1 Úvodní poznámky

Tato kapitola je věnována úvodu do problematiky, zavedení některých dále používaných pojmů a postupů. Vycházíme přitom ze základního kurzu diferenciálních rovnic.

Připomeňme, že *diferenciální rovnicí* rozumíme rovnici, v níž vystupuje neznámá funkce a její derivace. Je-li hledaná funkce funkcí jedné proměnné, mluvíme o *obyčejné diferenciální rovnici*, je-li funkcí více proměnných (v rovnici vystupují tedy parciální derivace), mluvíme o *parciální diferenciální rovnici*. Řád nejvyšší derivace, obsažené v dané diferenciální rovnici, nazýváme *řádem této rovnice*.

Velký význam při popisu jevů a dějů probíhajících v přírodě hrají parciální diferenciální rovnice 2. řádu, jejichž řešení vede v mnoha případech na řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. nebo 2. řádu.

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu však umíme explicitně řešit jen ve velmi speciálních případech jako jsou rovnice s konstantními koeficienty, Eulerova rovnice nebo rovnice, jejímiž řešeními jsou tzv. speciální funkce (Besselovy funkce, Airyho funkce nebo ortogonální polynomy). Proto má velký význam tzv. kvalitativní teorie rovnic 2. řádu, kdy jsou pomocí koeficientů rovnice popsány vlastnosti řešení rovnice, např. rozložení nulových bodů. Jednou z těchto teorií je Borůvkova teorie fází, dispersí a transformací pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

1.1 Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu v Jacobiho tvaru

Úvodem připomeňme, co rozumíme pod pojmem obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Obyčejnou diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

nebo, je-li rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci, rovnici

$$y'' = f(t, y, y').$$

Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = f(t), \qquad p_1, p_0, f \in C^0(j).$$

Obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \qquad p_1, p_0 \in C^0(j). \tag{a}$$

Hlavním objektem zkoumání v Borůvkově teorii fází, dispersí i transformací je obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu ve speciálním tzv. *Jacobiho tvaru*

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \tag{q}$$

kde $j = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Funkci $q(t)$ budeme nazývat *nosič* rovnice (q).

Vidíme, že rovnice (q) je speciálním tvarem rovnice (a). Přitom platí, že každou rovnici tvaru (a) lze jednoduše transformovat na rovnici tvaru (q). Jednou z možností, za předpokladu $p_1 \in C^1$, je transformace

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p_1(\sigma)d\sigma} z(t).$$

Uvedený předpoklad spojitosti koeficientů uvažovaných diferenciálních rovnic na intervalu j je přitom garantem existence a jednoznačnosti řešení každé tzv. Cauchyovy počáteční úlohy.

Definice 1.1.1 *Řešením* rovnice (q) budeme rozumět funkci $y \in C^2$ definovanou na intervalu $i \subseteq j$, která danou rovnici splňuje, tj. pro $t \in i$ je $y''(t) = q(t)y(t)$.

Bod $t \in i$, pro nějž platí $y(t) = 0$, nazýváme *nulovým bodem řešení* y.

Je zřejmé, že nulová funkce $y = 0$ je vždy řešením rovnice (q). Toto tzv. triviální řešení však v dalších úvahách nebudeme uvažovat a pod pojmem řešení budeme rozumět pouze řešení netriviální.

Jsou-li $u(t), v(t)$ řešení rovnice (q), pak také jejich libovolná lineární kombinace $y = c_1u+c_2v$, kde c_1, c_2 jsou libovolná čísla, je řešením rovnice (q).

Definice 1.1.2 Nechť funkce $u(t)$, $v(t)$ mají v intervalu j spojité první derivace. Pak determinant

$$w(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

se nazývá *Wronského determinant*, neboli *wronskián* příslušný k funkcím u, v.

Jsou-li u, v řešeními rovnice (q), pak jejich wronskián $w = uv' - u'v$ má na intervalu j konstantní hodnotu. To plyne z toho, že $w'(t) = 0$ na j.

Připomeňme také, že řešení $u(t)$, $v(t)$ jsou lineárně závislá, je-li $w(t) = 0$ a lineárně nezávislá, je-li $w(t) \neq 0$ v libovolném bodě $t \in j$.

Definice 1.1.3 Nechť u, v jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q). Pak uspořádanou dvojici (u,v) těchto řešení nazýváme *báze rovnice* (q).

Je-li (u,v) v intervalu j báze rovnice (q), pak každé řešení y této rovnice lze v intervalu j vyjádřit ve tvaru $y(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$, kde c_1, c_2 jsou vhodné konstanty. Říkáme, že $y(t)$ je *obecným řešením* rovnice (q).

Příklad. Funkce $u(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$ jsou v intervalu $(-\infty, \infty)$ řešeními rovnice

$$y'' = -y. \tag{$\star$}$$

Snadno zjistíme, že tato řešení jsou lineárně nezávislá, neboť $w = 1$, a lze je tedy považovat za bázi rovnice $(\star)$. Obecné řešení rovnice $(\star)$ je

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Některé vlastnosti řešení rovnice (q)

- Nechť $t_0 \in j$ a nechť y_0, y'_0 jsou libovolná reálná čísla. Počáteční problém

$$y'' = q(t)y, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

  má právě jedno řešení definované na celém intervalu j.

- Je-li u řešení rovnice (q), $u(t) \neq 0$ na $i \subseteq j$, pak funkce v daná vztahem

$$v(t) = u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{u^2(s)},$$

  kde $t_0 \in i$, je také řešením rovnice (q) na i, a to takovým, že řešení u, v jsou lineárně nezávislá a wronskián $w = 1$ na intervalu i.

- Všechna řešení diferenciální rovnice (q) tvoří dvourozměrný lineární prostor r, který nazýváme *prostorem řešení*. Každá uspořádaná dvojice lineárně nezávislých řešení u, v rovnice (q) tvoří bázi (u, v) prostoru řešení r a každé řešení $y \in r$ je pak jednoznačně určeno konstantními souřadnicemi c_1, c_2 v bázi (u, v), tj. $y = c_1 u + c_2 v$. A naopak, každému bodu (c_1, c_2) v kartézské soustavě souřadnic odpovídá právě jedno řešení $y \in r$ se souřadnicemi c_1, c_2 v bázi (u, v).

- Báze (u, v) určuje rovinnou křivku, která je dána parametricky rovnicemi $x_1 = u(t)$, $x_2 = v(t)$, $t \in j$. Chápeme-li t jako čas, pak je tato křivka trajektorií bodu $P(t) = P[u(t), v(t)]$ v rovině (x_1, x_2).

Nulové body řešení

Říkáme, že nulové body t_1, t_2 řešení $u(t)$ jsou *sousední*, když je $u(t_1) = u(t_2) = 0$ a pro $s \in (t_1, t_2)$ je $u(s) \neq 0$.

Některé vztahy mezi nulovými body řešení rovnice (q):

- Je-li nosič $q \neq 0$, pak mezi dvěma sousedními nulovými body řešení y rovnice (q) leží právě jeden nulový bod derivace y' a mezi dvěma sousedními nulovými body derivace y' leží právě jeden nulový bod řešení y.

- Jestliže mezi dvěma sousedními nulovými body řešení y rovnice (q) nebo mezi dvěma sousedními nulovými body derivace y' nebo mezi nulovým bodem řešení y a nulovým bodem derivace y' je nosič $q \neq 0$, pak musí být mezi těmito body záporný, tj. $q < 0$.

- Sturmova věta:
  Nechť u, v jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (q) a nechť jsou dány body $t_1, x_1 \in j$, $t_1 < x_1$. Pak platí:

  1. Nechť $u(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak řešení v má v intervalu (t_1, x_1) právě jeden nulový bod.

2. Nechť $u'(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u'(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak funkce v' má v intervalu (t_1, x_1) právě jeden nulový bod.
3. Nechť $u'(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak, je-li $t_2 < t_1$, $v'(t_2) = 0$, pak řešení v má nulový bod $x_2 \in (t_2, x_1)$ a je-li $x_2 > x_1$, $v(x_2) = 0$, pak funkce v' má nulový bod $t_2 \in (t_1, x_2)$.
4. Nechť $u(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak, je-li $t_2 < t_1$, $v(t_2) = 0$, pak funkce v' má nulový bod $x_2 \in (t_2, x_1)$ a je-li $x_2 > x_1$, $v'(x_2) = 0$, pak funkce v má nulový bod $t_2 \in (t_1, x_2)$.

Oscilatoričnost rovnice (q)

Definice 1.1.4 Řešení y diferenciální rovnice (q) se nazývá *oscilující*, má-li na intervalu j nekonečně mnoho nulových bodů. V opačném případě mluvíme o *řešení neoscilujícím.*

Všimněme si, že nulové body řešení y nemohou mít hromadný bod ξ uvnitř intervalu j. V takovém případě by totiž bylo $y(\xi) = y'(\xi) = 0$, takže by vzhledem k jednoznačnosti řešení každého počátečního problému rovnice (q) muselo být $y(t) = 0$, což je triviální řešení a to jsme z našich úvah vyloučili. Má-li tedy řešení y nekonečně mnoho nulových bodů, pak je jejich hromadným bodem buď levý nebo pravý koncový bod intervalu j.

Ze Sturmovy věty plyne, že všechna řešení y rovnice (q) mají na intervalu j stejný oscilatorický charakter, tj. buď konečný nebo nekonečný počet nulových bodů. Tedy, osciluje-li jedno řešení rovnice (q), pak oscilují všechna řešení a rovnice se nazývá *oscilatorická*. V opačném případě mluvíme o *neoscilatorické diferenciální rovnici.*

Oscilatoričnost rovnice (q) úzce souvisí s hodnotou nosiče q. Existuje velká řada kritérií, jež tento vztah popisují. Uveďme pro ukázku některá z nich:

- Diferenciální rovnice (q) je na intervalu j neoscilatorická, jestliže pro každé $t \in j$ platí $q(t) \geq 0$.
- Diferenciální rovnice (q) je oscilatorická na j, jestliže existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim_{t\to\infty} q(t)$ taková, že
$$\lim_{t\to\infty} q(t) < 0.$$
- (Kneserova věta) Nechť $j =< t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Diferenciální rovnice (q) je oscilatorická na j, jestliže pro každé $t \in j$ platí
$$q(t) \leq -\frac{1+\delta}{4t^2}, \qquad \text{kde} \quad \delta > 0$$
a neoscilatorická na j, jestliže pro každé $t \in j$ platí
$$-\frac{1}{4t^2} \leq q(t) < 0.$$

Příklady.

1. Rovnice $y'' = y$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ neoscilatorická, neboť $q(t) = 1 > 0$.

2. Rovnice $y'' = -y$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ oscilatorická, neboť $\lim_{t\to\infty} q(t) = -1 < 0$.

3. Rovnice
$$y'' = -(1 + \frac{1-4n^2}{t^2})y,$$
kde n je libovolná konstanta, je na intervalu $(0, \infty)$ oscilatorická, neboť $\lim_{t\to\infty} q(t) = -1 < 0$.

4. Rovnice
$$y'' = \frac{c}{t^2}y,$$
kde c je libovolná konstanta, je na intervalu $(0, \infty)$ oscilatorická pro všechna $c < -\frac{1}{4}$ a neoscilatorická pro všechna $c \geq -\frac{1}{4}$.

Na začátku jsme ukázali, že každou diferenciální rovnici (a) lze přetransformovat na diferenciální rovnici tvaru (q). Tato transformace má tu vlastnost, že nulové body řešení rovnice (a) jsou nulovými body řešení rovnice (q) (zachovává oscilatoričnost řešení rovnic (a) a (q)). Při studiu oscilatorických vlastností se proto stačí omezit na rovnice tvaru (q).

Typ a druh rovnice (q)

Pomocí nulových bodů jsme zavedli pojmy oscilatorické a neoscilatorické rovnice. Nyní toto rozdělení rovnic založené na počtu nulových bodů rozšíříme o pojmy *typ* a *druh* diferenciální rovnice. S těmito pojmy, jež zavedl O. Borůvka, se budeme dále často setkávat.

Definice 1.1.5 Řekneme, že diferenciální rovnice (q) je *konečného typu* m $(m = 1, 2, \dots)$, je-li neoscilatorická a existuje-li řešení rovnice (q) s m nulovými body na intervalu j a neexistuje řešení s $m + 1$ nulovými body.

Dále řekneme, že rovnice (q) konečného typu m je *obecného druhu*, existují-li dvě lineárně nezávislá řešení s $m - 1$ nulovými body na intervalu j. V ostatních případech říkáme, že je *speciálního druhu*.

Diferenciální rovnice (q) se nazývá *nekonečného typu*, je-li oscilatorická na intervalu j. Rovnice nekonečného typu dále rozdělujeme podle druhu na *vlevo* a *vpravo oscilatorické* a *oboustranně oscilatorické*.

Příklad. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu j.

Je-li $j = (0, \frac{\pi}{2})$, pak je tato rovnice konečného typu 1, obecného druhu, neboť na intervalu j neexistuje řešení se dvěma nulovými body, existuje řešení s jedním nulovým bodem a zároveň existují dvě lineárně nezávislá řešení, která nemají na tomto intervalu žádný nulový bod.

Je-li $j = (0, \pi)$, pak je tato rovnice konečného typu 1, speciálního druhu, neboť na intervalu j neexistuje řešení se dvěma nulovými body, existuje řešení s jedním nulovým bodem a neexistují dvě lineárně nezávislá řešení, která nemají na tomto intervalu žádný nulový bod.

Je-li $j = (-\infty, \infty)$, pak je tato rovnice nekonečného typu, oboustranně oscilatorického druhu, neboť na intervalu j mají všechna řešení nekonečně mnoho nulových bodů.

1.2 Transformace závisle a nezávisle proměnné

V dalším textu se v mnohých důkazech a odvozeních setkáme s transformací závisle a nezávisle proměnné. Věnujme se proto obecnému odvození tvaru těchto transformací podrobněji.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \qquad Q(T) \in C^0(J), \tag{Q}$$

kde $\dot{} = d/dT$.

Provedeme-li transformaci závisle proměnné Y na y a nezávisle proměnné T na t, dostaneme rovnici

$$y'' = q(t)y, \qquad q(t) \in C^0(j). \tag{q}$$

Nadále budeme v celé práci používat označení pro derivaci podle proměnné t, resp. T

$$' = \frac{d}{dt}, \qquad \dot{} = \frac{d}{dT}.$$

Ukažme nyní, jak lze tyto transformace provést, tj. jak lze vzájemně transformovat diferenciální rovnice (Q) a (q). Vlastní transformaci provedeme ve dvou krocích, v prvním transformujeme závisle proměnnou a v druhém nezávisle proměnnou.

Transformace závisle proměnné

Nechť funkce y je řešením rovnice (q) a položme $y(t) = h(t)z(t)$ za předpokladu, že funkce $h \in C^2$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Pak $y' = h'z + hz'$ a $y'' = h''z + 2h'z' + hz''$. Dosazením derivací do rovnice (q) dostaneme

$$h^2z'' + 2hh'z' = h(-h'' + qh)z,$$

tj.

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z. \tag{1.2.1}$$

Transformace nezávisle proměnné

Nechť $z(t)$ je řešením (1.2.1) a položme $z(t) = Y(T)$, $T = X(t)$ za předpokladu, že funkce $X \in C^2$, $X'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Touto transformací chceme transformovat rovnici (1.2.1) na rovnici (Q). Dosazením derivací vztahu $z(t) = Y(X(t))$, tj.

$$z'(t) = \dot{Y}(X(t))X'(t), \qquad z''(t) = \ddot{Y}(X(t))X'^2(t) + \dot{Y}(X(t))X''(t)$$

do rovnice (1.2.1) dostáváme

$$h(t)X'^2(t)\ddot{Y}(X(t)) + (2h'(t)X'(t) + h(t)X''(t))\dot{Y}(X(t)) = (-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)). \tag{1.2.2}$$

Protože chceme dostat rovnici (Q), tj. rovnici, která má koeficient u první derivace nulový, položíme

$$2h'(t)X'(t) + h(t)X''(t) = 0.$$

Substitucí $\eta(t) = X'(t)$ obdržíme rovnici 1. řádu $2\eta(t)h'(t) + \eta'(t)h(t) = 0$, jejímž řešením je funkce $\eta(t) = X'(t) = h^{-2}(t)$. Dosazením tohoto výsledku zpět do vztahu (1.2.2) dostáváme

$$h^{-3}(t)\ddot{Y}(X(t)) = (-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)),$$

odkud obdržíme rovnici (Q) ve tvaru

$$\ddot{Y}(X(t)) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)). \tag{1.2.3}$$

Ze vztahu $X'(t) = h^{-2}(t)$ plyne

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma.$$

Označíme-li $T = X(t)$, lze rovnici (1.2.3) psát ve tvaru

$$\ddot{Y}(T) = Q(T)Y(T),$$

kde

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)), \qquad t = X^{-1}(T).$$

Uvedené výsledky budeme dále využívat, zformulujme je proto do věty.

Věta 1.2.1 *Nechť je dána funkce $h \in C^2(j)$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$.*

(i) *Funkce $y(t)$ daná vztahem*

$$y(t) = h(t)z(t)$$

je řešením rovnice

$$y'' = q(t)y$$

právě tehdy, když je funkce $z(t)$ řešením rovnice

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z.$$

(ii) *Funkce $z(t)$ daná vztahem*

$$z(t) = Y(T), \qquad T = X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$$

je řešením rovnice

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z$$

právě tehdy, když je funkce $Y(T)$ řešením rovnice

$$\ddot{Y} = Q(T)Y,$$

kde $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$, $t = X^{-1}(T)$.

Důsledek 1.2.2 *Nechť je dána funkce $h \in C^2(j)$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Transformace*

$$y(t) = h(t)Y(T), \qquad T = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma \tag{1.2.4}$$

převádí řešení Y rovnice (Q) na intervalu J na řešení y rovnice (q) na intervalu j, přičemž platí $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$.

V souvislosti s transformacemi závisle a nezávisle proměnné uveďme větu o transformaci rovnice v tzv. reciproční rovnici. Tato věta, kterou obecně pro systémy rovnic 2. řádu dokázal J. H. Barrett [C21], dává do souvislosti řešení a jeho derivaci. O její platnosti se lze přesvědčit přímým derivováním.

Věta 1.2.3 *Nechť jsou dány funkce $r \in C^2(j)$, $p \in C^2(j)$ a transformace*

$$z = \frac{y'}{r}.$$

Funkce y je řešením rovnice

$$(\frac{y'}{r})' = py \tag{1.2.5}$$

právě tehdy, když funkce z je řešením tzv. reciproční rovnice

$$(\frac{z'}{p})' = rz. \tag{1.2.6}$$

Závěrem poznamenejme, že metoda transformace proměnných se často používá při odvozování oscilatorických a neoscilatorických vlastností diferenciálních rovnic druhého a vyšších řádů.

1.3 Schwarzovská derivace

Uveďme základní informace o tzv. Schwarzovské derivaci, s níž se budeme v dalším textu často setkávat.

Buď $h : I \to \mathbb{R}$, $h \in C^3(I)$, $h'(t) \neq 0$ na intervalu I. Symbolem $\{h, t\}$ označme výraz

$$\{h,t\} = \frac{1}{2}\frac{h'''(t)}{h'(t)} - \frac{3}{4}\frac{h''^2(t)}{h'^2(t)}. \tag{1.3.1}$$

Pak $\{h, t\}$ nazýváme *Schwarzovskou derivací funkce h v bodě $t \in I$.*

Věta 1.3.1 *Schwarzovská derivace funkce $h : I \to \mathbb{R}$, $h \in C^3(I)$, $h' \neq 0$ splňuje vztah*

$$\{h,t\} = -\sqrt{|h'(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|h'(t)|}}\right)'' \qquad \textit{pro každé} \qquad t \in I \tag{1.3.2}$$

a pro složenou funkci $h(k(x))$, $k \in C^3(J)$, $k' \neq 0$, $k(J) \subseteq I$ platí

$$\{h(k(x)), x\} = \{h, k(x)\}k'^2(x) + \{k, x\}. \tag{1.3.3}$$

1.4 Průvodní diferenciální rovnice $(\widehat{q})$

V tomto odstavci zavedeme pojem tzv. průvodní diferenciální rovnice, která má význam pro popis nulových bodů derivace řešení y rovnice (q), jinými slovy, pro popis možných lokálních extrémů řešení y rovnice (q). Předpokládejme, že nosič q rovnice (q) je všude nenulový a $q \in C^2$.

Definice 1.4.1 Mějme rovnici (q) s nosičem $q \neq 0$, $q \in C^2(j)$. *Průvodní diferenciální rovnicí* $(\widehat{q})$ k rovnici (q) na intervalu j rozumíme rovnici tvaru

$$y_1'' = \widehat{q}(t)y_1, \qquad (\widehat{q})$$

kde

$$\widehat{q}(t) = q(t) - \frac{1}{2}\frac{q''(t)}{q(t)} + \frac{3}{4}\frac{q'^2(t)}{q^2(t)}. \qquad (1.4.1)$$

Poznámka. Nosič průvodní rovnice $(\widehat{q})$ může být ekvivalentně vyjádřen vztahem

$$\widehat{q}(t) = q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)'' \qquad (1.4.2)$$

nebo pomocí Schwarzovské derivace vztahem

$$\widehat{q}(t) = q(t) - \{\int_{t_0}^{t} q(\sigma)d\sigma, t\} \qquad (t_0 \in j).$$

Význam průvodní rovnice spočívá v následující větě. Ta udává vztah mezi řešeními rovnic (q) a $(\widehat{q})$ a v důsledku toho umožňuje studovat rozložení nulových bodů řešení a extrémů řešení.

Věta 1.4.2 *Funkce $y_1(t)$ daná vztahem*

$$y_1(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{|q(t)|}} \qquad (1.4.3)$$

je řešením průvodní rovnice $(\widehat{q})$ právě tehdy, když funkce $y(t)$ je řešením rovnice (q).

Důkaz.
V důkazu využijeme Vět 1.2.1 a 1.2.3.
Nechť y je řešením rovnice (q). Podle Věty 1.2.3 je y řešením rovnice (q) právě tehdy, když je funkce $z = y'$ řešením reciproční rovnice

$$(\frac{z'}{q})' = z. \qquad (1.4.4)$$

Chceme-li tuto rovnici převést na rovnici v Jacobiho tvaru, použijeme transformaci závisle proměnné $y_1 = h(t)z$, popsanou ve Větě 1.2.1.

Podle Věty 1.2.1 (i) je funkce z řešením rovnice (1.4.4) právě tehdy, když je funkce $y_1 = h(t)z$ řešením rovnice $y_1'' = \widehat{q}y_1$. Z tvaru těchto rovnic plyne, že

$$h^2 = \frac{1}{q} \qquad \text{a} \qquad h(-h'' + \widehat{q}h) = 1. \tag{1.4.5}$$

Tedy pro funkci y_1, jež je řešením rovnice $(\widehat{q})$, platí

$$y_1 = h(t)z = \frac{z}{\sqrt{|q|}} = \frac{y'}{\sqrt{|q|}}.$$

Ze vztahu (1.4.5) plyne, že pro nosič $\widehat{q}$ rovnice $(\widehat{q})$ platí

$$\widehat{q} = \frac{1}{h}(\frac{1}{h} + h'') = \frac{1}{h^2} + \frac{h''}{h} = q + \sqrt{|q|}h''.$$

Derivací funkce h dostáváme

$$h' = -\frac{1}{2}\frac{q'}{q\sqrt{|q|}}, \qquad h'' = \frac{3}{4}\frac{{q'}^2}{q^2\sqrt{|q|}} - \frac{1}{2}\frac{q''}{q\sqrt{|q|}},$$

odkud plyne

$$\widehat{q} = q - \frac{1}{2}\frac{q''}{q} + \frac{3}{4}\frac{{q'}^2}{q^2}.$$

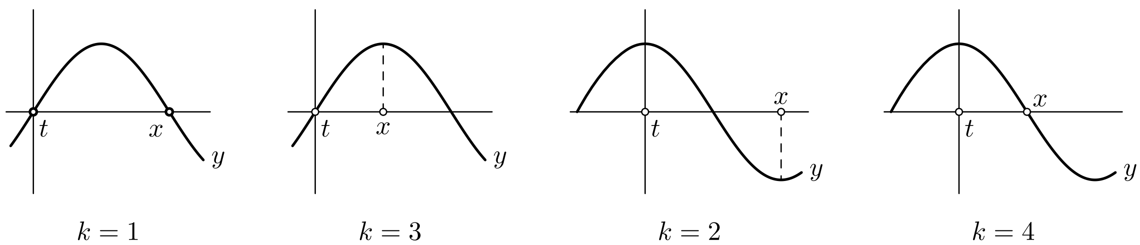
1.5 Konjugované body

Na vztahu mezi nulovými body řešení, resp. nulovými body řešení a jeho derivace, je založena následující definice konjugovaných bodů.

Definice 1.5.1 Nechť $t \in j$ je libovolný bod.

Je-li y takové řešení rovnice (q), že $y(t) = 0$, pak bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y(x) = 0$, nazýváme 1-konjugovaný s bodem t a bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y'(x) = 0$, nazýváme 3-konjugovaný s bodem t.

Je-li y takové řešení rovnice (q), že $y'(t) = 0$, pak bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y'(x) = 0$, nazýváme 2-konjugovaný s bodem t a bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y(x) = 0$, nazýváme 4-konjugovaný s bodem t.



Obr. 1 Bod x je k-konjugovaný s bodem t

Poznámky.

- k-konjugovaný bod ($k = 1, 2, 3, 4$) bývá často také označován jako *konjugovaný bod k-tého druhu*.

- Je-li x k-konjugovaný s bodem t a $x < t$, říkáme, že x je *levý k-konjugovaný bod*, je-li $x > t$, *pravý k-konjugovaný bod*, případně podle počtu a pořadí takových bodů mluvíme o *n-tém levém* nebo *n-tém pravém k-konjugovaném bodě s bodem* t.

- Konjugované body jsou charakteristickou vlastností diferenciální rovnice (q) invariantní ke konkrétní volbě řešení, resp. báze u, v. Víme totiž, že dvě řešení rovnice (q), které mají společný nulový bod nebo jejichž derivace mají společný nulový bod, se liší pouze o konstantní násobek. Z toho plyne, že všechny jejich nulové body a všechny nulové body jejich derivací jsou shodné. Proto můžeme mluvit o *konjugovaných bodech rovnice* (q) místo o konjugovaných bodech jednotlivých řešení.

- S ohledem na k-konjugované body ($k = 1, 2, 3, 4$) můžeme rozdělit rovnice (q) na dvě třídy podle toho, jestli v intervalu j k-konjugované body existují nebo neexistují. V prvním případě říkáme, že rovnice *má k-konjugované body*, v druhém případě, že *rovnice nemá k-konjugované body*.

Závěrem uveďme větu, jež udává vztahy mezi řešeními rovnice (q) ve dvou různých bodech intervalu j.

Věta 1.5.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Pak pro libovolné body t, $x \in j$, $t \neq x$ platí:*
1) $u(t)v(x) - u(x)v(t) = 0$ právě tehdy, když t, x jsou 1-konjugované,
2) $u'(t)v'(x) - u'(x)v'(t) = 0$ právě tehdy, když t, x jsou 2-konjugované,
3) $u(t)v'(x) - u'(x)v(t) = 0$ právě tehdy, když x je 3-konjugovaný bod s bodem t a t je 4-konjugovaný bod s bodem x.

Důkaz.
Dokažme první z předchozích tvrzení.

a) Nechť t, x jsou dva různé body intervalu j a nechť platí vztah $u(t)v(x) - u(x)v(t) = 0$. Pak lineární rovnice

$$c_1u(t) + c_2v(t) = 0, \qquad c_1u(x) + c_2v(x) = 0$$

jsou splněny pro libovolné hodnoty c_1, c_2, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ a body t, x jsou nulové body řešení $y = c_1u + c_2v$ rovnice (q). Tedy t a x jsou 1-konjugované body.

b) Nechť t a x jsou 1-konjugované body. Pak $t \neq x$ a existuje řešení $y = c_1u + c_2v$ rovnice (q), které prochází body t a x a $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Z toho plyne dokazovaný vztah.

Další vztahy dokážeme analogicky.

Příklad. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu j.

Nechť $|j|$ značí délku intervalu j. Pak pro $0 < |j| \leq \frac{\pi}{2}$ rovnice nemá konjugované body, pro $\frac{\pi}{2} < |j| \leq \pi$ má rovnice 3-konjugované a 4-konjugované body a pro $\pi < |j|$ má konjugované body všech druhů.