

## Otakar Borůvka a diferenciální rovnice

---

Seminář v letech 1961–1966

In: Petra Šarmanová (author): Otakar Borůvka a diferenciální rovnice. (Czech). Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 1998. pp. 115--120.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401477>

### Terms of use:

© Masarykova univerzita

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://project.dml.cz>

Ukončeme toto shrnutí vývoje transformační teorie do roku 1960 citací z dopisu M. Greguše O. Borůvkovi ze 17. listopadu 1958:

*Váž. pán profesor,*

*v prílohe Vám posielam stručný popis Vašich disperzií a transformácií v aplikáciach na naše výsledky, presnejšie v našich výsledkoch. Viete vec sa má tak, že Vaše práce boli nielen výdatnou a podstatnou pomôckou pri dôkazoch určitých viet, hlavne okrajových úloh, ale čo je najdôležitejšie inšpirovali celý kolektív ako brnenských tak aj bratislavských matematikov k hlbšiemu štúdiu problematiky lineárnych rovníc a boli výstižným príkladom štúdia problematiky, ktorá sa naoko nezdała problematikou, alebo sa problémy nevideli. Možno som to poriadne nevystihol čo chcem povedať, avšak pri štúdiu lineárnych dif. rovníc sa vždy bude vychádzať z Vašich výsledkov hlavne u rovníc vyšších rádov, kde sa nutne prichádza k zväzkom riešení a ku skúmaniu ich vlastností.*

## 6 Seminář v letech 1961 – 1966

Státní plán vědeckovýzkumných prací na léta 1961 – 1965, jenž byl součástí státního plánu rozvoje národního hospodářství na totéž období, obsahoval 16 komplexních úkolů. Komplexní úkoly se dělily na stěžejní výzkumné úkoly a každý stěžejní úkol byl členěn na hlavní problémy. Práce na hlavním problému se zúčastňovalo zpravidla více vědeckovýzkumných pracovišť. Každé z těchto pracovišť řešilo dílčí problém.

Výzkum O. Borůvky spadl pod komplexní úkol I. *Výzkum matematických metod a fyzikálních zákonitostí k získání podkladů pro nové řešení problémů přírodních a technických věd*, pod stěžejní úkol I-1 *Matematické metody přírodních a technických věd* a hlavní problém I-1-1 *Matematická analýza*.<sup>10</sup> Dílčí problém, jenž byl plněn O. Borůvkou, nesl název *Teorie diferenciálních rovnic obyčejných. (Studium speciálních vlastností obyčejných diferenciálních rovnic hlavně lineárních 2. řádu se zřetelem k aplikacím.)* S řešením bylo započato 1. ledna 1961 a hlavním cílem bylo sepsání moderní a původní učebnice z oboru obyčejných diferenciálních rovnic.

V následujících odstavcích si všimneme činnosti semináře v jednotlivých letech 1961 – 1966. Nebudeme již činnost semináře rozdělovat na I. a II. pololetí, ani uvádět publikační činnost členů semináře. Vzhledem k nedostatku archivních zdrojů se zaměříme pouze na obsahovou náplň semináře a zmíníme se o zahraničních cestách a přednáškách O. Borůvky.

### 6.1 Činnost semináře v roce 1961

Bylo vykonáno 5 schůzí semináře 20. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 20 členů.

Ve dvou seminářích přednášeli o svých výsledcích M. Greguš (o některých vlastnostech řešení diferenciální rovnice  $y''' + 2Ay' + (A + b)y = 0$  ( $b \geq 0$ )) a M. Zlámal (o odhadu chyb při okrajových problémech druhého a vyšších řádů s použitím Greenovy funkce).

V ostatních seminářích přednášel O. Borůvka. Vyložil přehledný úvod do teorie transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu za účelem uvedení nových členů semináře do této teorie

<sup>10</sup>Koordinátorem hlavního problému I-1-1 byl J. Kurzweil z MÚ ČSAV.

a předvedl aplikaci teorie transformací na určení všech lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, které mají předepsaný konečný typ s konjugovanými body.

Poznámky:

1. V květnu 1961 vykonal O. Borůvka zahraniční cestu do Paříže, kde proslovil v ústavu Institut Henri Poincaré přednášky na téma *Transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoides* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).
2. V roce 1961 vyšly Borůvkovy skripta *Diferenciálne rovnice* (Slovenské pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1961, 205 str.). Jedná se o původní vysokoškolský učební text obsahující řadu nových výsledků.

## 6.2 Činnost semináře v roce 1962

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 15 členů.

Ve čtyřech seminářích přednášeli o svých výsledcích M. Laitoch (o aplikacích teorie transformací lineárních rovnic 2. řádu na řešení okrajových problémů), M. Švec (o oscilatorickém charakteru nehomogenních lineárních rovnic 2. řádu a aplikaci příslušných metod na homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu) a F. Neuman.

O. Borůvka měl čtyři přednášky o vlastnostech množin lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu majících společnou základní centrální dispersi 1. druhu.

*Docílené výsledky prohlubují a značně rozšiřují dosavadní znalosti v oboru dif. lin. rovnic 2. řádu. V oboru teorie množin dif. lin. rovnic 2. řádu se společnou základní centrální dispersí 1. druhu je hlavním výsledkem zjištění účinnosti obecných algebraických metod z teorie grup a věta, že mohutnost každé takové množiny je vždycky táž, tj. nezávisí na volbě základní centrální disperse 1. druhu, a rovná se mohutnosti kontinua.*

Poznámka:

V září 1962 se O. Borůvka zúčastnil první československé konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích s názvem Equadiff, jež se konala v Praze. Proslovil zde přednášku na téma *Transformace diferenciálních lineárních rovnic obyčejných druhého řádu*.

V říjnu a listopadu 1962 proslovil na univerzitách v Greifswaldu, Rostocku a Halle přednášky s názvy *Transformationen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung* a *Zerlegungen in Mengen und algebraische Strukturen* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

## 6.3 Činnost semináře v roce 1963

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 16 členů.

V pěti seminářích přednášel o svých výsledcích Z. Hustý (o iterovaných lineárních diferenciálních rovnicích; asymptotické vzorce pro integrály homogenních lineárních rovnic  $n$ -tého řádu), ve dvou V. Šeda (o transformacích lineárních diferenciálních rovnic  $n$ -tého řádu) a na jedné schůzi proslovil O. Borůvka přednášku o fázovém vyjádření diferenciální rovnice  $Y'' = q(t)Y$ .

Výsledky, kterých bylo v r. 1963 docíleno, jsou hluboké a týkají se širokých úseků teorie dif. lineárních rovnic vyšších řádů a proto je nelze v podrobnostech v této zprávě uvádět. Jde hlavně o vlastnosti dif. lineárních (homogenních) rovnic  $n$ -tého řádu, které vzniknou  $(n - 1)$ -násobnou iterací dif. rovnic 1. řádu (Z. Hustý), o asymptotické vyjádření integrálů dif. lineární rovnice  $n$ -tého řádu (Z. Hustý). Další výsledky přinášejí rozsáhlou teorii transformací dif. lineárních rovnic  $n$ -tého řádu; zejména lze pomocí výsledků teorie transformací dif. lineárních rovnic 2. řádu a klasických výsledků o lineárních invariantech odvodit nutnou a dostatečnou podmínku pro ekvivalenci dvou dif. lineárních rovnic  $n$ -tého řádu v polokanonickém tvaru (V. Šeda). Rovněž široce založené jsou úvahy týkající se fázového vyjádření dif. rovnice  $y'' = q(t)y$ , které souvisí s problémy splynutí první a druhé, popř. třetí a čtvrté centrální disperse (O. Borůvka). Ve všech těchto případech jde o výsledky globální povahy v reálném oboru.

Poznámka:

V roce 1963 se O. Borůvka zúčastnil konference o aproximacích funkcí s numerickými aplikacemi konané v Kluži, v jejímž rámci proslovil plenární přednášku na téma *Über einige Fragen aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Během konference byl pozván k přednáškám na univerzitách v Bukurešti a v Iassi, kde přednášel na téma *Aperçu de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

## 6.4 Činnost semináře v roce 1964

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 22 členů.

V prvních čtyřech schůzích přednášel Z. Hustý o svých výsledcích o transformaci a ekvivalenci homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů a o diferenciálních invariantech. V ostatních schůzích přednášel O. Borůvka o teorii fází lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

*V této teorii jsem systematicky zpracoval řadu nových výsledků v širší souvislý úsek teorie dif. lineárních rovnic 2. řádu.*

Popišme stručně obsahy jednotlivých Borůvkových přednášek:

V první přednášce byly podány základní pojmy této teorie, zejména pojmy první a druhé fáze rovnice

$$y'' = q(t)y. \quad (q)$$

Byly odvozeny jejich základní vlastnosti, zvláště vzorce pro jejich derivace a vztahy k funkci  $q$  v souvislosti se schwarzovskou derivací.

Ve druhé přednášce byly odvozeny vzorce pro obecný integrál  $y$  a jeho derivaci  $y'$  v závislosti na první a druhé fázi  $\alpha, \beta$  rovnice (q)

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \quad y' = \pm k_1 \sqrt{|q|} \frac{\sin(\beta + k_2)}{\sqrt{|\beta'|}}$$

( $k_1, k_2 = \text{konst.}$ ) a byly studovány vztahy mezi prvními a druhými fázemi patřícími k téže bázi. Základní vztah v tomto směru je dán vzorcem

$$\beta = \alpha + \text{Arccotg} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha'} \right)'$$

V další přednášce byly stručně uvedeny pojmy centrálních dispersí jednotlivých druhů  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\chi_n$ ,  $\omega_n$  oscilatorické rovnice ( $q$ ) a byly odvozeny příslušné abelovské relace. Zejména pro základní centrální disperse  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\chi_1$ ,  $\omega_1$  lze tyto relace psát ve tvaru

$$\alpha(\varphi_1) = \alpha + \varepsilon\pi, \quad \beta(\psi_1) = \beta + \varepsilon\pi, \quad \beta(\chi_1) = \alpha + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\pi, \quad \alpha(\omega_1) = \beta - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\pi,$$

přičemž je  $\varepsilon = \pm 1$ . Na tomto základě byly odvozeny nelineární diferenciální rovnice 3. řádu pro centrální disperse jednotlivých druhů.

Poslední přednáška byla věnována studiu tzv. polárních funkcí rovnice ( $q$ ). Polární funkcí rovnice ( $q$ ) se rozumí funkce  $\theta = \beta - \alpha$ , kde  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou libovolná první a druhá fáze patřící k téže bázi rovnice ( $q$ ). Byly odvozeny charakteristické vlastnosti polárních funkcí. Ke každé funkci  $\theta$  s těmito vlastnostmi existuje jednoparametrický systém rovnic ( $q$ ), pro něž je  $\theta$  polární funkcí.

Poznámka:

V roce 1964 proslovil O. Borůvka na osobní pozvání na Vysoké škole technické ve Stuttgartu a na univerzitách v Giessenu a Tübingenu v NSR následující přednášky o svých vědeckých výsledcích: *Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, Algebraische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Kromě toho se v témže roce zúčastnil jubilejních slavností v Krakově, jež se konaly při příležitosti 600. výročí založení Jagellonské univerzity.

## 6.5 Činnost semináře v roce 1965

Bylo vykonáno 11 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 24 členů.

V prvních osmi seminářích přednášel O. Borůvka o svých výsledcích z teorie fází lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. V dalších třech přednášeli o svých výsledcích M. Ráb a M. Švec.

Ve svých přednáškách z teorie fází se O. Borůvka věnoval následujícím tématům: Radonův parametr báze, Radonův polární tvar nosiče  $q$ , normované polární funkce 1., 2. a 3. druhu a jejich vlastnosti a aplikace na řadu úloh, například určení všech rovnic ( $q$ ) s ekvidistantním rozložením kořenů jejich integrálů nebo určení všech rovnic ( $q$ ) se splývajícími centrálními dispersemi 1. a 2. druhu.

*Výsledky získané při plnění tohoto úkolu v roce 1965 přinášejí podstatné rozšíření a prohloubení poznatků o dif. lineárních rovnicích 2. řádu a v širokých souvislostech objasňují význam teorie dispersí a její vztahy k teorii transformací těchto dif. rovnic.*

Poznámka:

V roce 1965 se O. Borůvka zúčastnil matematické konference, která se konala v Berlíně k uctění 150. výročí narození K. Weierstrasse. Proslovil zde přednášku na téma *Neuere Ergebnisse der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Kromě toho přednášel o svých výsledcích na letní škole o diferenciálních rovnicích v Jeseníkách, kterou uspořádala JČMF.

## 6.6 Činnost semináře v roce 1966

Bylo vykonáno 9 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 26 členů semináře.

Ve dvou seminářích přednášel M. Švec o použití věty o pevném bodě při asymptotickém vyšetřování řešení diferenciálních rovnic, ve třech schůzích F. Neuman o nových výsledcích z teorie lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s periodickými koeficienty.

V dalších čtyřech schůzích přednášel O. Borůvka na téma *Teorie obecných dispersí diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu*. Uvedme stručně obsah těchto přednášek:

V první přednášce byl podán stručný přehled teorie obecných dispersí s uvedením zamýšlených cílů přednášek. Byly probrány základní poznatky o lineárních diferenciálních rovnicích 2. řádu se zřetelem k teorii transformací těchto rovnic. Byl zaveden pojem lineárního zobrazení integrálních prostorů dvou rovnic

$$(q) \quad y'' = q(t)y, \quad Y'' = Q(T)Y. \quad (Q)$$

Druhá přednáška byla věnována studiu vlastností lineárních zobrazení  $p$  integrálních prostorů  $r, R$  rovnic  $(q)$  a  $(Q)$ . Zejména byl zaveden pojem fázové báze  $(\alpha, \mathcal{A})$  lineárního zobrazení  $p$  a bylo ukázáno, že pro každé dva integrály  $y \in r, Y = py \in R$  platí vzorec tvaru

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \quad Y = ck_1 \frac{\sin(\mathcal{A} + k_2)}{\sqrt{|\mathcal{A}'|}}$$

s vhodnými, popř. libovolnými konstantami  $c, k_1 (\neq 0), k_2$ .

V další přednášce bylo pokračováno ve studiu vlastností lineárních zobrazení  $p$  integrálních prostorů rovnic  $(q), (Q)$ . Hlavní pozornost byla věnována pojmu tzv. normovaných lineárních zobrazení a jejich kanonickým fázovým bázím. Dále byl konstruktivně zaveden pojem obecné disperse  $X(t)$  oscilatorických rovnic  $(q), (Q)$ . Obecná disperse  $X(t)$  je funkce definovaná v definičním intervalu rovnice  $(q)$ , její hodnoty pokrývají definiční interval rovnice  $(Q)$ , a je jednoznačně určena libovolnou počáteční hodnotou  $T_0 = X(t_0)$  a libovolným lineárním zobrazením  $p$  normovaným vzhledem k číslům  $t_0, T_0$ .

Poslední přednáška byla věnována studiu vlastností obecných dispersí  $X(t)$  rovnic  $(q), (Q)$ . Bylo odvozeno vyjádření obecných dispersí ve tvaru  $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$  pomocí kanonické fázové báze  $(\alpha, \mathcal{A})$ , lineárního zobrazení  $p$  a bylo ukázáno, že obecné disperse  $X(t)$  jsou právě úplnými řešeními Kummerovy diferenciální rovnice

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t). \quad (Qq)$$

Poznámka:

V roce 1966 se O. Borůvka zúčastnil mezinárodního kongresu matematiků v Moskvě, matematické konference v Karl-Marx-Stadtu a mezinárodní konference Equadiff II v Bratislavě. V Moskvě přednesl sdělení na téma *Die Phasengruppe und ihre Beziehungen zu Differentialtransformationen 2. Ordnung*, v Karl-Marx-Stadtu na téma *Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* a na konferenci Equadiff II proslovil přednášku s názvem *Algebraische Elemente in der Transformationstheorie der oszillatorischen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Dnem 31. 12. 1966 ukončil O. Borůvka etapu výzkumu z let 1961 – 1966 a podal návrh na zahájení oponentského řízení. Další etapu výzkumu s týmž názvem dílčího úkolu zahájil 1. 1. 1967.

*Ukončení etapy v letošním roce 1966 je odůvodněno tím, že výsledky, které jsem v ní získal, tvoří s výsledky předcházející etapy ucelenou teorii transformací obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu v reálném oboru. Takovou teorii jsem v posledních letech (mimo svůj výzkumný úkol) skutečně vypracoval. V r. 1966 jsem ukončil její přípravu do tisku jako monografii s názvem „Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung“. Tato monografie má v r. 1967 vyjít v Berlíně (NDR).*

*Ukončením uvedené etapy výzkumu není ovšem o transformacích dif. lineárních rovnic 2. řádu řečeno poslední slovo. Naopak, jako každá matematická teorie, která je vybudována na širokém základě, připouští i teorie transformací další rozvoj. Široké možnosti rozvoje vidím zejména ve využití získaných výsledků k vypracování účinných numerických metod v oboru dif. lineárních rovnic 2. řádu a v prohloubení znalostí o struktuře grupy fází se zaměřením k abstraktní axiomatisaci teorie transformací. Z těchto důvodů hodlám ve výzkumu uvedeného úkolu pokračovat v letech 1967 – 1969 a to metodami, kterých jsem použil a které se osvědčily v minulých letech. Předpokládám, že též etapu 1967 – 1969 ukončím oponentským řízením.*