf{P}(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1}),$$

$$\mathbf{Q}_1=(\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1)\mathbf{Q}(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1}).$$

Existují tedy takové regulární matice $\mathbf{H}=\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1$, $\mathbf{K}=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1}$ řádu n, že je

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{HPK}, \qquad \mathbf{Q}_1=\mathbf{HQK}.$$

22.9. Věta o podobných maticích. Dvě matice A, B téhož řádu n jsou podobné, právě když každý elementární dělitel charakteristického determinantu matice A je elementárním dělitelem charakteristického determinantu matice B neboli právě když charakteristické determinanty těchto matic mají stejné elementární dělitele.

Důkaz. 1. Ukažme nejprve, že uvedená podmínka je nutná. Nechť A, B téhož řádu n jsou podobné. Pak existuje taková regulární matice Q, že je

$$B = Q^{-1}AQ.$$

Zároveň platí

$$E = Q^{-1}EQ, \qquad |E| = 1.$$

Tedy podle předešlé věty oba determinanty $|\lambda E - B|$, $|\lambda E - B|$ mají stejné elementární dělitele. Avšak

$$|\lambda E - A| = (-1)^n |A - \lambda E|, \qquad |\lambda E - B| = (-1)^n |B - \lambda E|.$$

Proto také determinanty $|A - \lambda E|$, $|B - \lambda E|$ mají stejné elementární dělitele. 2. Ukažme nyní, že uvedená podmínka stačí. Nechť tedy $|A - \lambda E|$, $|B - \lambda E|$, a tudíž i $|\lambda E - A|$, $|\lambda E - B|$ mají stejné elementární dělitele. Pak podle věty 22.8 existují takové regulární matice H, K, že je

$$E = HEK, \qquad B = HAK.$$

Odtud máme $H = K^{-1}$, $B = K^{-1}AK$, takže matice A, B jsou podobné.

PŘÍKLAD 21. Určeme elementární dělitele determinantu $|\lambda E - A|$, kanonický tvar Weierstrassův a příslušnou matici K, je-li A matice z př. 18 a 19.

Řešení. Daná matice

$$A = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & 0 \end{bmatrix}$$

má podle výpočtu v příkl. 18 charakteristický polynom

$$|A - \lambda E| = \lambda^4.$$

Minory 3. stupně jsou (viz. příkl. 18)

$$\begin{array}{llll} \lambda(\lambda^2 + 4), & 2\lambda^2, & 2\lambda^2, & 8\lambda, \\ \lambda(\lambda + 2), & \lambda^2(\lambda + 1), & \lambda^2, & 2\lambda(\lambda + 2), \\ \lambda(\lambda - 2), & -\lambda^2, & \lambda^2(\lambda - 1), & 2\lambda(\lambda - 2), \\ -2\lambda, & -\lambda^2, & -\lambda^2, & \lambda(\lambda^2 - 4). \end{array}$$

Elementární dělitelé patří pouze k základu λ. Přitom je

$$h_1 = 0,\ h_2 = 0,\ h_3 = 1,\ h_4 = 4,$$

$$e_1 = 0,\ e_2 = 0,\ e_3 = 1,\ e_4 = 3.$$

Proto elementární dělitelé jsou tvaru: λ, λ^3.

Podle Weierstrassovy věty existují proto regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, pro něž platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{HEK}, \qquad \mathbf{HAK} = \mathbf{W} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|ccc} 0, & 0, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, e_3 \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} e_4 \end{array}$$

Protože $\mathbf{H} = \mathbf{K}^{-1}$, určíme nejprve matici $\mathbf{K}$ ze vztahu

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{AK} = \mathbf{W}$$

neboli

$$\mathbf{AK} = \mathbf{KW}.$$

Označíme-li
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{bmatrix}$$

musí platit

$$\begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Odtud po vynásobení obdržíme porovnáním stejnolehlých prvků na obou stranách celkem 16 lineárních rovnic a 16 neznámých: a_1, b_1, c_1, ..., d_4. Obecná teorie zaručuje, že tyto rovnice mají netriviální řešení, tj. že všechny neznámé nejsou rovny nule.

Dostáváme rovnice

(1) $-a_2 + a_3 = 0,$ (9) $2a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0,$

(2) $-b_2 + b_3 = 0,$ (10) $2b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0,$

(3) $-c_2 + c_3 = b_1,$ (11) $2c_1 - c_2 - c_3 + c_4 = b_3,$

(4) $-d_2 + d_3 = c_1,$ (12) $2d_1 - d_2 - d_3 + d_4 = c_3,$

(5) $-2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0,$ (13) $2a_2 - 2a_3 = 0,$

(6) $-2b_1 + b_2 + b_3 - b_4 = 0,$ (14) $2b_2 - 2b_3 = 0,$

(7) $-2c_1 + c_2 + c_3 - c_4 = b_2,$ (15) $2c_2 - 2c_3 = b_4,$

(8) $-2d_1 + d_2 + d_3 - d_4 = c_2,$ (16) $2d_2 - 2d_3 = c_4.$

Protože se zde vyskytují stejné rovnice (1) = (13), (2) = (14), (5) = (9), (6) = (10), zbývá k řešení tato soustava

(1^*) $a_3 = a_2,$ (5^*) $a_4 = -2a_1 + 2a_2,$

(2^*) $b_3 = b_2,$ (6^*) $b_4 = -2b_1 + 2b_2,$

(3^*) $c_3 = b_1 + c_2,$ (7^*) $c_4 = -2c_1 + 2c_2 + b_1 - b_2,$

(4^*) $d_3 = c_1 + d_2,$ (8^*) $d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 - c_2,$

(9^*) $c_4 = -2c_1 + 2c_2 + b_1 + b_2,$

(10^*) $d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 + c_2 + b_1,$

(11^*) $b_4 = 2c_2 - 2c_2 - 2b_1 = -2b_1,$

(12^*) $c_4 = 2d_2 - 2d_2 - 2c_1 = -2c_1.$

Z rovnic (9^*) a (7^*) plyne $b_2 = 0,$
kdežto (8^*) a (10^*) máme $2c_3 = -b_1.$
Dosadíme-li tyto dva výsledky do předešlých rovnic, dostaneme

$a_3 = a_2,$ $d_3 = d_2 + c_1,$ $d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 + \frac{1}{2}b_1,$

$b_2 = b_3 = 0,$ $a_4 = 2a_2 - 2a_1,$ $2c_2 = -b_1.$

$2c_3 = b_1,$ $b_4 = -2b_1,$

Máme tedy 10 rovnic o 16 neznámých. Můžeme si proto 6 veličin zvolit (ale tak, aby $\mathbf{K}$ byla regulární).
Zvolíme-li např. $a_1 = 0$, $b_1 = 2$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$, $a_2 = 1$, $d_2 = 0$,
pak bude $b_2 = 0$, $c_2 = -1$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0$, $c_3 = 1$, $d_3 = 0$, $d_4 = 2$, $b_4 = -4$, $c_4 = 0$, $d_4 = -1$, takže hledaná matice

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0, & 2, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & -4, & 0, & -1 \end{bmatrix},$$

přičemž $|\mathbf{K}| = -4$, takže $\mathbf{K}$ je regulární.

23. KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH PÁRŮ MATIC

V této kapitole stručně pojednáme o klasifikaci regulárních párů matic, založené na předcházející Weierstrassově teorii. Nejprve si uveďme bez důkazu následující větu:

23.1. Věta. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_m$ libovolná čísla, kdežto

$e_1, e_2, \ldots, e_m$

libovolná přirozená čísla, pro něž je $e_1 + e_2 + \ldots + e_m = n$, pak svazek matic

$\lambda \mathbf{E} - \mathbf{W}$

řádu n, kde $\mathbf{W}$ značí Weierstrassovu kanonickou matici (odst. 22.6), má právě tyto elementární dělitele

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, \quad (\lambda - a_2)^{e_2}, \ \ldots, \ (\lambda - a_m)^{e_m}.$$

Podle této věty existují tedy svazky matic libovolného řádu n, které mají předem dané elementární dělitele.

23.2. Definice regulárního páru matic. Regulárním párem matic rozumíme pár čtvercových matic téhož řádu, z nichž aspoň jedna je regulární, přičemž si je myslíme uspořádány tak, že vždy první matice je regulární.

23.3. Charakteristika regulárního páru matic. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je regulární pár matic řádu n a nechť polynomy

$$\begin{matrix} (\lambda - a_1)^{e'_1}, & \ldots\ldots, & (\lambda - a_1)^{e'_{k_1}}, \\ (\lambda - a_2)^{e''_1}, & \ldots\ldots, & (\lambda - a_2)^{e''_{k_2}}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (\lambda - a_h)^{e^{(h)}_1}, & \ldots\ldots, & (\lambda - a_h)^{e^{(h)}_{k_h}} \end{matrix} \qquad (162)$$

představují všechny elementární dělitele svazku $\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}$, přičemž čísla a_1, a_2, ..., a_h jsou vzájemně různá.

Při označení elementárních dělitelů jsme volili takové uspořádání, že exponenty e_j, příslušné k témuž základu, s rostoucím indexem nerostou, takže je např.

$$e'_1 \geqq e'_2 \geqq \ldots \geqq e'_{k_1}, \ldots \text{ atd.}$$

a kromě toho

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_h.$$

Dále ovšem platí

$$e'_1 + \ldots + e'_{k_1} + e''_1 + \ldots + e^{(h)}_{k_h} = n. \qquad (163)$$

Pak regulárnímu páru matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ přiřazujeme charakteristiku

$$\left[(e'_1, \ldots, e'_{k_1}), (e''_1, \ldots, e''_{k_2}), \ldots, (e^{(h)}_1, \ldots, e^{(h)}_{k_h})\right]. \qquad (164)$$

Tedy každý regulární pár matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ má určitou charakteristiku, která udává:

1. Počet vzájemně různých základů elem. dělitelů svazku $\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}$;
2. exponenty elem. dělitelů, příslušných ke každému základu.

PŘÍKLAD 22. Určeme charakteristiku regulárního páru matic $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A}$ je matice uvedená v příkladu 21.

Řešení. Svazek matic $\lambda E - A$ má elementární dělitele (viz příklad 21)

$$\lambda, \ \lambda^3 ,$$

takže počet různých kořenů a_k je $h = 1$. Příslušné exponenty uspořádané podle velikosti jsou

$$e_1 = 3 \geq e_2 = 1.$$

Proto charakteristika daného páru matic je tvaru

$$[(3,1)] .$$

23.4. Počet vzájemně různých charakteristik regulárních párů matic řádu n.

Vezměme v úvahu množinu všech regulárních párů matic řádu n, kde n značí libovolné (ale pevné) přirozené číslo.

Každý pár regulárních matic má jistou charakteristiku, avšak vzájemně různých charakteristik je pouze konečný počet. To plyne z toho, že čísla každé charakteristiky jsou přirozená a podle (169) je jejich součet roven n. Odtud plyne, že všech možných charakteristik je nanejvýš

$$(2^{2^n-1} - 1)m, \tag{165}$$

kde m značí počet všech možných rozkladů čísla n v přirozené sčítance.

Mysleme si všechny rozklady čísla n v přirozené sčítance uspořádány tak, že na prvním místě je rozklad obsahující pouze jediného sčítance (tj. číslo n samo), pak rozklady o dvou sčítancích, pak o třech sčítancích atd., až konečně rozklad o n sčítancích rovných jedničkám.

Tak např. pro n = 4 máme tyto rozklady

4; 3,1; 2,2; 2,1,1; 1,1,1,1.

Zařaďme nyní čísla každého uvažovaného rozkladu do h = 1,2,...,n skupin (pokud to jde), a uspořádejme je v každé skupině tak, aby nerostla. Mimoto uspořádejme všechny tyto skupiny podle počtu čísel tak, že první skupina obsahuje nejvíce čísel, atd. Počet všech možných charakteristik regulárních párů matic řádu n je zřejmě nanejvýš roven počtu těchto uspořádaných skupin.

Např. pro n = 4 dostaneme celkem 14 skupin tvaru:

Pro h = 1: 4; (3,1); (2,2); (2,1,1); (1,1,1,1)
Pro h = 2: 3,1; 2,2; (2,1),1; (1,1),2; (1,1),(1,1); (1,1,1),1
Pro h = 3: 2,1,1; (1,1),1,1
Pro h = 4: 1,1,1,1.

Vraťme se opět k obecnému n. Z věty 23.1 plyne, že existují regulární páry matic řádu n, které mají předepsanou charakteristiku. Odtud plyne, že všech možných charakteristik regulárních párů matic řádu n je právě jenom tolik, kolik je skupin, o nichž jsme vpředu mluvili.

Tak např. každý regulární pár matic řádu 4 má jednu z těchto charakteristik
$[4]$, $[(3,1)]$, $[(2,2)]$, $[(2,1,1)]$, $[(1,1,1,1)]$;
$[3,1]$, $[2,2]$, $[(2,1),1]$, $[(1,1),2]$, $[1,1,(1,1)]$, $[(1,1,1),1]$;
$[2,1,1]$, $[(1,1),1,1]$; $[1,1,1,1]$.

<u>23.5. Definice třídy regulárních párů matic.</u> Množina všech regulárních párů matic řádu n, které mají stejnou charakteristiku, se nazývá třídou uvažovaných regulárních párů matic.

Množina všech regulárních párů matic řádu n se tedy rozpadá na konečný počet tříd, přičemž všechny páry téže třídy se dají regulárními maticemi převést na stejný kanonický tvar.

<u>PŘÍKLAD 23.</u> Uveďme v kanonickém tvaru všechny třídy regulárních párů matic řádu 4.

Řešení. Značí-li **E** jednotkovou matici řádu 4, pak každý regulární pár matic řádu 4 se dá převést na jednu z těchto tříd

(1) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{cccc} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & a_1 \end{array}\right];$$

(2) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{ccc|c} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & a_1 \end{array}\right];$$

(3) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{cc|cc} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & a_1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & a_1 \end{array}\right];$$

(4) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{cc|c|c} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & a_1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & a_1 \end{array}\right];$$

(5) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ \hline 0, & a_1, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & a_1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & a_1 \end{array}\right];$$

(6) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{ccc|c} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & a_2 \end{array}\right];$$

(7) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{cc|cc} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & a_2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & a_2 \end{array}\right];$$

(8) $$\mathbf{E},\left[\begin{array}{cc|c|c} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & a_1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & a_2 \end{array}\right];$$

(9) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & a_2 \end{bmatrix}$; (10) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_2 \end{bmatrix}$;

(11) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_2 \end{bmatrix}$; (12) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_3 \end{bmatrix}$;

(13) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_3 \end{bmatrix}$; (14) $\mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_4 \end{bmatrix}$.

Tyto páry mají charakteristiky uvedené v odst. 2.4. Např. pár (1) má charakteristiku $[4]$, pár (2) charakteristiku $[(3,1)]$, atd. Zdůrazněme, že písmena a_k s různými indexy značí různá čísla.

23.6. POZNÁMKA. Uvedli jsme, že se všechny regulární páry matic řádu n, které patří do téže třídy, dají převést regulárními maticemi na týž kanonický tvar. Ovšem čísla a_k vyskytující se v kanonickém tvaru jednoho páru, nejsou vždy rovna číslům a_k vyskytujícím se v kanonickém tvaru druhého páru. To zřejmě souvisí s tím, že charakteristika každého regulárního páru matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ udává počet h vzájemně různých základů elementárních dělitelů svazku $\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}$ a exponenty elementárních dělitelů patřících k jednotlivým základům; neudává však tyto základy, tj. příslušná čísla.

Např. regulární pár matic $\mathbf{E}, \mathbf{A}$ řádu 4, kde $\mathbf{A}$ značí matici uvedenou v příkladu 21, má charakteristiku $[(3,1)]$ a jeho kanonický tvar je

$$\mathbf{E}, \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \text{ takže } a_1 = 0.$$

Regulární pár matic $\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, který je již v kanonickém tvaru, má též charakteristiku $[(3,1)]$, takže patří do téže třídy jako předešlý pár $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, třebaže $a_1 = 1$.

24. APLIKACE PŘEDEŠLÉ TEORIE NA ŘEŠENÍ SYSTÉMU LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.

Mějme systém lineárních homogenních diferenciálních rovnic tvaru

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

kde a_{jk} značí dané konstanty. Označíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix},$$

můžeme systém (166) psát jedinou maticovou rovnicí tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \qquad (167)$$

Jde o určení obecného řešení systému (166). Metoda, kterou vyložíme, spočívá v tom, že místo neznámých funkcí $y_1, \dots, y_n$ zavedeme jejich lineární kombinace s konstantními koeficienty $z_1, \dots, z_n$, přičemž tyto kombinace zvolíme tak, aby hověly systému diferenciálních rovnic, který je pokud možno jednoduchého tvaru. Řešením tohoto nového systému obdržíme funkce $z_1, \dots, z_n$.

Nuže, zaveďme lineární kombinace $z_1, \dots, z_n$ neznámých funkcí $y_1, \dots, y_n$ vztahy

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= k_{11}z_1 + k_{12}z_2 + \dots + k_{1n}z_n, \\ y_2 &= k_{21}z_1 + k_{22}z_2 + \dots + k_{2n}z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= k_{n1}z_1 + k_{n2}z_2 + \dots + k_{nn}z_n, \end{aligned}\right\} \qquad (168)$$

přičemž o konstantách k_{ij} především předpokládáme jen to, že matice

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}, & \dots, & k_{1n} \\ \vdots & & \\ k_{n1}, & \dots, & k_{nn} \end{bmatrix}$$

je regulární. Lineární substituci (168) můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{z}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Odtud a z rovnice (167) plyne

$$\mathbf{K}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{z},$$

takže

$$\mathbf{z}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{z}. \tag{169}$$

Podle předcházející teorie můžeme zvolit matici $\mathbf{K}$ tak, aby matice $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$ měla kanonický tvar. Pak je $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \mathbf{W}$, kde $\mathbf{W}$ je Weierstrassův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$, tedy

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} c_1, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & c_1, & 1, & \dots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & c_1 \end{matrix} & \mathbf{0} & \dots\dots \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} c_2, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & c_2, & 1, & \dots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & c_2 \end{matrix} & \dots\dots \\ \hline \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} e_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} e_2 \\ \vphantom{a} \end{array}$$

přičemž $c_1, c_2, \dots, c_m$ značí kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$.
Dostaneme tedy po vynásobení ze vztahu (169) rovnice

$$\begin{aligned} z_1' &= c_1 z_1 + z_2, \\ z_2' &= c_1 z_2 + z_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{e_1}' &= c_1 z_{e_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{e_1+1}' &= c_2 z_{e_1+1} + z_{e_1+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{e_1+e_2}' &= c_2 z_{e_1+e_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{170}$$

Je zřejmé, že se systém (170) dá řešit snadněji než systém (166), neboť diferenciální rovnice pro funkce $z_{e_1}, z_{e_1+e_2}, \dots, z_{e_1+\dots+e_m}$ jsou homogenní diferenciální rovnice I. řádu, z nichž lze tyto funkce vypočíst. Pomocí nich můžeme pak řešit postupně ostatní diferenciální rovnice systému (170), které jsou, jak je patrno, vesměs diferenciální rovnice lineární nehomogenní prvního řádu. Tím určíme funkce $z_1, \ldots, z_n$ a ze vztahů (168) obdržíme pak funkce $y_1, \ldots, y_n$.

PŘÍKLAD 24. Řešme systém diferenciálních lineárních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= - y_2 + y_3, \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ y_4' &= 2y_2 - 2y_3. \end{aligned}$$

Řešení. Matice $\mathbf{A}$ této soustavy je tvaru $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -2, & 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & 2, & -2, & 0 \end{bmatrix}$. Je to tedy matice rovná matici $\mathbf{A}$ v příkladu 21. Za matici $\mathbf{K}$, která převádí matici $\mathbf{A}$ na kanonický tvar, zvolíme matici uvedenou ve zmíněném příkl. 21, tj. matici

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0, & 2, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & -4, & 0, & -1 \end{bmatrix},$$

přičemž $\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$.

Lineární substitucí o matici $\mathbf{K}$, tj. substitucí

$$\begin{aligned} y_1 &= 2z_2 + z_4 \\ y_2 &= z_1 - z_3 \\ y_3 &= z_1 + z_3 \\ y_4 &= 3z_1 - 4z_2 - z_4, \end{aligned}$$

přejde daný systém v soustavu

$$z_1' = 0, \quad z_2' = z_3, \quad z_3' = z_4, \quad z_4' = 0.$$

Její řešení je

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 \\ z_2 &= C_2 + C_3 x + \tfrac{1}{2} C_4 x^2 \\ z_3 &= C_3 + C_4 x \\ z_4 &= C_4 \end{aligned}$$

kde C_1, C_2, C_3, C_4 jsou libovolné konstanty. Odtud obdržíme obecné řešení daného systému ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= 2C_2 + 2C_3 x + C_4(x^2+1), \\ y_2 &= C_1 - C_3 - C_4 x, \\ y_3 &= C_1 + C_3 + C_4 x, \\ y_4 &= 2C_1 - 4C_2 + 4C_3 x - C_4(2x^2-1). \end{aligned}$$

25. CVIČENÍ 3.

25. Napište Weierstrassův (neboli Jordanův, čti Žordanův) tvar matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -4, & 4, & 0 \\ -2, & 1, & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 6, & -15 \\ 1, & 1, & -5 \\ 1, & 2, & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 4 \\ 4, & -7, & 8 \\ 6, & -7, & 7 \end{bmatrix}$$

26. Určete kanonický tvar $\mathbf{W}$ idempotentní matice, tj. matice $\mathbf{A}$, pro kterou platí $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

27. Dokažte, že involuční matice $\mathbf{A}$ (tj. matice, pro niž je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$) je podobná diagonální matici a určete tvar této diagonální matice. (Diagonální matice má všecky prvky, neležící v hlavní diagonále, rovny nule.)

28. Dokažte, že periodická matice $\mathbf{P}$ (tj. matice, pro niž $\mathbf{P}^k = \mathbf{E}$ pro vhodné přirozené číslo k) je podobná diagonální matici a určete tvar této diagonální matice.

29. Ukažte, že matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & -1 \\ 10, & -3, & -2 \\ -1, & 1/2, & 4 \end{bmatrix}$ je podobná s diagonální maticí $\mathbf{D}$ (s nenulovými prvky $d_{11} = 2$, $d_{22} = -3$, $d_{33} = 4$) a určete příslušnou matici $\mathbf{Q}$, pro niž platí $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$.

30. Zjistěte, zda matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -2, & 3 \\ 10, & -4, & 5 \\ 5, & -4, & 6 \end{bmatrix}$ se dá převést transformací podobnosti na diagonální tvar.

31. Dokažte, že matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7, & -12, & 6 \\ 10, & -19, & 10 \\ 12, & -24, & 13 \end{bmatrix}$ je podobná diagonální matici $\mathbf{D}$; určete matici $\mathbf{D}$ a příslušnou matici transformace.

32. Ukažte, že matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 2 \\ 5, & -3, & 3 \\ -1, & 0, & -2 \end{bmatrix}$ nelze převést transformací podobnosti na diagonální tvar (neboť $\mathbf{Q}$ je singul

33. Určete elementární dělitele matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1, & -1 \\ -3, & 3, & -5, & 4 \\ 8, & -4, & 3, & -4 \\ 15, & -10, & 11, & -11 \end{bmatrix}$

34. Dány matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$.

Určete, které z těchto tří matic jsou podobné.

35. Určete charakteristiku matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4, & -5, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 5, & -7, & 3, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & -9, & 4, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -4, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -2, & 1, & 2 \end{bmatrix}$
a její elementární dělitele.

VÝSLEDKY

25. $\begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}$.

26. Diagonální matice s prvky $d_{jj} = 0$ nebo 1, $d_{jk} = 0$ pro $j \neq k$.

27. Diagonální matice s prvky $d_{jj} = \pm 1$, $d_{jk} = 0$ pro $j \neq k$.

28. Je-li p nejmenší z čísel k, pro která je $\mathbf{A}^k = \mathbf{E}$, pak diagonální matice má prvky d_{jj} rovny některým z p hodnot odmocniny $\sqrt[p]{1}$.

29. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & -68, & 2 \\ 0, & 5, & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 126, & 7, & 70 \\ 4, & -2, & 0 \\ 10, & -5, & -70 \end{bmatrix}$.

30. Nedá, neboť $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 5, & 5, & 0 \\ 3, & 3, & 0 \end{bmatrix}$ je singulární, takže $\mathbf{Q}^{-1}$ neexistuje.

31. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 3 \\ 1, & 0, & 5 \\ 0, & -1, & 6 \end{bmatrix}$.

33. $(\lambda + 1)^3, \lambda + 1$. 34. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ podobné; $\mathbf{C}$ není podobná žádné z nich.

35. $[2, (2,1), 1]$; $\lambda^2, (\lambda - 2)^2, \lambda - 2, \lambda - 1$.

LITERATURA O MATICÍCH

1. Aitken, A.C.: Determinants and Matrices, 9th ed. Edinbourh: 1958
2. Angot, A.: Užitá matematika. Praha: SNTL 1960 (přel. z franštiny).
3. Bydžovský, B.: Úvod do theorie determinantů a matic. Praha: NČSAV 1954.
4. Faddějev, D.K.-Faddějevová, V.N.: Numerické metody lineární algebry. Praha 1964.
5. Faddějev, D.K.-Somminskij, I.S.: Sbornik zadač po vyššej algebre. Moskva 1961.
6. Frazer, R.A.-Duncan, W.J.-Collar, A.R.: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích. Praha: SNTL 1958 (přel. z angličtiny)
7. Gantmacher, F.R.: Těorija matric. Moskva: Gostechizdat 1953

8. Gelfand, I.M.: Lineární algebra. Praha: NČSAV 1953 (přel. z ruštiny).
9. MacDuffee,C.C.: The Theory of Matrices. Berlin: Springer 1933.
10. Malcev,A.I.: Osnovy linejnoj algebry. Moskva: Gostechizdat 1948.
11. Mišina,A.B-Proskurjakov,I.V.: Vysšaja algebra. Moskva: Gostechizdat 1962.
12. Muth,P.: Theorie und Anwendung der Elementartheiler. Leipzig: Teubner 1899.
13. Proskurjakov,I.V.: Sbornik zadač po linejnoj algebre. Moskva: 1962
14. Pupke,H.: Einführung in die Matrizenrechnung. Berlin: 1953.
15. Schmidtmayer,J.: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. Praha:1954
16. Schreier,O.-Sperner,E.: Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory. New York: Chelsea Publ.Comp. 1955.
17. Vodička,V.: Determinanty a matice v teorii a praxi, I. a II. Praha: 1950.
18. Wedderburn,J.H.M.: Lectures on Matrices. New York: 1934
19. Weyr,Ed.: O theorii forem bilineárných. Praha. 1889.
20. Zurmühl,H.: Matrizen. Berlin: 1950