26. Deformace a věty izomorfismu grup

26. Deformace a věty izomorfismu grup

26.1. Deformace grup

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Když je jeden z grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ grupou, co se dá říci o druhém?

1. *Deformace grupy na grupoid.* Platí věta: *Když je $\mathfrak{G}$ grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ je grupa. Mimoto obraz v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}$ je jednotkou grupy $\mathfrak{G}^*$ a obraz prvku inverzního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ je prvkem inverzním vzhledem k obrazu prvku a.*

Abychom tato tvrzení dokázali, uvažme, že podle **13.6.2** je grupoid $\mathfrak{G}^*$ asociativní. Nechť $\underline{1}^*$ značí obraz jednotky $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$, takže $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\underline{1}$. Podle **18.7.4** je $\underline{1}^*$ jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Nechť dále a^* značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ je zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$, existuje alespoň jeden prvek $a \in \mathfrak{G}$ takový, že $a^* = \boldsymbol{d}a$. Z rovnosti $aa^{-1} = \underline{1}$ plyne $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, tj. $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$ a podobně z rovnosti $a^{-1}a = \underline{1}$ rovnost $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, tj. $\boldsymbol{d}a^{-1} \,.\, a^* = \underline{1}^*$. Odtud vychází, že prvek $\boldsymbol{d}a^{-1}$ je inverzní vzhledem k a^* takže $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Dále vidíme, že obrazem v $\boldsymbol{d}$ prvku inverzního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ je prvek inverzní vzhledem k obrazu prvku a, a tím jsou naše tvrzení dokázána. Stručně můžeme říci, že každá deformace zobrazuje grupu opět na grupu a zachovává v obou grupách jednotky a inverzní prvky.

Z tohoto výsledku zejména vychází, že *jsou-li nějaké dva grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ izomorfní a jeden z nich je grupa, pak také druhý je grupa.* Neboť jsou-li $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ izomorfní, pak existuje izomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a současně existuje izomorfismus (inverzní) grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$. Je tedy každý z obou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ obrazem druhého v jistém izomorfismu a tedy, je-li jeden z nich grupa, pak také druhý je grupa jakožto izomorfní obraz grupy. Každý izomorfismus zachovává ovšem v obou grupách, jako každá deformace, jednotky a inverzní prvky; dále zachovává podgrupy a jak se snadno přesvědčíme, též invariantní podgrupy.

2. *Deformace grupoidu na grupu.* O grupoidu $\mathfrak{G}$ nečiňme nyní dalších předpokladů, ale o grupoidu $\mathfrak{G}^*$ předpokládejme, že je grupou. Podle první věty o izomorfismu grupoidů je grupa $\mathfrak{G}^*$ izomorfní ($\boldsymbol{i}$) s jistým faktoroidem $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ přísluší k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$ a v izomorfismu $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}^*$ je každý prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ zobrazen na onen prvek grupy $\mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se skládá. Podle předcházejícího výsledku je $\overline{\mathfrak{G}}$ grupa, protože $\mathfrak{G}^*$ je grupa. Izomorfismus $\boldsymbol{i}$ zachovává v obou grupách jednotky a inverzní prvky; proto je jednotka $\overline{\underline{1}}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$ zobrazena na jednotku $\underline{1}^*$ grupy

$\mathfrak{G}^*$, takže $i\underline{1} = \underline{1}^*$, a každé dva inverzní prvky $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou zobrazeny na dva inverzní prvky v $\mathfrak{G}^*$, takže $i\bar{a} = a^*$, $i\bar{a}^{-1} = a^{*-1}$. Protože se každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$, a to onoho prvku, pro nějž platí $i\bar{a} = a^*$, skládá se jednotka $\underline{1}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ prvku $\underline{1}^*$ a podobně se dva inverzní prvky $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ skládají ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ dvou inverzních prvků a^*, a^{*-1} v $\mathfrak{G}^*$. Platí tedy tato věta:

Když je $\mathfrak{G}^*$ grupa, pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$, je grupa a je izomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Jednotka grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ je množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ a každé dva inverzní prvky v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou množiny všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ dvou inverzních prvků v $\mathfrak{G}^*$.

Na jednoduchém příkladě ukážeme, že *je-li $\mathfrak{G}^*$ grupa, pak nejenom že $\mathfrak{G}$ nemusí být grupou, nýbrž může být jakýmkoli grupoidem.* Skutečně, nechť $\mathfrak{G}^*$ značí grupu skládající se z jediného prvku $\underline{1}^*$, takže $\underline{1}^*\underline{1}^* = \underline{1}^*$, a nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolný grupoid. Máme ukázat, že existuje deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Je zřejmé, že zobrazení, které ke každému prvku v $\mathfrak{G}$ přiřazuje prvek $\underline{1}^*$, je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$.

26.2. Cayleyova věta a realizace abstraktních grup

1. *Levé translace.* Nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolnou grupu a a libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Přiřadíme-li ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ prvek $ax \in \mathfrak{G}$, obdržíme jisté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ do sebe. Protože rovnice $ax = b$, v níž b značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, má jediné řešení $x \in \mathfrak{G}$, je to prosté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na sebe, tj. permutace grupy $\mathfrak{G}$. Tato permutace grupy $\mathfrak{G}$ se nazývá *levá translace určená prvkem a* a označuje se ${}_a\mathbf{t}$.

Levá translace určená prvkem $\underline{1}$ je zřejmě identický automorfismus na $\mathfrak{G}$. Když jsou a, b různé prvky v $\mathfrak{G}$, pak obě levé translace ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t}$ jsou různé, neboť prvek $\underline{1}$ se v ${}_a\mathbf{t}$ zobrazí na prvek a a v ${}_b\mathbf{t}$ se zobrazí na prvek b. Složíme-li libovolnou levou translaci ${}_a\mathbf{t}$ s libovolnou levou translací ${}_b\mathbf{t}$, obdržíme zřejmě levou translaci určenou prvkem ba, takže platí rovnost ${}_b\mathbf{t}\,{}_a\mathbf{t} = {}_{ba}\mathbf{t}$.

2. *Věta Cayleyova.* Uvažujme nyní o grupoidu, jehož pole je množina všech levých translací určených jednotlivými prvky grupy $\mathfrak{G}$ a násobení je definováno vzorcem ${}_a\mathbf{t} \cdot {}_b\mathbf{t} = {}_{ab}\mathbf{t}$, v němž ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t}$ značí dva libovolné prvky toho grupoidu. Označme tento grupoid $\mathfrak{T}_l$. Přiřadíme-li ke každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ prvek ${}_a\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$, obdržíme zřejmě zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$ a toto zobrazení je prosté, protože každé dva různé prvky a, $b \in \mathfrak{G}$ jsou zobrazeny na dva různé prvky ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$. Protože součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je zobrazen na ${}_{ab}\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$, tj. na součin ${}_a\mathbf{t} \cdot {}_b\mathbf{t}$ obrazu ${}_a\mathbf{t}$ prvku a s obrazem ${}_b\mathbf{t}$ prvku b, je toto zobrazení deformace a tedy izomorfismus grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$. Grupoid $\mathfrak{T}_l$ je tedy grupa, a to permutační grupa. Tím dostáváme tuto tzv. *Cayleyovu větu*:

Každá grupa je izomorfní s jistou permutační grupou.

Důležitost tohoto výsledku záleží v tom, že se v teorii grup, pokud jde o studium vlastností společných izomorfním grupám, můžeme omezit na grupy permutační.

3. *Realizace abstraktních grup.* S těmito úvahami úzce souvisí tato otázka: Když je dána nějaká abstraktní grupa $\mathfrak{G}$, zda existuje nějaká permutační grupa, která se dá na ni deformovat? O každé takové permutační grupě pravíme, že *realizuje abstraktní grupu* $\mathfrak{G}$, takže naše otázka zní, zda se každá abstraktní grupa dá realizovat permutacemi.

Z hořejších úvah vyplývá, že odpověď na tuto otázku je kladná, neboť každá abstraktní grupa je (dokonce) izomorfní s příslušnou grupou levých translací $\mathfrak{T}_l$, takže grupa $\mathfrak{T}_l$ grupu $\mathfrak{G}$ realizuje.

Např. realizujme abstraktní grupu řádu 4, jejíž multiplikační tabulka je v odst. **19.6.**1 napsána druhá. Příslušné levé translace určené jednotlivými prvky jsou podle té tabulky tyto permutace:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ \underline{1} & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ a & \underline{1} & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ b & c & \underline{1} & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ c & b & a & \underline{1} \end{pmatrix}$$

a tvoří spolu s násobením, které definujeme tím, že součinem $\boldsymbol{p} \,.\, \boldsymbol{q}$ rozumíme složenou permutaci $\boldsymbol{pq}$, permutační grupu, která realizuje naši abstraktní grupu 4. řádu.

4. *Pravé translace.* Podobně jako jsme definovali levé translace na nějaké grupě $\mathfrak{G}$, definujeme pravé translace:

Když a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$ a když ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ přiřadíme prvek $xa \in \mathfrak{G}$, obdržíme permutaci grupy $\mathfrak{G}$, tzv. *pravou translaci* $\mathbf{t}_a$ *určenou prvkem* a.

O pravých translacích na $\mathfrak{G}$ platí podobné výsledky jako o translacích levých a doporučujeme čtenáři, aby si je odvodil.

26.3. Věty o izomorfismu grup

V odst. **16.1** jsme pojednali o větách o izomorfismu grupoidů a nyní si všimneme těchto vět v případě, že jde o grupy. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupy.

1. *První věta.* Předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Jak jsme v **16.1.**1 viděli, je faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ izomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Podle **25.2** je $\bar{\mathfrak{D}}$ faktorová grupa vytvořená jistou invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$. Polem této invariantní podgrupy je onen prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$, který obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$. Protože $\underline{1}$ je vzorem v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$, vidíme, že se onen prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$, který obsahuje $\underline{1}$, skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$. Vychází tedy, že množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ je polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je izomorfní s $\mathfrak{G}^*$.

Předpokládejme nyní naopak, že grupa $\mathfrak{G}^*$ je izomorfní s faktorovou grupou

$\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na $\mathfrak{G}$ vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{D}$ invariantní v $\mathfrak{G}$. Pak existuje izomorfismus $\boldsymbol{i}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Podle **16.1.1** zobrazení $\boldsymbol{d}'$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ definované tím, že pro $a \in \mathfrak{G}$ je $\boldsymbol{d}'a$ onen prvek v $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, v němž a leží, je deformace grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Odtud plyne, že $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{d}'$ je deformace grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Podle **25.1** je jednotkou grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ pole D invariantní podgrupy $\mathfrak{D}$. Protože v $\boldsymbol{i}$ je na jednotku $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$ zobrazena právě jenom jednotka grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, jsou v $\boldsymbol{d}$ zobrazeny na $\underline{1}^*$ právě jenom ony prvky v $\mathfrak{G}$, které leží v D. Vychází tedy, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že se $\mathfrak{D}$ skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.

Tyto výsledky vyjadřuje *první věta o izomorfismu grup*:

Dá-li se grupa $\mathfrak{G}$ deformovat ($\boldsymbol{d}$) *na grupu $\mathfrak{G}^*$, pak množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ tvoří invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa na $\mathfrak{G}$ vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{D}$ je izomorfní s $\mathfrak{G}^*$, tj. $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{G}^*$. Naopak, je-li grupa $\mathfrak{G}^*$ izomorfní s faktorovou grupou na $\mathfrak{G}$, vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{D}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak existuje deformace* $\boldsymbol{d}$ *grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že $\mathfrak{D}$ se skládá ze všech vzorů v* $\boldsymbol{d}$ *jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.*

2. *Druhá věta. Druhá věta o izomorfismu grup* zní:

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ má touž vlastnost v $\mathfrak{C}$. Mimoto nechť platí:

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Pak jsou faktorové grupy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ spřažené a tedy isomorfní, takže $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong$ $\cong \mathfrak{C}/\mathfrak{D}$. Přitom je zobrazení každé z těchto faktorových grup na druhou, realizované incidencí prvků, izomorfismem.

Důkaz této věty je přímým důsledkem našich poznatků z odst. **23.1** a **16.1.2**.

Důležitý speciální případ této věty se týká obalu a průseku libovolné podgrupy a faktorové grupy v grupě $\mathfrak{G}$.

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je v $\mathfrak{A}$ invariantní. Z odst. **24.5.1** víme, že pak jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ vzájemně zaměnitelné, podgrupa $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a podgrupa $\mathfrak{B}$ v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$. Použijme nyní hořejší větu na grupy $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, které, jak snadno seznáme, splňují příslušné podmínky. Obdržíme vztah $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,/$ $/\,(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$, přičemž je příslušný izomorfismus realizován incidencí prvků.

Shrnutím těchto poznatků docházíme k této větě:

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je v $\mathfrak{A}$ invariantní. Pak jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ vzájemně zaměnitelné, podgrupa $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a podgrupa $\mathfrak{B}$ má touž vlastnost v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$. Dále jsou faktorové grupy $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ a $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ spřažené a tedy izomorfní, takže

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

přičemž zobrazení každé z těchto faktorových grup na druhou, realizované incidencí prvků, je izomorfní.

Zejména (pro $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$) platí tato věta:

Buďte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je v $\mathfrak{G}$ invariantní. Pak jsou podgrupy $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vzájemně zaměnitelné a podgrupa $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je invariantní v $\mathfrak{C}$. Dále jsou faktorové grupy $\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ spřažené a tedy izomorfní, takže

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

přičemž zobrazení každé z těchto faktorových grup na druhou, realizované incidencí prvků, je izomorfní.

3. *Třetí věta.* Jak víme z teorie grupoidů (**16.1.3**), máme ještě třetí větu o izomorfismu grupoidů, jež se týká zákrytu faktoroidu.

Nechť $\mathfrak{B}$ značí libovolnou invariantní podgrupu v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ libovolnou invariantní podgrupu ve faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Podle třetí věty o izomorfismu grupoidů je faktorová grupa $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ izomorfní se zákrytem $\overline{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynuceným faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$, tj. $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1 \cong \overline{\mathfrak{A}}$, přičemž izomorfismus je zobrazení, v němž je ke každému prvku $\bar{\bar{b}} \in (\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ přiřazen součet $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ všech prvků $\bar{b} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$. Podle **25.5.1** je součet všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\mathfrak{B}_1$ polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Mimo to máme $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Odtud plyne *třetí věta o izomorfismu grup*:

Je-li $\mathfrak{B}$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, pak součet prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\mathfrak{B}_1$ je polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a platí vztah

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{A},$$

přičemž izomorfismus přiřazuje ke každému prvku $\bar{\bar{b}}$ faktorové grupy na levé straně součet všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$.

26.4. Deformace faktorových grup

Nyní navazujeme na výsledky v odst. **16.2** o deformaci faktoroidů. Všimněme si, jak se tyto výsledky utvářejí, když jde o faktorové grupy.

Nechť $\boldsymbol{d}$ značí libovolnou deformaci grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$, takže máme $\mathfrak{G}^* = \boldsymbol{d}\mathfrak{G}$.

Z odst. **26.3.1** víme, že množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ tvoří jistou invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je izomorfní s $\mathfrak{G}^*$.

Deformace $\boldsymbol{d}$ určuje rozšířené zobrazení $\boldsymbol{d}$ systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$ do systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}^*$; v tomto zobrazení je obrazem každé podmnožiny $A \subset \mathfrak{G}$ podmnožina $\boldsymbol{d}A \subset \mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků $a \in A$ (**7.1**).

Budiž $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ libovolná faktorová grupa na grupě $\mathfrak{G}$ vytvořená jistou invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$.

Podle věty **25.3** jsou faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ doplňkové. Z toho plyne, že faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ má v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ jistý obraz $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$; $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je faktoroid na grupě $\mathfrak{G}^*$ (**16.2.**1). Částečné rozšířené zobrazení $\boldsymbol{d}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je deformace, tzv. rozšířená deformace $\boldsymbol{d}$ (**16.2.**2).

Obraz pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ obsahuje jednotku grupy $\mathfrak{G}^*$ (**26.1.**1). Z toho plyne, že $\boldsymbol{d}A \in \boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je polem jisté podgrupy $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}^*$ a že faktoroid $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je faktorová grupa vytvořená invariantní podgrupou $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ (**24.3.**2), tj. $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) = \boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$.

Nejmenší společný zákryt $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ faktorových grup $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ a faktorová grupa $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ jsou izomorfní; izomorfní zobrazení faktoroidu $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ na $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ obdržíme, když ke každému prvku onoho faktoroidu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ (**16.2.**3). Faktoroid $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ (**25.3**).

Došli jsme k tomuto výsledku:

Když je grupa $\mathfrak{G}^*$ homomorfní ($\boldsymbol{d}$) s grupou $\mathfrak{G}$, pak obrazem každé faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ je faktorová grupa $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ a částečné rozšířené zobrazení $\boldsymbol{d}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na faktorovou grupu $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ je deformací. Faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$, $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ jsou izomorfní; izomorfní zobrazení faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ na $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ obdržíme, když ke každému prvku první faktorové grupy přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$.

Zejména je každá faktorová grupa, která je zákrytem faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$,, izomorfní se svým obrazem v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$. Izomorfní zobrazení dostaneme když ke každému prvku zákrytu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$.

26.5. Cvičení

1. Realizujte permutacemi abstraktní grupu 4. řádu, jejíž multiplikační tabulka je v odst. **19.6.**1 napsána první.

2. Když je dána multiplikační tabulka nějaké konečné grupy $\mathfrak{G}$, pak symboly levých translací na $\mathfrak{G}$ obdržíme, když po každé opíšeme vodorovné záhlaví a pod ně napíšeme jeden řádek tabulky. Podobně sestavíme ze svislého záhlaví a jednotlivých sloupců symboly pravých translací na $\mathfrak{G}$.

3. Pravidelný osmistěn má celkem 13 os souměrnosti (3 procházejí vždy dvěma protějšími vrcholy, 6 prochází středy vždy dvou protějších hran a 4 středy vždy dvou protějších stěn). Všechna otočení osmistěnu okolo os souměrnosti, která osmistěn převádějí v sebe, tvoří grupu 24. řádu, tzv. *grupu oktaedrickou* (přitom se otočení okolo téže osy o úhly lišící se o celé násobky 360° považují za stejná); označme pro okamžik tuto grupu $\mathfrak{O}$. Každému otočení, které je prvkem v $\mathfrak{O}$, odpovídá jistá permutace 3 os souměrnosti procházejících vždy dvěma protějšími vrcholy. Když ke každému prvku v $\mathfrak{O}$ přiřadíme příslušnou permutaci, obdržíme deformaci grupy $\mathfrak{O}$ na symetrickou permutační grupu $\mathfrak{S}_3$. Použijte této deformace a dokažte pomocí první a třetí věty o izomorfismu grup, že grupa $\mathfrak{O}$ obsahuje invariantní podgrupy řádů 4, 12.