2 Teorie fází

V této kapitole se seznámíme s teorií jistých funkcí jedné proměnné, charakterizujících rovnici (q), které O. Borůvka nazval fázemi. Budeme se zabývat otázkami existence a jednoznačnosti fází, vztahem fází a řešení rovnice (q), vlastnostmi fází a na základě těchto vlastností budeme charakterizovat každý typ a druh rovnice (q).

V celé kapitole budeme uvažovat rovnici

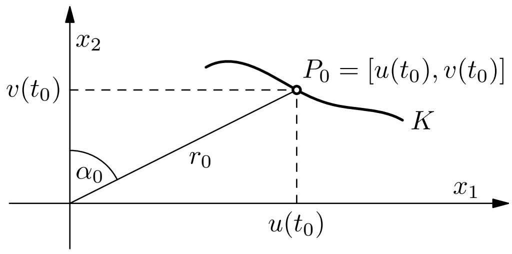
$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \tag{q}$$

kde $j = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$.

Nejprve proveďme stručný úvod do celé problematiky na základě již známých skutečností.

Nechť (u, v) je báze řešení rovnice (q) a K křivka řešení, jejíž každý bod $P = [x_1, x_2]$ je dán vztahem $[x_1, x_2] = [u(t), v(t)]$, $t \in j$ v souřadném systému x_1x_2 s počátkem O.

Nechť $t_0 \in j$ libovolně. Pak $P_0 = [u(t_0), v(t_0)]$ je odpovídající bod křivky K. Označme symbolem r_0 průvodič bodu P_0 a α_0 úhel, který svírá průvodič r_0 s osou x_2. Předpokládáme přitom, že $r_0 > 0$, $\alpha_0 \in < 0, 2\pi)$.



Obr. 2 Zavedení první fáze

Z obrázku jsou okamžitě vidět následující vztahy

$$r_0 = \sqrt{u^2(t_0) + v^2(t_0)}, \qquad u(t_0) = r_0 \sin \alpha_0, \qquad v(t_0) = r_0 \cos \alpha_0.$$

Platí tedy

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{u(t_0)}{v(t_0)}.$$

Uvažujeme-li předchozí vztahy pro libovolné $t \in j$, dospějeme k definici spojité funkce $\alpha(t)$, jež je definována na intervalu j, nabývá hodnoty α_0 v bodě t_0 a splňuje na intervalu j rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{2.0.1}$$

všude, kromě nulových bodů funkce v. Takovou funkci budeme nazývat první fází báze (u, v).

Než přistoupíme k vlastní definici první a druhé fáze báze (u, v), zaveďme pojem první a druhé amplitudy báze.

Definice 2.0.1 Nechť (u, v) je báze rovnice (q) na intervalu j. Funkce r, s, definované na intervalu j vztahem

$$r(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \qquad s(t) = \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)},$$

se nazývají *první* a *druhá amplituda* báze (u, v).

2.1 První fáze rovnice (q)

Na základě předběžných úvah definujme první fázi báze (u, v) pomocí řešení u a v.

Definice 2.1.1 Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q).

První fází báze (u, v) rozumíme libovolnou funkci α, spojitou na intervalu j, která na tomto intervalu splňuje vztah

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{2.1.1}$$

v každém bodě intervalu j, kromě nulových bodů řešení v.

První fází diferenciální rovnice (q) rozumíme první fázi libovolné báze rovnice (q).

Poznámka. Dále budeme často užívat místo pojmu první fáze báze (u, v) stručnějšího označení *fáze*.

Vlastnosti první fáze α báze (u, v)

Nechť α je libovolná první fáze báze (u, v) rovnice (q) na intervalu j a w wronskián řešení u, v. Z definice první fáze, zejména z vlastností funkce tangens, můžeme ihned odvodit některé její vlastnosti.

1. Vzhledem k periodicitě funkce tg není fáze α dána jednoznačně.

   Vybereme-li libovolnou fázi α, pak všechny fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

   $$\alpha_n(t) = \alpha(t) + n\pi, \qquad \text{kde} \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

   a budeme říkat, že tvoří tzv. *první fázový systém* (α) báze (u, v).

2. Nechť $t_0 \in j$. Pak z definice fáze a z předchozího bodu okamžitě plyne:

   $$u(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha(t_0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.2}$$

   $$v(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha(t_0) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   V nulových bodech řešení u (v) je hodnota každé první fáze sudým (lichým) násobkem $\pi/2$. A naopak každý bod v intervalu j, v němž první fáze nabývá hodnot sudých (lichých) násobků $\pi/2$ je nulovým bodem řešení u (v). Dále vidíme, že každá fáze má právě jeden nulový bod a ten je nulovým bodem řešení u; současně je každý nulový bod řešení u nulovým bodem právě jedné fáze z prvního fázového systému.

3. Vyjádření první fáze α:

   Nechť ξ_0 je nulový bod řešení v, tj. $v(\xi_0) = 0$. Označme ξ_n (ξ_{-n}), $n = 1, 2, \ldots, n$-tý nulový bod řešení v následující (předcházející) bodu ξ_0. Pak

$$\alpha(t) = \begin{cases} \text{arctg}\, \frac{u(t)}{v(t)} - n\pi \text{sgn}\, w & \text{pro} \quad t \in (\xi_n, \xi_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi)\text{sgn}\, w & \text{pro} \quad t = \xi_n. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

   Z důvodu zjednodušení zápisu zavedeme novou funkci „Arctan“, která bude definována vztahem (2.1.3). Dále tedy budeme vyjádření (2.1.3) zapisovat ve tvaru

$$\alpha(t) = \text{Arctan}\, \frac{u(t)}{v(t)}. \tag{2.1.4}$$

   Vyjdeme-li od konkrétního nulového bodu ξ_0 řešení v, pak je fáze α dána vztahem (2.1.3) jednoznačně. Každou další fázi α_n ze stejného fázového systému (α) obdržíme pomocí vztahu $\alpha_n = \alpha + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Je zřejmé, že konkrétní volba nulového bodu ξ_0 ovlivní výběr fáze $\alpha \in (\alpha)$.

4. Z přechozích bodů plyne, že zvolíme-li $t_0 \in j$ libovolně, pak ke každému celému číslu n existuje právě jedna fáze $\alpha_n \in (\alpha)$ taková, že

$$(n - \frac{1}{2})\pi \leq \alpha_n(t_0) < (n + \frac{1}{2})\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.1.5}$$

5. Derivací vztahu (2.1.3) dostáváme

$$\alpha' = \frac{v^2}{u^2 + v^2}(\frac{u'v - uv'}{v^2}) = -\frac{w}{u^2 + v^2} \neq 0.$$

   Odtud také plyne, že $\alpha' \in C^2$, neboť u, v jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q) a tudíž jsou třídy C^2. Konečně, je-li $\alpha' \in C^2$, pak $\alpha \in C^3$. Pro každou fázi α tedy platí

$$\alpha \in C^3, \qquad \alpha' \neq 0.$$

   Dále dostáváme: Je-li $w < 0$, pak první fáze α je rostoucí funkce pro každé $t \in j$ a je-li $w > 0$, pak α je klesající funkce pro každé $t \in j$.

Uveďme nyní vztah mezi první fází α a řešením u a v rovnice (q). Vzhledem k jeho důležitosti ho zformulujeme do věty.

Věta 2.1.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Nechť ξ_0 je nulový bod řešení v, tj. $v(\xi_0) = 0$. Označme ξ_n (ξ_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$, n-tý nulový bod řešení v následující (předcházející) bodu ξ_0. Pak existuje první fáze α báze (u, v) tak, že platí*

$$u(t) = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \cos \alpha(t), \tag{2.1.6}$$

tj.

$$u(t) = \varepsilon r(t) \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \varepsilon r(t) \cos \alpha(t), \tag{2.1.7}$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} v'(\xi_0)$ *a nazývá se signaturou zvolené fáze* α*,* w *je wronskián řešení* u*,* v *a* $r(t)$ *je první amplituda.*

Vztah mezi nosičem q *rovnice* (q) *a fází* α *je jednoznačně určen vztahem*

$$q(t) = -\{tg\,\alpha, t\}, \qquad tj. \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t). \tag{2.1.8}$$

Poznámka. Vzhledem k předchozím vlastnostem fáze α je zřejmé, že signatura ε fáze α je jednoznačně dána volbou nulového bodu ξ_0 řešení v.

Je-li $\varepsilon = +1$, pak se fáze nazývá *vlastní* a je-li $\varepsilon = -1$, pak se fáze nazývá *nevlastní.*

Z vlastností nulových bodů řešení v plyne, že v uspořádání fází

$$\dots < \alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

se vlastní a nevlastní fáze pravidelně střídají.

Důsledek 2.1.3 *Nechť* α *je první fáze báze* (u, v)*. Pak libovolné řešení* $y(t)$ *rovnice* (q) *lze vyjádřit ve tvaru*

$$y(t) = k_1 \frac{\sin(\alpha(t) + k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \tag{2.1.9}$$

kde k_1*,* k_2 *jsou libovolné konstanty,* $k_1 \neq 0$*,* $0 \leq k_2 < \pi$*.*

Důkaz Věty 2.1.2.

Na rozdíl původního důkazu v knize [25], kde je uvedené tvrzení ověřeno dosazením do vztahu (2.1.1), využijeme opět metodu transformace proměnných popsanou ve Větě 1.2.1 a ukážeme, jak lze vztahy (2.1.6), (2.1.7) odvodit volbou vhodné transformace.

Uvažujme diferenciální rovnici (q) a proveďme transformaci závisle proměnné $y(t) = h(t)z(t)$ a transformaci nezávisle proměnné $z(t) = Y(T)$. Zvolme přitom za funkci h první amplitudu rovnice (q), tj.

$$h(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)},$$

kde u, v jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (q).

Podle Věty 1.2.1 (i) je funkce $y(t) = h(t)z(t)$ řešením rovnice (q) právě tehdy, když je funkce $z(t)$ řešením rovnice

$$(h^2 z')' = h(-h'' + qh)z. \tag{2.1.10}$$

Podle Věty 1.2.1 (ii) je funkce $z(t) = Y(T)$, kde $T = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma) d\sigma$, řešením rovnice (2.1.10) právě tehdy, když funkce $Y(T)$ je řešením rovnice $\ddot{Y} = Q(T)Y$, kde $Q(T) = h^3(-h'' + qh)$. Přímým dosazením funkce h a její druhé derivace h'' dostaneme $Q(T) = -w^2$ a tedy Y je tedy řešením rovnice

$$\ddot{Y} = -w^2 Y.$$

Dostali jsme rovnici s konstantními koeficienty, jejíž řešení jsou například funkce

$$Y_1(T) = \sin(wT), \qquad Y_2(T) = \cos(wT).$$

Tedy řešení rovnice (2.1.10) jsou tvaru

$$z_1(t) = \sin(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma), \qquad z_2(t) = \cos(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma)$$

a řešení rovnice (q)

$$u(t) = h(t)\sin(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma), \qquad v(t) = h(t)\cos(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma).$$

Označíme-li

$$\alpha(t) = w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma,$$

pak

$$\alpha'(t) = \frac{w}{h^2(t)}, \qquad h(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}.$$

Řešení rovnice (q) pak dostáváme ve tvaru

$$u(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\sin\alpha(t), \qquad v(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\cos\alpha(t). \tag{2.1.11}$$

Vztahy (2.1.7) obdržíme okamžitě, neboť

$$\frac{\sqrt{|w(t)|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} = h(t) = r(t).$$

Zbývá dokázat vztah (2.1.8). Víme, že funkce $u(t)$ daná vztahem (2.1.11) je řešením rovnice (q). Přímým dosazením funkce $u(t)$ a její druhé derivace do rovnice (q), tj. $u'' = qu$, dostáváme hledaný vztah (2.1.8).

Důkaz Důsledku 2.1.3

Je-li (u, v) báze rovnice (q), pak libovolné řešení $y(t)$ této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = c_1u(t) + c_2v(t).$$

Dosazením vztahů (2.1.11) dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}(l_1\sin\alpha(t) + l_2\cos\alpha(t)),$$

kde $l_1 = c_1\sqrt{|w|}$, $l_2 = c_2\sqrt{|w|}$.

Postupnými úpravami dostáváme

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\sin\alpha(t) + \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\cos\alpha(t)\right)\sqrt{l_1^2+l_2^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}(\cos\varphi\sin\alpha(t) + \sin\varphi\cos\alpha(t))\sqrt{l_1^2+l_2^2} = k_1\frac{\sin(\alpha(t)+k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}},$$

kde $k_1 = \sqrt{l_1^2+l_2^2}$, $k_2 = \varphi$.

Dvě různé fáze stejné báze (u, v)

Nechť (u, v) je libovolná pevná báze rovnice (q). Víme, že všechny fáze příslušné k této bázi tvoří první fázový systém (α) báze (u, v) a pro každé dvě fáze z (α) platí $\alpha_n = \alpha + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Uveďme nyní další vztah mezi dvěma různými fázemi ze stejného fázového systému (α).

Nechť $\alpha_0 \in (\alpha)$ je libovolná pevná fáze báze (u, v), $t \in j$ a nechť platí předpoklady a označení Věty 2.1.2.

Vyjádříme-li řešení u, v pomocí fáze α_0 ve tvaru uvedeném v Důsledku 2.1.3 a dosadíme-li tato řešení do vztahu (2.1.4), pak pro libovolnou fázi $\alpha \in (\alpha)$ dostáváme

$$\alpha(t) = \text{Arctan}\, k_1 \frac{\sin(\alpha_0(t) + k_2)}{\sin(\alpha_0(t) + k_3)}, \tag{2.1.12}$$

kde $k_1 \neq 0$, $0 \leq k_2, k_3 < \pi$.

Fáze různých bází (u, v)**,** $(\overline{u}, \overline{v})$

Doposud jsme se zabývali pouze fázemi, jež příslušely k jedné pevně dané bázi (u, v). Nyní uvedeme vztahy mezi fázemi různých bází, neboli mezi dvěma libovolnými fázemi diferenciální rovnice (q).

Nechť (u, v), $(\overline{u}, \overline{v})$ jsou dvě různé báze rovnice (q); $w, \overline{w}$ příslušné wronskiány; $\alpha, \overline{\alpha}$ příslušné první fáze daných bází a c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} konstanty takové, že determinant $\Delta = |c_{ij}| \neq 0$.

Jestliže

$$\overline{u} = c_{11}u + c_{12}v, \qquad \overline{v} = c_{21}u + c_{22}v,$$

pak platí

$$\text{tg}\, \overline{\alpha} = \frac{c_{11}\text{tg}\, \alpha + c_{12}}{c_{21}\text{tg}\, \alpha + c_{22}} \tag{2.1.13}$$

všude na intervalu j kromě bodů, kde není funkce definována.

A naopak, z platnosti vztahu (2.1.13) plyne

$$\overline{u} = \pm\sqrt{\frac{\overline{w}}{w\Delta}}(c_{11}u + c_{12}v), \qquad \overline{v} = \pm\sqrt{\frac{\overline{w}}{w\Delta}}(c_{21}u + c_{22}v).$$

Klasifikace rovnic pomocí fází

Nechť $t \in j = (a, b)$. Označme

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t), \qquad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t),$$

přičemž připouštíme i hodnoty $c, d = \pm\infty$. Pak platí

$(m-1)\pi < \lvert c - d \rvert < m\pi$	$\Leftrightarrow$	(q) je konečného typu m, obecného druhu
$\lvert c - d \rvert = m\pi$	$\Leftrightarrow$	(q) je konečného typu m, speciálního druhu
$c = \mp\infty$, d je konečné číslo	$\Leftrightarrow$	(q) je zleva oscilatorická
c je konečné číslo, $d = \pm\infty$	$\Leftrightarrow$	(q) je zprava oscilatorická
$c = \mp\infty$, $d = \pm\infty$	$\Leftrightarrow$	(q) oboustranně oscilatorická

Vyjádřeno slovně:

- Fáze α je ohraničená na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) konečného typu.
- Je-li fáze α rostoucí (klesající), pak je neohraničená zdola a ohraničená shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) vlevo (vpravo) oscilatorická.
- Je-li fáze α rostoucí (klesající), pak je ohraničená zdola a neohraničená shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) vpravo (vlevo) oscilatorická.
- Fáze α není ohraničená zdola ani shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) oboustranně oscilatorická.

Ilustrační příklady

Příklad 1. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu $j = (a, b)$ a její řešení

$$u(t) = \sin t, \qquad v(t) = \cos t.$$

Pro první fázi α platí

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad t \neq \xi_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

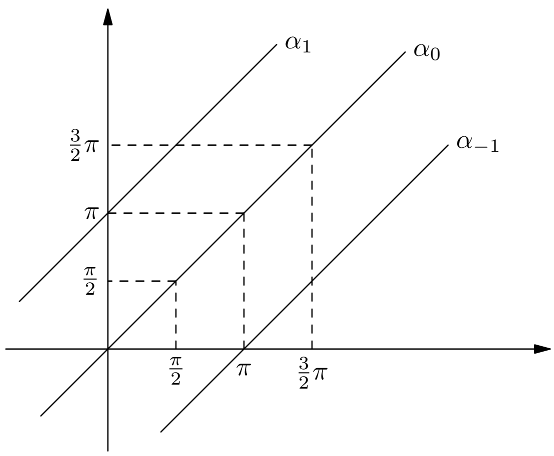
Tedy podle vztahu (2.1.3)

$$\alpha(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} - n\pi \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t \in (\xi_n, \xi_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi) \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t = \xi_n, \end{cases}$$

kde $w = -1$. Po dosazení dostáváme $\alpha(t) = t$ pro každé $t \in j$.

Označíme-li $\alpha_0 = \alpha$, pak všechny fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru $\alpha_n(t) = \alpha(t) + n\pi$, tj.

$$\alpha_n(t) = t + n\pi, \qquad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$



Obr. 3 Fázový systém (α) báze (u, v) rovnice $y'' = -y$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$, což jsou nulové body řešení u (vztah (2.1.2)).
- $\alpha(t) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$, což jsou nulové body řešení v (vztah (2.1.2)).
- α je rostoucí funkce ($w < 0$).
- Ohraničenost fáze α a tudíž typ a druh rovnice (q) závisí na intervalu, na němž rovnici uvažujeme. Například na intervalu $(0, \pi)$ se jedná o rovnici konečného typu 1, speciálního druhu, na intervalu $(0, \infty)$ o rovnici zprava oscilatorickou, apod. (viz klasifikace rovnic pomocí fází).

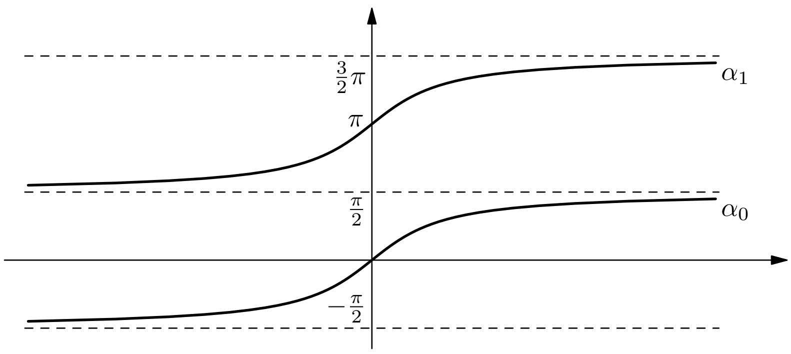
Poznamenejme, že O. Borůvka zavádí pro první fázi $\alpha(t) = t$ této diferenciální rovnice na intervalu $j = (-\infty, \infty)$ název *speciální fáze*. Jak uvidíme dále, tato speciální fáze je jednotkovým prvkem grupy všech fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$.

Příklad 2. Uvažujme rovnici $y'' = 0$ na intervalu $j = (a, b)$ a její řešení

$$u(t) = t, \qquad v(t) = 1.$$

Okamžitě vypočítáme, že

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} t \quad \text{pro každé} \quad t \in j.$$



Obr. 4 Fázový systém (α) báze (u, v) rovnice $y'' = 0$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = 0$, což je jediný nulový bod řešení u (vztah (2.1.2)).
- Vztah $\alpha(t) = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ není splněn pro žádné $t \in j$, tedy řešení v nemá žádný nulový bod (vztah (2.1.2)).
- α je rostoucí funkce ($w < 0$).

- Fáze α je ohraničená zdola i shora na každém intervalu j, tedy rovnice je konečného typu. Konkrétně například na intervalu $(-\infty, \infty)$ platí

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t) = \frac{\pi}{2}$$

  a tedy $|c - d| = \pi$, což znamená, že rovnice je konečného typu 1, speciálního druhu (viz klasifikace rovnic pomocí fází).

Příklad 3. Uvažujme rovnici

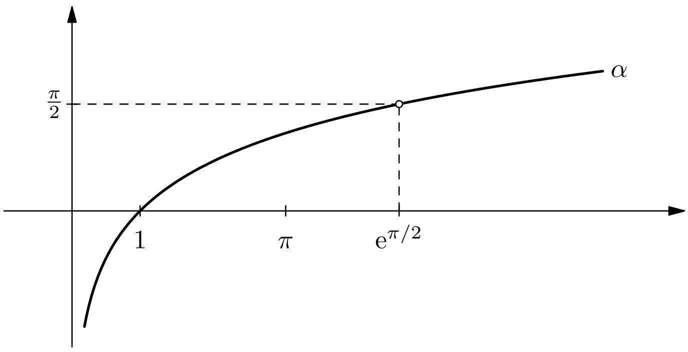
$$y'' = -\frac{5}{4t^2} y \quad \text{na} \quad j = (0, \infty)$$

a její řešení

$$u(t) = \sqrt{t} \sin \ln t, \qquad v(t) = \sqrt{t} \cos \ln t.$$

Dosazením do vztahu (2.1.3) ihned vypočteme, že

$$\alpha(t) = \ln t \quad \text{pro každé} \quad t \in j.$$



Obr. 5 První fáze α báze (u, v) rovnice $y'' = -\frac{5}{4t^2} y$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $\ln t = n\pi$, tj.

$$t = 1, e^{\pm\pi}, e^{\pm 2\pi}, \ldots$$

  a lze ověřit, že body $1, e^{\pm\pi}, e^{\pm 2\pi}, \ldots$ jsou nulovými body řešení u (vztah (2.1.2)).

- Vztah $\alpha(t) = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ je splněn pro každé

$$t = e^{\pm\frac{\pi}{2}}, e^{\pm\frac{3\pi}{2}}, \ldots$$

  a o těchto bodech lze ověřit, že jsou nulovými body řešení v (vztah (2.1.2)).

- α je funkce rostoucí ($w < 0$) a konkávní. Tedy vzdálenosti mezi nulovými body řešení se zvětšují.

- Ohraničenost fáze α a tudíž typ a druh rovnice (q) závisí na intervalu, na němž rovnici uvažujeme. Například na intervalu $(0, a)$, kde a je konečné, je rovnice vlevo oscilatorická, na intervalu $(0, \infty)$ se bude jednat o rovnici oboustranně oscilatorickou.

Poznámka. Z definice fáze i z předchozích úvah je zřejmé, že neznáme-li řešení rovnice (q), neznáme ani její fázi. V některých případech však můžeme znát jisté vlastnosti fáze, které nám pomohou určit některé vlastnosti řešení rovnice (q). Například z konkávnosti nebo konvexnosti fáze víme, zda se vzdálenosti mezi nulovými body řešení zvětšují nebo zmenšují; ohraničenost a monotonie fáze zase poskytuje informaci o typu rovnice.

Další vlastnosti fáze α

Ukázali jsme, že každé rovnici (q) s bází (u, v) lze přiřadit fázi α danou vztahem $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$. Otázkou zůstává, jak vypadají všechny funkce α, které lze považovat za fáze nějaké diferenciální rovnice (q). Odpověď dává následující věta.

Věta 2.1.4 *Každá funkce α definovaná na otevřeném intervalu j taková, že $\alpha \in C^3(j)$, $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$ je v intervalu j první fází rovnice (q) s nosičem*

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$$

a funkce

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \cos \alpha(t)$$

jsou lineárně nezávislá řešení této rovnice.

Dále ukážeme, že existuje právě jedna první fáze splňující Cauchyovy počáteční podmínky. Této vlastnosti později využijeme v teorii transformací.

Věta 2.1.5 *Nechť $t_0 \in j$, X_0, $X_0' \neq 0$, X_0'' jsou libovolná čísla. Pak existuje právě jedna fáze α diferenciální rovnice (q) splňující v bodě t_0 Cauchyovy počáteční podmínky*

$$\alpha(t_0) = X_0, \qquad \alpha'(t_0) = X_0', \qquad \alpha''(t_0) = X_0''.$$

Tato fáze α patří do fázového systému báze (u, v) rovnice (q) pro

$$u(t) = (X_0' \cos X_0 - \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'} \sin X_0) u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t),$$

$$v(t) = -(X_0' \sin X_0 + \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'} \cos X_0) u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t),$$

kde u_0, v_0 jsou řešení diferenciální rovnice (q) určené počátečními podmínkami

$$u_0(t_0) = 0, \qquad u_0'(t_0) = 1, \qquad v_0(t_0) = 1, \qquad v_0'(t_0) = 0.$$

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 65–66.

2.2 Druhá fáze rovnice (q)

Definice 2.2.1 Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q) a nechť $q \neq 0$ na j.

Druhou fází báze (u, v) rozumíme libovolnou funkci β spojitou na intervalu j, která na tomto intervalu splňuje vztah

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{u'(t)}{v'(t)}$$

v každém bodě intervalu j, kromě nulových bodů funkce v'.

Druhou fází diferenciální rovnice (q) rozumíme druhou fázi libovolné báze rovnice (q).

Poznámka. Předpoklad $q \neq 0$ v definici druhé fáze zajišťuje, že nulové body derivací u', v' řešení u, v jsou na intervalu j izolované.

Vlastnosti druhé fáze β báze (u, v)

Nechť β je libovolná druhá fáze báze (u, v) rovnice (q) na intervalu j a w wronskián řešení u, v. Vlastnosti druhé fáze β uvedeme jen stručně, neboť jsou analogické vlastnostem první fáze α.

1. Vybereme-li libovolnou druhou fázi β, pak všechny druhé fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

   $$\beta_n(t) = \beta(t) + n\pi, \qquad \text{kde} \qquad n = 0, \pm 1, \ldots .$$

   Říkáme, že tvoří tzv. *druhý fázový systém* (β) báze (u, v).

2. Nechť $t_0 \in j$. Pak

   $$u'(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \beta(t_0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.1}$$

   $$v'(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \beta(t_0) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Vyjádření druhé fáze β:

   Nechť ξ'_0 je nulový bod řešení v', tj. $v'(\xi'_0) = 0$. Označme ξ'_n (ξ'_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$, n-tý nulový bod řešení v' následující (předcházející) bodu ξ'_0. Pak

   $$\beta(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{u'(t)}{v'(t)} - n\pi \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t \in (\xi'_n, \xi'_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi) \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t = \xi'_n. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

4. Derivací vztahu (2.2.2) dostáváme $\beta' = wq/(u'^2 + v'^2)$, tedy $\beta' \neq 0$. Dále víme, že $\beta' \in C^0$, neboť $q \in C^0$. Tedy $\beta \in C^1$. Pro každou druhou fázi β tedy platí

   $$\beta \in C^1, \qquad \beta' \neq 0.$$

   Dále dostáváme: Je-li $qw > 0$, pak je druhá fáze β rostoucí funkce pro každé $t \in j$ a je-li $qw < 0$, pak je β klesající funkce pro každé $t \in j$.

5. Ohraničenost druhé fáze β závisí na typu a druhu rovnice (q) stejným způsobem jako fáze první.

Uveďme nyní vztah mezi druhou fází β a derivacemi u', v' řešení u, v rovnice (q). Jedná se o tvrzení analogická k Větě 2.1.2 a jejímu Důsledku. Uvedeme je již bez důkazů.

Věta 2.2.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Nechť ξ'_0 je nulový bod řešení v', tj. $v'(\xi'_0) = 0$. Označme ξ'_n (ξ'_{-n}), $n = 1, 2, \dots$, n-tý nulový bod řešení v' následující (předcházející) bodu ξ'_0. Pak existuje druhá fáze β báze (u, v) tak, že pro derivace u', v' řešení u, v platí*

$$u'(t) = \bar{\varepsilon}\frac{\sqrt{|wq(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\sin\beta(t), \qquad v'(t) = \bar{\varepsilon}\frac{\sqrt{|wq(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\cos\beta(t), \tag{2.2.3}$$

tj.

$$u'(t) = \bar{\varepsilon}s(t)\sin\beta(t), \qquad v'(t) = \bar{\varepsilon}s(t)\cos\beta(t), \tag{2.2.4}$$

kde $\bar{\varepsilon} = -\operatorname{sgn} v(\xi'_0)$ a nazývá se signaturou zvolené druhé fáze β, $s(t)$ je druhá amplituda, q nosič rovnice (q) a w wronskián řešení u, v.

Poznámka. Vzhledem k předchozím vlastnostem druhé fáze β je zřejmé, že signatura $\bar{\varepsilon}$ druhé fáze β je jednoznačně dána volbou nulového bodu ξ'_0 řešení v'.

Je-li $\bar{\varepsilon} = +1$, pak se druhá fáze nazývá *vlastní* a je-li $\bar{\varepsilon} = -1$, pak se druhá fáze nazývá *nevlastní*. Obdobně jako u prvních fází platí, že v uspořádání druhých fází

$$\dots < \beta_{-2} < \beta_{-1} < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$$

se vlastní a nevlastní fáze pravidelně střídají.

Důsledek 2.2.3 *Nechť β je druhá fáze báze (u, v). Pak derivaci y' libovolného řešení y rovnice (q) lze vyjádřit ve tvaru*

$$y'(t) = \pm k_1\frac{\sqrt{|q(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\sin(\beta(t) + k_2), \tag{2.2.5}$$

kde q je nosič rovnice (q) a k_1, k_2 libovolné konstanty, $k_1 \neq 0$, $0 \leq k_2 < \pi$. Znaménko $+$ nebo $-$ vezmeme podle toho, jsou-li signatury ε, $\bar{\varepsilon}$ (viz vztahy (2.1.6) a (2.2.3)) fází α, β báze (u, v) stejné nebo různé.

Vztah mezi první a druhou fází téže báze

Řada zajímavých vztahů existuje také mezi první fází α a druhou fází β téže báze. Této problematice se nebudeme podrobněji věnovat, jen pro ukázku uveďme následující vztahy:

1. Ze vzorců pro wronskián, první a druhou fázi (2.1.7), (2.2.4) a pro derivaci první a druhé fáze lze odvodit vztah

   $$\frac{\alpha'\beta'}{\sin^2(\beta - \alpha)} = -q.$$

   Z toho plyne, že je-li nosič $q < 0$, pak obě fáze α i β zároveň rostou nebo zároveň klesají a je-li nosič $q > 0$, pak jedna z fází α nebo β roste a druhá klesá.

Shrneme-li vztahy mezi nosičem q, wronskiánem w a monotonií fází α, β, dostáváme:

- Je-li $q < 0$ a $w < 0$, pak obě fáze α i β rostou v j.
- Je-li $q < 0$ a $w > 0$, pak obě fáze α i β klesají v j.
- Je-li $q > 0$ a $w < 0$, pak fáze α roste a β klesá.
- Je-li $q > 0$ a $w > 0$, pak fáze α klesá a β roste.

2. Hodnoty $\alpha(t)$, $\alpha(x)$ fáze α ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když t, x jsou 1-konjugované body.
   Hodnoty $\beta(t)$, $\beta(x)$ fáze β ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když t, x jsou 2-konjugované body.
   Hodnoty $\alpha(t)$, $\beta(x)$ fází α, β ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když x je 3-konjugovaný bod s bodem t a t je 4-konjugovaný bod s bodem x.

3. Dvě funkce α, β na otevřeném intervalu j s vlastnostmi

$$\alpha \in C^3, \qquad \beta \in C^1, \qquad \alpha' \neq 0,$$

   reprezentují první a druhou fázi báze (u, v) diferenciální rovnice (q) právě tehdy, když

$$\beta = \alpha + \text{Arccotan}\, \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\alpha'}\Big)', \tag{2.2.6}$$

   kde funkce „Arccotan“ má obdobný význam jako funkce „Arctan“ (viz (2.1.3), (2.1.4)).

Vztah mezi druhou fází a průvodní rovnicí $(\widehat{q})$

Nechť (u, v) je báze rovnice (q) a nechť pro nosič q rovnice (q) na intervalu j platí: $q \neq 0$, $q \in C^2$. Pak funkce

$$u_1 = \frac{u'}{\sqrt{|q|}}, \qquad v_1 = \frac{v'}{\sqrt{|q|}}$$

tvoří bázi rovnice $(\widehat{q})$, která je průvodní rovnicí k rovnici (q).

Ze vztahu $u'/v' = u_1/v_1$ plyne, že druhá fáze $\beta(t)$ báze (u, v) rovnice (q) je první fází báze (u_1, v_1) rovnice $(\widehat{q})$, a tedy pro nosič $\widehat{q}$ rovnice $(\widehat{q})$ platí

$$\widehat{q}(t) = -\{\text{tg}\, \beta, t\}.$$

Pro nosič q rovnice (q) s bází (u, v) a první fází $\alpha(t)$ platí $q(t) = -\{\text{tg}\, \alpha(t), t\}$. Pro nosič $\widehat{q}$ průvodní rovnice $(\widehat{q})$ s bází (u_1, v_1) a první fází $\beta(t)$ platí $\widehat{q}(t) = -\{\text{tg}\, \beta(t), t\}$. Přitom $\beta(t)$ je zároveň druhou fází rovnice (q). Z těchto vztahů a ze spojitosti a ohraničenosti fází na intervalu j plyne následující věta:

Věta 2.2.4 *Rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$ mají stejný oscilatorický charakter, tj. jsou obě konečného typu nebo jsou oscilatorické stejného druhu.*

Důkaz.

Nechť β je druhá fáze báze (u, v) rovnice (q). Pak β je zároveň první fází α_1 báze (u_1, v_1) průvodní rovnice $(\widehat{q})$ rovnice (q).

Je-li (q) konečného typu, pak funkce β je ohraničená a tedy i funkce $\alpha_1 = \beta$ je ohraničená a tudíž je rovnice $(\widehat{q})$ konečného typu.

Je-li (q) nekonečného typu vlevo oscilatorická, pak funkce β je zdola neohraničená a shora ohraničená a fáze α_1 má stejné vlastnosti. Tedy rovnice $(\widehat{q})$ je také nekonečného typu vlevo oscilatorická.

Analogicky pro rovnice nekonečného typu vpravo oscilatorické a oboustranně oscilatorické.

2.3 Vztah mezi prvními fázemi dvou rovnic (q) a (Q)

Uvažujme dvě diferenciální rovnice v Jacobiho tvaru

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \quad j = (a, b), \ -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \quad Q \in C^0(J), \quad J = (A, B), \ -\infty \leq A < B \leq \infty \tag{Q}$$

a věnujme se vztahu mezi první fází α rovnice (q) a první fází $\mathcal{A}$ rovnice (Q).

Definice 2.3.1 První fáze α rovnice (q) a první fáze $\mathcal{A}$ rovnice (Q) se nazývají *podobné*, jestliže platí

$$\alpha(j) = \mathcal{A}(J).$$

Označíme-li

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t), \qquad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t), \qquad C = \lim_{T \to A^+} A(T), \qquad D = \lim_{T \to B^-} A(t),$$

pak platí, že první fáze α a $\mathcal{A}$ jsou podobné právě tehdy, když platí $c = C$, $d = D$ nebo $c = D$, $d = C$.

Je-li $c = C$, $d = D$, pak fáze α, $\mathcal{A}$ nazýváme *přímo podobné*, je-li $c = D$, $d = C$, mluvíme o *nepřímo podobných* fázích. Je jasné, že pro přímo podobné fáze platí $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \mathcal{A}' = 1$ a pro nepřímo podobné fáze $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \mathcal{A}' = -1$.

Tedy například, jsou-li obě rovnice (q), (Q) oscilatorické, pak každé dvě jejich fáze jsou podobné. Konkrétně jsou přímo podobné, jestliže obě fáze rostou nebo obě klesají a nepřímo podobné, jestliže jedna z fází roste a druhá klesá.

Obecně platí následující věta, kterou dále využijeme v teorii transformací.

Věta 2.3.2 *Pro diferenciální rovnice (q), (Q) existují podobné fáze právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu.*

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 100–101.

2.4 Algebraická struktura množiny fází oscilatorických rovnic (q) v intervalu $(-\infty, \infty)$

Z Věty 2.1.4 víme, že každá funkce α, kde $\alpha \in C^3(j)$ a $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$, je první fází rovnice (q) s nosičem $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$. Dále víme, že v případě oscilatorické rovnice je funkce α neohraničená.

Tento odstavec bude věnován stručnému naznačení některých výsledků, jež O. Borůvka dosáhl ve studiu algebraické struktury množiny všech funkcí α definovaných na intervalu $j = (-\infty, \infty)$, pro něž platí že, $\alpha \in C^3(j)$, $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$ a α je neohraničená na intervalu j. Jinými slovy, budeme se věnovat studiu fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$.

Grupa fází $\mathcal{G}$

Nechť $\mathcal{G}$ značí množinu všech fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$. Definujme na této množině operaci „skládání" takto: Pro každé $\alpha, \gamma \in \mathcal{G}$ platí

$$(\alpha\gamma)(t) = \alpha(\gamma(t)) \qquad \text{pro každé} \quad t \in j.$$

Pak $\mathcal{G}$ spolu s touto operací tvoří grupu s jednotkovým prvkem $\varepsilon(t) = t$ (speciální fáze). Funkce α^{-1} značí prvek inverzní k prvku $\alpha \in \mathcal{G}$. Tuto grupu nazveme *grupa fází*.

Každá funkce $\alpha \in \mathcal{G}$ je první fází oscilatorické diferenciální rovnice (q) na intervalu $j = (-\infty, \infty)$, jejíž nosič je dán vztahem

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t). \tag{2.4.1}$$

Naopak každá první fáze α libovolné oscilatorické rovnice (q) v intervalu $j = (-\infty, \infty)$ je prvkem grupy $\mathcal{G}$.

Víme, že je-li $\alpha \in \mathcal{G}$ rostoucí (klesající) funkce, pak také $\alpha^{-1} \in \mathcal{G}$ je rostoucí (klesající) funkce a dále $\alpha\gamma$ je rostoucí funkce, jestliže jsou obě fáze α i γ rostoucí nebo obě klesající a $\alpha\gamma$ je klesající, jestliže je jedna z fází α, γ rostoucí a druhá klesající.

Z toho okamžitě plyne, že množina $\mathcal{N}$ tvořená všemi rostoucími fázemi tvoří podgrupu grupy $\mathcal{G}$. Tato podgrupa $\mathcal{N}$ je v grupě $\mathcal{G}$ invariantní (normální), tj. platí

$$\alpha^{-1}\mathcal{N}\alpha = \mathcal{N} \qquad \text{pro každé} \quad \alpha \in \mathcal{G},$$

což znamená, že pro každý prvek $\gamma \in \mathcal{N}$ a $\alpha \in \mathcal{G}$ platí $\alpha^{-1}\gamma\alpha \in \mathcal{N}$.

Relace ekvivalence

V grupě $\mathcal{G}$ definujeme ekvivalenci takto:

Dvě fáze $\alpha, \gamma \in \mathcal{G}$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když při vhodných konstantách c_{ik} $(i, k = 1, 2)$, za předpokladu, že determinant $|c_{ik}| \neq 0$, platí

$$\operatorname{tg}\gamma(t) = \frac{c_{11}\operatorname{tg}\alpha(t) + c_{12}}{c_{21}\operatorname{tg}\alpha(t) + c_{22}}, \tag{2.4.2}$$

a to pro všechna $t \in j$ s výjimkou bodů, v nichž dané funkce nejsou definovány.

Snadno ověříme, že relace daná vztahem (2.4.2) je reflexivní, symetrická a transitivní, tedy je relací ekvivalence. Označme tuto relaci Q.

Pomocí relace ekvivalence Q je možno vytvořit rozklad $\overline{Q}$ grupy $\mathcal{G}$ příslušný této ekvivalenci. Připomeňme, že do každé třídy rozkladu $\overline{Q}$ náleží ty fáze, jež jsou vzájemně ekvivalentní a žádné dvě fáze náležící do různých tříd rozkladu nemohou být vzájemně ekvivalentní.

Lze dokázat, že prvky grupy $\mathcal{G}$ ležící v jedné a téže třídě $\overline{a} \in \overline{Q}$ jsou právě všechny fáze jisté diferenciální rovnice (q). Nosič q této rovnice je dán vztahem (2.4.1), v němž za fázi α můžeme zvolit kteroukoliv fázi $\alpha \in \overline{a}$.

Vidíme tedy, že existuje prostá korespondence mezi nosiči q oscilatorických diferenciálních rovnic (q) v intervalu $j = (-\infty, \infty)$ a jednotlivými třídami rozkladu $\overline{Q}$.

Všimneme-li si velikostí uvažovaných množin, dojdeme k závěru, že množina $\overline{a}$ všech prvních fází příslušných k nosiči $q(t)$ má mohutnost kontinua.

Fundamentální podgrupa $\mathcal{F}$

Všechny fáze grupy $\mathcal{G}$ ekvivalentní s jednotkovým prvkem grupy $\mathcal{G}$ tvoří tzv. *fundamentální podgrupu* $\mathcal{F}$ grupy $\mathcal{G}$. Tato podgrupa $\mathcal{F}$ se skládá právě ze všech fází diferenciální rovnice $y'' = -y$.

Lze ukázat, že rozklad $\overline{Q}$ splývá s rozkladem v pravé třídy grupy $\mathcal{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathcal{F}$:

$$\overline{Q} = \mathcal{G}/_p\mathcal{F},$$

tj. uvažujeme-li třídu rozkladu $\overline{a} \in \overline{Q}$ a libovolnou fázi α náležící této třídě $\alpha \in \overline{a}$, pak $\overline{a} = \mathcal{F}\alpha$.

Podgrupa elementárních fází $\mathcal{H}$

Každá fáze α, pro niž platí

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha', \qquad t \in j$$

se nazývá *elementární fáze*. Nechť $\mathcal{H}$ značí množinu všech elementárních fází.

Snadno se ukáže, že jednotkový prvek $\varepsilon(t) = t$ grupy $\mathcal{G}$ je elementární fáze, že složení dvou elementárních fází je opět elementární fáze a že inverzní prvek k prvku $\alpha \in \mathcal{H}$ je také elementární fází. Tedy platí, že množina všech elementárních fází $\mathcal{H}$ je podgrupa grupy všech fází $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

Dále lze dokázat, že všechny fáze ekvivalentní s elementární fází $\varepsilon(t) = t$ jsou také elementární a tedy platí, že fundamentální podgrupa $\mathcal{F}$ je tvořena pouze elementárními fázemi a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Celkem tedy dostáváme

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}.$$