3 Teorie dispersí

V této kapitole se seznámíme s teorií jistých funkcí jedné proměnné, které udávají vztah mezi nulovými body řešení oscilatorických rovnic (q) a (Q). Takové funkce nazveme dispersemi.

Nejprve budeme zkoumat tzv. centrální disperse 1. až 4. druhu oscilatorické rovnice (q) s nosičem $q < 0$, které zavedeme pomocí konjugovaných bodů rovnice (q).

V druhé části teorie dispersí zavedeme tzv. obecné disperse, které popisují vztahy mezi nulovými body dvou oscilatorických rovnic (q) a (Q).

Mimo jiné uvedeme vztahy mezi centrálními dispersemi a fázemi, mezi obecnými dispersemi a fázemi a ukážeme, že centrální i obecné disperse jsou řešením jisté nelineární diferenciální rovnice 3. řádu a hrají důležitou roli v teorii transformací oscilatorických rovnic.

3.1 Centrální disperse

Pojem centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu zavedeme pouze pro rovnice (q) oscilatorické v intervalu j. V takovém případě mají všechna řešení rovnice (q) nekonečně mnoho nulových bodů, jejichž hromadnými body jsou koncové body intervalu j. Dále budeme předpokládat, že $q < 0$ pro každé $t \in j$. Předpoklad $q < 0$ není nutný u centrálních dispersí 1. druhu. Všude, kde budeme mluvit o rovnici průvodní, budeme uvažovat $q \in C^2$.

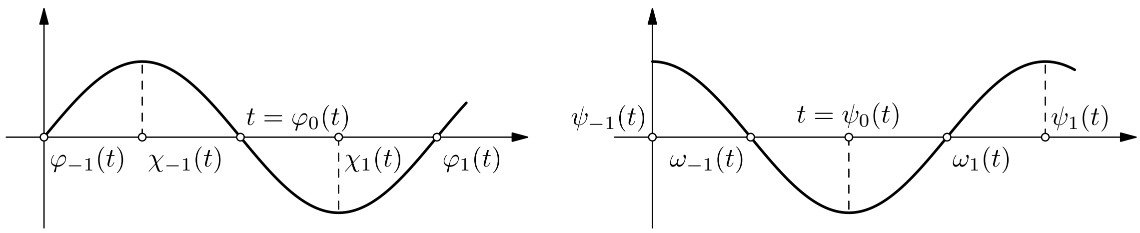
Definice 3.1.1 Nechť rovnice (q) je oscilatorická na intervalu j a pro nosič q platí $q(t) < 0$ pro každé $t \in j$.

V intervalu j definujeme funkci φ_n (φ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\varphi_n(t)$ ($\varphi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 1-konjugovaný bod s bodem t a nechť $\varphi_0(t) = t$. Funkci φ_n (φ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 1. druhu*. Funkci φ_1 nazýváme *základní centrální disperse 1. druhu*.

V intervalu j definujeme funkci ψ_n (ψ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\psi_n(t)$ ($\psi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 2-konjugovaný bod s bodem t a nechť $\psi_0(t) = t$. Funkci ψ_n (ψ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 2. druhu*. Funkci ψ_1 nazýváme *základní centrální disperse 2. druhu*.

V intervalu j definujeme funkci χ_n (χ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\chi_n(t)$ ($\chi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 3-konjugovaný bod s bodem t. Funkci χ_n (χ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 3. druhu*. Funkci χ_1 nazýváme *základní centrální disperse 3. druhu*.

V intervalu j definujeme funkci ω_n (ω_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\omega_n(t)$ ($\omega_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 4-konjugovaný bod s bodem t. Funkci ω_n (ω_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 4. druhu*. Funkci ω_1 nazýváme *základní centrální disperse 4. druhu*.



Obr. 6 Centrální disperse

Z předchozího obrázku vidíme, že pro každý bod $t \in j$ platí následující nerovnosti:

$$\cdots < \chi_{-2}(t) < \varphi_{-1}(t) < \chi_{-1}(t) < t = \varphi_0(t) < \chi_1(t) < \varphi_1(t) < \chi_2(t) < \cdots,$$

$$\cdots < \omega_{-2}(t) < \psi_{-1}(t) < \omega_{-1}(t) < t = \psi_0(t) < \omega_1(t) < \psi_1(t) < \omega_2(t) < \cdots.$$

Poznámka. Centrální disperse jsme definovali pouze pro rovnice oscilatorické s nosičem $q < 0$. Předchozí definici však lze rozšířit i pro rovnice neoscilatorické, které mají k-konjugované body, kde $k = 1, 2, 3, 4$. Označíme-li $j_{k,n}$ ($i_{k,n}$) otevřené podintervaly intervalu j těch bodů $t \in j$, k nimž existují n-té pravé (levé) k-konjugované body ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), pak lze definici centrálních dispersí zúžit pouze na tyto podintervaly.

Je zřejmé, že je-li diferenciální rovnice vpravo (vlevo) oscilatorická, pak všechny intervaly $j_{k,n}$ ($i_{k,n}$) se shodují s intervalem j. Dále, je-li rovnice oboustranně oscilatorická, pak se všechny intervaly $i_{k,n}$, $j_{k,n}$ shodují s j.

3.1.1 Některé vlastnosti centrálních dispersí

Uvažujme oscilatorickou rovnici (q) v intervalu j s nosičem q, $q(t) < 0$ pro každé $t \in j$, a bází (u, v). Pak platí:

1. Každá centrální disperse je v intervalu j spojitá a rostoucí funkce.

2. Obor hodnot každé centrální disperse je interval j.

3. Je-li nosič q rovnice (q) třídy C^k ($k = 0, 1, \dots$), pak všechny centrální disperse 1. druhu jsou třídy C^{k+3} a všechny centrální disperse 2., 3. a 4. druhu třídy C^{k+1}.

4. Z Věty 1.5.2 okamžitě plyne, že pro libovolnou bázi (u, v) rovnice (q) a libovolný bod $t \in j$ platí:

$$u(t)v(\varphi_n(t)) = v(t)u(\varphi_n(t)), \qquad u'(t)v'(\psi_n(t)) = v'(t)u'(\psi_n(t)), \tag{3.1.1}$$

$$u(t)v'(\chi_m(t)) = v(t)u'(\chi_m(t)), \qquad u'(t)v(\omega_m(t)) = v'(t)u(\omega_m(t)),$$

   $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Tyto vztahy nazýváme *funkcionální rovnice centrálních dispersí.*

5. Nechť $q \in C^2$. Pak existuje průvodní rovnice $(\widehat{q})$ k rovnici (q) a platí, že libovolná n-tá centrální disperse 2. druhu rovnice (q) je n-tou centrální dispersí 1. druhu průvodní rovnice $(\widehat{q})$.

Důkazy těchto tvrzení lze nalézt v [25], str. 118–122.

Derivace centrálních dispersí

V dalším textu budeme pracovat nejen s centrálními dispersemi, ale i s jejich derivacemi. Ukážeme některé vztahy pro první derivaci centrálních dispersí 1. druhu. Z úsporných důvodů nebudeme uvádět vztahy pro derivace centrálních dispersí ostatních druhů, které lze odvodit obdobným způsobem.

Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q), φ_n její n-tá centrální disperse 1. druhu a $t \in j$. Pak první derivaci φ_n' lze vyjádřit pomocí:

a) lineárně nezávislých řešení u, v a jejich derivací u', v'

$$\varphi_n'(t) = \frac{u(\varphi_n(t))v'(t) - u'(t)v(\varphi_n(t))}{u'(\varphi_n(t))v(t) - u(t)v'(\varphi_n(t))}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.2}$$

b) řešení u a jeho derivace u'

$$\varphi_n'(t) = \begin{cases} \frac{u^2(\varphi_n(t))}{u^2(t)} & \text{pro} \quad t \in j, \quad \text{pro něž} \quad u(t) \neq 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \frac{u'^2(t)}{u'^2(\varphi(t))} & \text{pro} \quad t \in j, \quad \text{pro něž} \quad u(t) = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{3.1.3}$$

c) první amplitudy r báze (u, v)

$$\varphi_n'(t) = \frac{r^2(\varphi_n(t))}{r^2(t)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.4}$$

d) první fáze α rovnice (q)

$$\varphi_n'(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha'(\varphi_n(t))}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.5}$$

e) nosiče q rovnice (q)

$$\varphi_n'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4n-3})}{q(t_{4n-1})}, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3.1.6}$$

kde $t_1, \dots, t_{4n}$ jsou vhodná čísla taková, že $\varphi_{k-1}(t) < t_{4k-3} < \chi_k(t) < t_{4k-1} < \varphi_k(t)$ a $\psi_{k-1}(t) < t_{4k-2} < \omega_k(t) < t_{4k} < \psi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $t_0 = t$.

Důkaz.

Naznačme odvození vztahů (3.1.2) až (3.1.4). Důkazy dalších dvou vztahů lze nalézt v [25], str. 123 – 125 a 127.

Vztah (3.1.2) dostaneme okamžitě derivací prvního ze vztahů (3.1.1).

Při důkazu vztahu (3.1.3) lze postupovat takto: Vyjděme ze vztahu (3.1.2) a pokusme se z něj eliminovat řešení v a v'. Je-li $u(t) \neq 0$ vynásobíme čitatele i jmenovatele této rovnice výrazem $u(t) \cdot u(\varphi(t))$ a k jejich úpravě využijeme vztahu (3.1.1). Tedy

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))(v'(t)u(t) - u'(t)v(t))}{u^2(t)(u'(\varphi(t))v(\varphi(t)) - u(\varphi(t))v'(\varphi(t)))}.$$

Dělením wronskiánem w, pro nějž zřejmě $w(t) = w(\varphi(t))$, dostáváme

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))}{u^2(t)} \quad \text{pro} \quad t \in j, \text{pro něž je} \quad u(t) \neq 0.$$

Je-li $u(t) = 0$, vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem $u'(t) \cdot u'(\varphi(t))$, který je určitě různý od nuly a po úpravě obdržíme výsledný vztah

$$\varphi'(t) = \frac{u'^2(t)}{u'^2(\varphi(t))} \quad \text{pro} \quad t \in j, \text{pro něž je} \quad u(t) = 0.$$

Při odvození vztahu (3.1.4) lze postupovat takto: Předpokládejme, že $u(t) \neq 0$ (v důsledku lineární nezávislosti řešení u, v musí být vždy jedna z hodnot $u(t)$, $v(t)$ různá od nuly), vyjděme ze vztahu (3.1.3) a použijme následující úpravy

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))}{u^2(t)} = \frac{u^2(\varphi(t))(u^2(t)+v^2(t))}{u^2(t)(u^2(\varphi(t))+v^2(\varphi(t)))} \cdot \frac{u^2(\varphi(t))+v^2(\varphi(t))}{u^2(t)+v^2(t)} = \frac{1+\frac{v^2(t)}{u^2(t)}}{1+\frac{v^2(\varphi(t))}{u^2(\varphi(t))}} \cdot \frac{u^2(\varphi(t))+v^2(\varphi(t))}{u^2(t)+v^2(t)}.$$

S využitím vztahu (3.1.1) a definice první amplitudy dostaneme okamžitě dokazované tvrzení.

3.1.2 Vztah mezi centrálními dispersemi a fázemi

V tomto odstavci uvedeme tzv. Abelovy funkcionální rovnice, jež udávají souvislost mezi centrálními dispersemi a fázemi.

Věta 3.1.2 *Nechť α a β jsou první a druhá fáze báze (u,v) diferenciální rovnice (q) takové, že* $0 < |\beta - \alpha| < \pi$. *Dále nechť φ_n, ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$) jsou centrální disperse dané v Definici* 3.1.1. *Pak pro všechna $t \in j$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ platí*

$$\alpha(\varphi_n(t)) = \alpha(t) + \varepsilon n \pi, \tag{3.1.7}$$

$$\beta(\psi_n(t)) = \beta(t) + \varepsilon n \pi,$$

$$\alpha(\omega_m(t)) = \beta(t) + \frac{1}{2}((2m - \operatorname{sgn} m)\varepsilon \mp 1)\pi,$$

$$\beta(\chi_m(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{2}((2m - \operatorname{sgn} m)\varepsilon \pm 1)\pi,$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$. První znaménko platí pro případ $0 < \beta - \alpha < \pi$ *a druhé znaménko pro případ* $-\pi < \beta - \alpha < 0$.

Výše uvedené rovnice se nazývají Abelovy funkcionální rovnice pro centrální disperse.

Důkaz.

1. Nejprve vysvětleme podmínku omezující výběr fází α, β, tj. podmínku $0 < |\beta - \alpha| < \pi$: Dosazením vztahů (2.1.7) a (2.2.4) do wronskiánu $w = uv' - u'v$ dostáváme

$$r \cdot s \cdot \sin(\beta - \alpha) = \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon}(-w).$$

Protože je pravá strana této rovnice všude nenulová, existuje celé číslo n takové, že

$$n\pi < \beta - \alpha < (n+1)\pi.$$

Připomeňme, že všechny první a druhé fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

$$\alpha_n = \alpha + n\pi, \qquad \beta_n = \beta + n\pi, \qquad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Zvolíme-li nyní α_0, β_0 tak, že $\alpha_0 < \beta_0$, pak lze ostatní fáze $\alpha_n \in (\alpha_0)$, $\beta_n \in (\beta_0)$ uspořádat do tzv. smíšeného fázového systému

$$\cdots < \alpha_{-1} < \beta_{-1} < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots.$$

Pak pro dvě sousední fáze α_k, β_k, resp. β_k, α_{k+1} platí

$$0 < \beta_k - \alpha_k < \pi, \quad \text{resp.} \quad -\pi < \beta_k - \alpha_{k+1} < 0.$$

Zmíněná podmínka tedy znamená, že α a β jsou dvě „sousední" fáze smíšeného fázového systému.

2. Nyní provedeme vlastní odvození rovnice (3.1.7).

   Z předpokladu $q < 0$ (platí v celé 3. kapitole) plyne, že fáze α, β jsou zároveň rostoucí nebo zároveň klesající, tj. $\operatorname{sgn}\alpha' = \operatorname{sgn}\beta' \neq 0$. Označme $\varepsilon = \operatorname{sgn}\alpha' = \operatorname{sgn}\beta'$.

   Uvažujme libovolný pevný bod $x \in j$ a takové řešení y rovnice (q), pro které platí $y(x) = 0$. Ze vztahů (2.1.9) a (2.2.5) plyne:

$$y(t) = k \cdot r(t) \cdot \sin[\alpha(t) - \alpha(x)] \tag{3.1.8}$$

$$y'(t) = \pm k \cdot s(t) \cdot \sin[\beta(t) - \alpha(x)], \tag{3.1.9}$$

   kde $k \neq 0$ je vhodná konstanta, $r(t)$ první amplituda a $s(t)$ druhá amplituda.

   Pro zjednodušení položme

$$A(t) = \alpha(t) - \alpha(x). \tag{3.1.10}$$

   Zřejmě $A(x) = 0$. Z předpokladu oscilatoričnosti rovnice (q) plyne, že α je neohraničená. Je-li $\varepsilon = 1$, tj. α je rostoucí, pak $\lim_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$. Je-li $\varepsilon = -1$, tj. α je klesající, pak $\lim_{t\to+\infty} A(t) = -\infty$.

   Vzhledem ke spojitosti a neohraničenosti funkce A v intervalu j existuje ke každému $n \in \mathbb{N}$ číslo x_1 $(x_1 > x)$ takové, že $A(x_1) = \varepsilon n\pi$. Dosazením do vztahu (3.1.8) dostaneme, že x_1 je nulový bod řešení y. Ze vztahu (3.1.10) plyne

$$\alpha(x_1) - \alpha(x) = \varepsilon n\pi. \tag{3.1.11}$$

   Tedy pro $\varepsilon = 1$ je x_1 pravý n-tý 1-konjugovaný bod s bodem x, tj. $x_1 = \varphi_n(x)$. Obdobně pro $\varepsilon = -1$ dostaneme $x_1 = \varphi_{-n}(x)$.

   Dosazením $x_1 = \varphi_n(x)$ do vztahu (3.1.11) okamžitě plyne

$$\alpha(\varphi_n(x)) = \alpha(x) + \varepsilon n\pi.$$

   Obdobně za použití vztahu (3.1.9) můžeme uvažovat funkci $B(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ a analogicky dojdeme k rovnici pro centrální dispersi χ_m. Jestliže v rovnici (3.1.8) zvolíme místo konstanty $\alpha(x)$ konstantu $\beta(x)$, tj. $y(t) = k \cdot r(t) \cdot \sin[\alpha(t) - \beta(x)]$, dojdeme k rovnici pro centrální dispersi ω_m a obdobně, uvažujeme-li rovnici (3.1.9) ve tvaru $y'(t) = \pm k \cdot s(t) \cdot \sin[\beta(t) - \beta(x)]$, dojdeme k rovnici pro centrální dispersi ψ_n.

3.1.3 Diferenciální rovnice pro centrální disperse

V tomto odstavci ukážeme, že centrální disperse oscilatorických rovnic jsou řešením jisté nelineární diferenciální rovnice 3. řádu. Tento výsledek hraje významnou roli především v teorii transformací.

Věta 3.1.3 *Všechny centrální disperse 1. druhu φ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) rovnice (q) s nosičem q splňují v intervalu j nelineární diferenciální rovnici 3. řádu*

$$-\{\varphi_n, t\} + q(\varphi_n){\varphi_n'}^2 = q(t). \qquad (qq)$$

Dále, je-li $q \in C^2$, pak všechny centrální disperse ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$) 2., 3. a 4. druhu splňují v intervalu j rovnice

$$-\{\psi_n, t\} + \widehat{q}(\psi_n){\psi_n'}^2 = \widehat{q}(t), \qquad (\widehat{q}\widehat{q})$$

$$-\{\chi_m, t\} + \widehat{q}(\chi_m){\chi_m'}^2 = q(t), \qquad (\widehat{q}q)$$

$$-\{\omega_m, t\} + q(\omega_m){\omega_m'}^2 = \widehat{q}(t), \qquad (q\widehat{q})$$

kde q je nosič rovnice (q) a $\widehat{q}$ nosič rovnice průvodní $(\widehat{q})$ k rovnici (q). Tyto rovnice se nazývají nelineární diferenciální rovnice 3. řádu pro centrální disperse.

Důkaz.

Nechť $t \in j$ libovolně. Schwarzovskou derivací (viz Věta 1.3.1) Abelovy funkcionální rovnice pro centrální dispersi 1. druhu $\alpha(\varphi_n(t)) = \alpha(t) + \varepsilon n\pi$ (3.1.2) získáme

$$\{\alpha, \varphi_n(t)\} \cdot {\varphi_n'}^2(t) + \{\varphi_n, t\} = \{\alpha, t\}.$$

Dále využitím vztahu $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$ (2.1.8) dostaneme

$$(q(\varphi_n) + \alpha'^2(\varphi_n)) \cdot \varphi_n'^2(t) - \{\varphi_n, t\} = q(t) + \alpha'^2(t),$$

odkud

$$q(t) = q(\varphi_n) \cdot {\varphi_n'}^2 - \{\varphi_n, t\},$$

neboť $\alpha'^2(\varphi_n)\varphi_n'^2(t) = \alpha'^2(t)$ (dostaneme ihned derivací vztahu (3.1.2)).

Obdobně postupujeme při odvozování rovnic pro ostatní centrální disperse.

3.1.4 Algebraická struktura množiny centrálních dispersí

Mezi centrálními dispersemi jednoho i různých druhů existuje mnoho vzájemných vztahů vyplývajících ze skládání těchto funkcí. V tomto odstavci naznačíme některé výsledky, k nimž O. Borůvka při zkoumání těchto vztahů dospěl. Přitom budeme používat následující označení:

Pro dvě funkce f, g definované v intervalu j značí fg skládání funkcí ve smyslu

$$(fg)(t) = f(g(t)).$$

Dále nechť f^{-1} značí funkci inverzní k funkci f (pokud existuje), f^n složenou funkci $ff \cdots f$ počítáno n-krát, f^{-n} složenou funkci $f^{-1}f^{-1} \cdots f^{-1}$ počítáno n-krát a konečně $f^0(t) = t$.

Nechť Φ, Ψ, χ, Ω značí množiny všech centrálních dispersí 1., 2., 3. a 4. druhu. Schématicky jsou vztahy vyplývající ze skládání centrálních dispersí různých druhů znázorněny v následující tabulce, jejíž význam je následující: Složením dvou centrálních dispersí $a \in A$, $b \in B$ (A, B značí jednu z množin Φ, Ψ, χ, Ω) vznikne funkce, která není centrální dispersí nebo je centrální dispersí ab z množiny C, která se nachází v průsečíku řádku A a sloupce B, tj. $ab \in C$. Například složením dvou centrálních dispersí 1. druhu dostaneme zase centrální dispersi 1. druhu, konkrétně platí $\varphi_r \varphi_s = \varphi_{r+s}$, složením centrální disperse 1. druhu s centrální dispersí 2. druhu dostaneme funkci, která není centrální dispersí žádného druhu, složením centrální disperse 4. druhu s centrální dispersí 3. druhu dostaneme centrální dispersi 1. druhu, atd.

	Φ	Ψ	χ	Ω
Φ	Φ	–	–	Ω
Ψ	–	Ψ	χ	–
χ	χ	–	–	Ψ
Ω	–	Ω	Φ	–

Tab. 1 Skládání centrálních dispersí

Grupa centrálních dispersí 1. druhu $\mathcal{C}$

Všimněme si nyní chování centrálních dispersí 1. druhu. Přímo z definice centrálních dispersí plynou následující vztahy

$$\varphi_n \varphi_{-n} = t, \quad \varphi_n = \varphi_1^n, \quad \varphi_{-n} = \varphi_{-1}^n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Tedy ke každé centrální dispersi 1. druhu existuje funkce inverzní a všechny její hodnoty se dají vyjádřit pomocí základní centrální disperse φ_1 a funkce k ní inverzní φ_{-1}.

Z těchto vztahů tedy plyne, že množina Φ všech centrálních dispersí 1. druhu tvoří spolu s operací skládání nekonečnou cyklickou grupu generovanou prvkem φ_1. Označme ji $\mathcal{C}$. Neutrálním (jednotkovým) prvkem této grupy je identita $\varphi_0 = t$ a ke každému prvku φ_k je prvek φ_{-k} prvkem inverzním. Lze také dokázat, že všechny centrální disperse 1. druhu se sudými indexy tvoří v této grupě podgrupu $\mathcal{S}$. Tedy

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{C}.$$

K obdobnému závěru lze dospět také v případě množiny Ψ centrálních dispersí 2. druhu.

Poznámka. V souvislosti s centrálními dispersemi řeší O. Borůvka v monografii [25] řadu otázek z teorie oscilatorických rovnic v Jacobiho tvaru, například určení všech rovnic (q) s předepsanou základní centrální dispersí libovolného druhu, zkoumání rovnic (q) se stejnou základní centrální dispersí 1. druhu nebo rovnic (q), které mají stejnou základní centrální dispersi 1. a 2. druhu a rovnic, které mají stejnou základní centrální dispersi 3. a 4. druhu.

Centrální disperse pomáhají v řešení otázek globálního charakteru hlavně tím, že popisují vztahy mezi řešeními nebo derivacemi řešení v konjugovaných bodech těchto řešení.

Poznámka. (Jiný pohled na centrální disperse)
Centrální dispersi 1. druhu jsme definovali jako funkci, která bodu $t \in j$ přiřadí jistý 1-konjugovaný bod s bodem t. Neboli, nulovému bodu nějakého řešení u rovnice (q) přiřadí jiný nulový bod téhož řešení u. Obdobně 2-centrální dispersi jsme definovali jako funkci, která bodu $t \in j$ přiřadí jistý 2-konjugovaný bod s bodem t, neboli nulovému bodu řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$ přiřadí nulový bod řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$. Analogicky 3-centrální disperse je funkce, která nulovému bodu řešení u rovnice (q) přiřadí nulový bod řešení $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ rovnice $(\widehat{q})$ a 4-centrální disperse funkce, která nulovému bodu řešení $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ rovnice $(\widehat{q})$ přiřadí nulový bod řešení u rovnice (q).

Můžeme tedy říci, že se jedná o zobrazení mezi nulovými body řešení jedné rovnice a nulovými body řešení rovnice druhé. U centrálních dispersí jsou těmito rovnicemi rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$. V obecném případě však můžeme uvažovat zobrazení mezi nulovými body řešení dvou libovolných rovnic (q), (Q). Takové zobrazení zavedeme v následujícím odstavci a nazveme ho obecnou dispersí.

3.2 Obecné disperse

Obecnou dispersí budeme rozumět funkci jedné proměnné, která bude udávat souvislost mezi nulovými body řešení rovnice (q) a nulovými body řešení rovnice (Q).

Nechť rovnice (q) je oscilatorická na intervalu $j = (a, b)$ a nechť (u, v) značí její bázi, w wronskián řešení u, v a r lineární prostor řešení rovnice (q).

Dále nechť rovnice (Q) je oscilatorická na intervalu $J = (A, B)$ a nechť (U, V) značí její bázi, W wronskián řešení U, V a R lineární prostor řešení rovnice (Q).

Definice 3.2.1 Nechť $p : r \to R$ je lineární zobrazení takové, že obrazem každého řešení $y \in r$ daného vztahem $y = c_1u + c_2v$ je řešení $Y \in R$ dané vztahem $Y = c_1U + c_2V$ se stejnými konstantami c_1, c_2. Píšeme $Y = py$.

Lineární zobrazení $p : r \to R$ se nazývá *normalizované vzhledem k bodům* t_0, T_0 (v tomto pořadí), jestliže zobrazí každé řešení $y \in r$ rovnice (q), které prochází bodem t_0 na řešení Y rovnice (Q), které prochází bodem T_0, tj. jestliže $y(t_0) = 0$, pak $(py)(T_0) = Y(T_0) = 0$.

Poznamenejme, že ke každému zobrazení $p : r \to R$ existuje inverzní zobrazení $p^{-1} : R \to r$ takové, že každé řešení $Y \in R$ dané vztahem $Y = C_1U + C_2V$ zobrazí na řešení $y \in r$ dané vztahem $y = C_1u + C_2v$ se stejnými konstantami C_1, C_2. Píšeme $y = p^{-1}Y$.

Nyní můžeme definovat obecnou dispersi rovnic (q), (Q).

Definice 3.2.2 Buď dáno $t_0 \in j$ a $T_0 \in J$ libovolně. Označme t_n n-té 1-konjugované body s bodem t_0 rovnice (q) a T_n n-té 1-konjugované body s bodem T_0 rovnice (Q) $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$. Dále nechť $p : r \to R$ je zobrazení normalizované vzhledem k bodům t_0, T_0.

Nechť $t \in j$ libovolně a y je řešení rovnice (q) procházející bodem t. Pak definujeme hodnotu $X(t)$ funkce X v bodě t takto:

Je-li $w/W > 0$ pak $X(t)$ je takový nulový bod řešení py rovnice (Q), že je-li $t \in (t_n, t_{n+1})$, pak $X(t) \in (T_n, T_{n+1})$ a $X(t_n) = T_n$.

Je-li $w/W < 0$ pak $X(t)$ je takový nulový bod řešení py rovnice (Q), že je-li $t \in (t_n, t_{n+1})$, pak $X(t) \in (T_{-n-1}, T_{-n})$ a $X(t_n) = T_{-n}$.

Funkce X, jež je definována na intervalu j, se nazývá *obecná disperse rovnic* (q), (Q) (v tomto pořadí) *vzhledem k bodům* t_0, T_0 *a lineárnímu zobrazení* p, stručně *obecná disperse rovnic* (q), (Q). Čísla t_0, T_0 nazýváme *počáteční body* a lineární zobrazení p *generátor obecné disperse* X.

V teorii obecných dispersí hraje velmi důležitou roli následující věta, jež vyjadřuje obecnou dispersi pomocí fází rovnic (q) a (Q).

Věta 3.2.3 *Nechť X je obecná disperse rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Dále nechť α je libovolná fáze báze (u, v) rovnice (q) taková, že $\alpha(t_0) = 0$ a $\mathcal{A}$ libovolná fáze báze (U, V) rovnice (Q) taková, že $\mathcal{A}(T_0) = 0$. Pak obecná disperse X splňuje v intervalu j funkcionální rovnici*

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)), \tag{3.2.1}$$

tj. pro obecnou dispersi platí

$$X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t)), \tag{3.2.2}$$

kde $\mathcal{A}^{-1}$ značí inverzní funkci k funkci $\mathcal{A}$.

Důkaz.
Důkaz lze nalézt v [25], str. 174–176.

Z rovnice (3.2.2) vidíme, že vlastnosti obecných dispersí lze obdržet z vlastností prvních fází rovnic (q), (Q). Zejména platí

1. $$X(j) = J, \qquad X \in C^3, \qquad X' \neq 0.$$
2. Je-li $w/W > 0$, pak X roste v intervalu j od A k B, je-li $w/W < 0$, pak X klesá v intervalu j od B k A.
3. Inverzní funkcí k obecné dispersi $X(t)$ je obecná disperse $x(T)$ diferenciálních rovnic (Q), (q) generovaná zobrazením p^{-1} inverzním k zobrazení p s počátečními body T_0, t_0.

Věta 3.2.4 *Všechny obecné disperse X rovnic (q), (Q) splňují v intervalu j nelineární diferenciální rovnici 3. řádu*

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \tag{Qq}$$

kterou nazýváme diferenciální rovnicí obecných dispersí rovnic (q), (Q).

Analogicky všechny obecné disperse x rovnic (Q), (q), inverzní k obecným dispersím X, splňují v intervalu J nelineární diferenciální rovnici 3. řádu

$$-\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T), \quad \textit{kde} \quad \dot{} = d/dT. \tag{qQ}$$

Důkaz.

Nechť $t \in j$ libovolně. Schwarzovskou derivací (viz Věta 1.3.1) vztahu $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$ (3.2.1) získáme

$$\{\alpha, t\} = \{\mathcal{A}, X(t)\} \cdot X'^2(t) + \{X, t\}.$$

Dále využitím vztahu $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$ (2.1.8) dostaneme

$$q(t) + \alpha'^2(t) = (Q(X) + \dot{\mathcal{A}}^2(X)) \cdot X'^2(t) - \{X, t\},$$

odkud

$$q(t) = Q(X) \cdot X'^2(t) - \{X, t\},$$

neboť $\alpha'^2(t) = \dot{\mathcal{A}}^2(X) \cdot X'^2(t)$ (dostaneme ihned derivací vztahu (3.1.2)).

Víme, že obecná disperse je jednoznačně určena počátečními body t_0, T_0 a lineárním zobrazením p normalizovaným vzhledem k bodům t_0, T_0. Nyní bez důkazu uvedeme další dvě možnosti jednoznačného určení obecné disperse a odpovíme na otázku, jak dalece je obecná disperse charakterizována pouze daným lineárním zobrazením.

- Nechť t_0, X_0, X'_0 ($\neq 0$), X''_0 jsou libovolná čísla. Pak existuje právě jedna obecná disperse X rovnic (q), (Q) daná počátečními podmínkami
$$X(t_0) = X_0, \qquad X'(t_0) = X'_0, \qquad X''(t_0) = X''_0.$$
- Libovolné první fáze α, $\mathcal{A}$ diferenciálních rovnic (q), (Q) určují právě jednu obecnou dispersi X rovnic (q), (Q) jakožto řešení funkcionální rovnice
$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)).$$
- Lineární zobrazení $p : r \to R$ určuje právě jeden spočetný systém obecných dispersí rovnic (q), (Q) s generátorem p. Je-li $X(t)$ jedna obecná disperse tohoto systému, pak ostatní jsou tvaru $X(\varphi_n(t))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kde φ_n je n-tá centrální disperse 1. druhu.

Víme, že každá obecné disperse je řešením rovnice (Qq). Na otázku, zda rovnice (Qq) má i jiná řešení než obecné disperse, odpovídá následující věta. Přitom nás ovšem zajímají pouze řešení regulární, tj. $X' \neq 0$.

Věta 3.2.5 *Množina všech regulárních řešení diferenciální rovnice (Qq) definovaných v intervalu j je tvořena právě obecnými dispersemi rovnic (q), (Q).*

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 179–180.

Disperse k-tého druhu; $k = 1, 2, 3, 4$

Speciálními případy obecných dispersí jsou disperse 1., 2., 3. a 4. druhu.

Definice 3.2.6 Nechť rovnice (q) je oscilatorická v intervalu j a nechť pro nosič q rovnice (q) platí, že $q < 0$ a $q \in C^2$ pro každé $t \in j$.

Dispersí 1. druhu rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic (q), (q); *dispersí 2. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic $(\widehat{q})$, $(\widehat{q})$; *dispersí 3. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic (q), $(\widehat{q})$ a konečně *dispersí 4. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic $(\widehat{q})$, (q).

Poznámky.

1. Nechť X_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ značí disperse k-tého druhu rovnice (q). Pak z Věty 3.2.3 plynou následující vztahy
$$\alpha(X_1) = \overline{\alpha}(t), \quad \beta(X_2) = \overline{\beta}(t), \quad \beta(X_3) = \overline{\alpha}(t), \quad \alpha(X_4) = \overline{\beta}(t),$$
kde α, $\overline{\alpha}$ značí první fáze a β, $\overline{\beta}$ druhé fáze rovnice (q).

2. Disperse k-tého druhu rovnice (q), $k = 1, 2, 3, 4$, přirozeně zahrnují centrální disperse odpovídajících druhů. Na ukázku uveďme, kdy je disperse 1. druhu rovna centrální dispersi 1. druhu. Pro disperse ostatních druhů jsou podmínky analogické.

   (a) Disperse 1. druhu X_1 rovnice (q) určená vztahem $\alpha(X_1) = \overline{\alpha}(t)$ je centrální dispersí 1. druhu právě tehdy, když fáze α, $\overline{\alpha}$ náleží do prvního fázového systému stejné báze rovnice (q). V takovém případě $X_1 = \varphi_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ právě tehdy, když $\overline{\alpha} = \alpha + n\pi \operatorname{sgn} \alpha'$.

   (b) Nechť X_1 je dispersí 1. druhu rovnice (q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Pak $X_1 = \varphi_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ právě tehdy, když $T_0 = \varphi_n(t_0)$ a $p = ce$, kde e značí identické zobrazení prostoru r do sebe a c nenulovou konstantu.

3.2.1 Algebraická struktura množiny obecných dispersí

Uvažujme diferenciální rovnice (q), (Q) na intervalech $j = J = (-\infty, \infty)$. Nechť D značí množinu obecných dispersí rovnic (q), (Q).

Víme, že každá obecná disperse $X \in D$ je neohraničená funkce, pro niž platí $X \in C^3$ a $X' \neq 0$. Z toho plyne (viz Věta 2.1.4), že X je neohraničenou první fází oscilatorické rovnice na intervalu $(-\infty, \infty)$. Platí tedy, že množina obecných dispersí D je podmnožinou grupy fází $\mathcal{G}$, tj. $D \subset \mathcal{G}$.

Obecná disperse $X \in D$ je jednoznačně určena vztahem $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$, kde α a $\mathcal{A}$ jsou libovolné první fáze rovnic (q) a (Q). Z odstavce týkajícího se algebraických vlastností centrálních dispersí víme, že fáze α a $\mathcal{A}$ určují množiny $\mathcal{F}\alpha$ a $\mathcal{F}\mathcal{A}$ všech fází rovnic (q) a (Q). $\mathcal{F}$ přitom značí fundamentální podgrupu grupy fází $\mathcal{G}$. Na základě těchto skutečností lze ukázat, že pro množinu obecných dispersí D rovnic (q), (Q) platí
$$D = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}\alpha.$$

Grupa dispersí 1. druhu rovnice (q)

Připomeňme, že dispersí 1. druhu rozumíme dispersi rovnic (q), (q). Tedy pro množinu $\mathcal{D}$ dispersí 1. druhu platí

$$\mathcal{D} = \alpha^{-1}\mathcal{F}\alpha.$$

Lze dokázat, že množina $\mathcal{D}$ tvoří spolu s operací skládání grupu, kterou nazveme *grupa dispersí 1. druhu rovnice* (q) a je podgrupou grupy fází $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$.

Všechny rostoucí disperse 1. druhu rovnice (q) tvoří v této grupě invariantní podgrupu $\mathcal{B}$. Tato podgrupa má netriviální centrum, kterým je nekonečná cyklická grupa $\mathcal{C}$ centrálních dispersí 1. druhu rovnice (q), tj. platí

$$\varphi_n X = X\varphi_n \quad \text{pro každý prvek} \quad X \in \mathcal{B},$$

kde φ_n $(n = 0, \pm 1 \pm 2)$ jsou centrální disperse 1. druhu.

Shrneme-li naše dosavadní poznatky, dostáváme: Disperse 1. druhu diferenciální rovnice (q) tvoří grupu $\mathcal{D}$. Rostoucí disperse 1. druhu tvoří v grupě $\mathcal{D}$ invariantní podgrupu $\mathcal{B}$. Nekonečná cyklická grupa $\mathcal{C}$ tvořená centrálními dispersemi 1. druhu rovnice (q) je centrum grupy $\mathcal{B}$. Centrální disperse 1. druhu se sudými indexy tvoří invariantní podgrupu $\mathcal{S}$ v grupě $\mathcal{D}$. Tedy

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}.$$

Zabýváme-li se algebraickou strukturou dispersí 2. druhu rovnice (q), dojdeme k závěrům analogickým jako u dispersí 1. druhu.

Závěrem celé kapitoly poznamenejme, že O. Borůvka zvolil název „disperse“ s úmyslem, aby připomínal rozložení (rozptyl, dispersi) nulových bodů řešení rovnice (q) a označení „centrální“ je odvozeno právě z grupových vlastností centrálních dispersí 1. a 2. druhu.