# Základy teorie grupoidů a grup

## 23. Speciální rozklady grup vytvořené podgrupami

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 170--179.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401450

# 23. Speciální rozklady grup vytvořené podgrupami

## 23.1. Polospřažené a spřažené levé rozklady

Vezměme v úvahu libovolné podgrupy $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ v grupě $\mathfrak{G}$. Symboly $A, B, C, D$ označme jejich pole.

Především se tážeme, za jakých okolností jsou levé rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ polospřažené, popř. spřažené.

Protože průnik $A \cap B$ obsahuje jednotku grupy $\mathfrak{G}$ a tedy není prázdný, vidíme se zřetelem na **4.1**, že zmíněné rozklady jsou polospřažené právě tehdy, když platí

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}.$$

Podle **21.2.**1 můžeme tento vzorec přepsat na tvar:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}).$$

Vidíme, že tato rovnost platí tehdy a jen tehdy, když

(1) $$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}.$$

Tím jsme došli k poznatku, že *levé rozklady* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ *jsou polospřažené právě tehdy, když podgrupy* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *splývají, tj. když* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$.

Nyní předpokládejme, že levé rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ jsou spřažené. Pak podle **4.1**; **20.3.**2 máme mimo hořejší rovnost (1) též tyto vztahy:

$$A = (A \cap C)\,B\,, \quad C = (C \cap A)\,D\,.$$

Z nich soudíme (**19.7.**8), že podgrupa $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ je zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, takže je:

(2) $$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}\,, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}\,.$$

Naopak, když vzorce (1) a (2) současně platí, soudíme se zřetelem na **4.1** a **21.2.**1, že levé rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ jsou spřažené.

Vidíme, že *levé rozklady* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ *jsou spřažené právě tehdy, když současně platí vzorce*:

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}\,,$$
$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}\,, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}\,.$$

## 23.2. Obecná věta o pěti grupách

Vezměme v úvahu libovolné podgrupy $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ v grupě $\mathfrak{G}$. Předpokládáme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Dále nechť je $\mathfrak{U}$ libovolná podgrupa taková, že

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$$

a podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{U}$ nechť jsou zaměnitelné s každou podgrupou $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$.

V této situaci platí tzv. *obecná věta o pěti grupách*:

*Levé rozklady* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ *jsou spřažené a tedy ekvivalentní, takže*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}\,.$$

*Mimoto platí tyto vzorce*:

(1) $$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{D} = \mathfrak{U} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{B}\,.$$

Důkaz. Označme $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}$ a dále: $\bar{A} = \mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B}$, $\bar{C} = \mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D}$. Pak je $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' \supset \mathfrak{D}$ a mimoto (**20.3.2**): $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$.

Vezměme v úvahu rozklady:

$$\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}' = (\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{C}')/_l(\mathfrak{C}' \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,,$$
$$\bar{C} \sqcap \mathfrak{A}' = \mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}' = (\mathfrak{C}' \cap \mathfrak{A}')/_l(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{D}) = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$$

a aplikujme konstrukci, kterou jsme popsali v odst. **4.1**, vedoucí ke spřaženým zákrytům $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$.

Nejmenší společný zákryt rozkladů $\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}'$, $\bar{C} \sqcap \mathfrak{A}'$ je levý rozklad $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l$ $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ (**21.3**). Vzhledem k platnosti vztahů $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}) \cdot$ $\cdot\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ je rozklad $\bar{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\mathfrak{U}$ zákrytem nejmenšího společného zákrytu rozkladů $\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}'$, $\bar{C} \sqcap \mathfrak{A}'$ (**21.5**) a tedy představuje společný zákryt těchto rozkladů. V souhlase se zmíněnou konstrukcí definujeme nyní rozklad $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$) na rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{C}$) takto: Každý prvek v $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$) je množina všech prvků rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{C}$), které jsou incidentní vždy s týmž prvkem v $\bar{B}$. Pak zmíněné spřažené zákryty $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou zákryty těchto rozkladů vynucené rozklady $\bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{C}}$.

Nuže, budiž $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ libovolný prvek. Prvek $\bar{\bar{a}}$ se skládá ze všech prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ incidentních s jistým prvkem $\bar{b} \in \bar{B}$. Současně máme $\bar{b} = x\mathfrak{U}$, přičemž $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ značí některý bod v podgrupě $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Vidíme, že platí rovnost $\bar{\bar{a}} = x\mathfrak{U} \sqsubset \bar{A}$ a dále (vzhledem k **20.3.2**) vztahy: $\mathring{a} = \mathbf{s}\bar{\bar{a}} = x\mathfrak{U}\mathfrak{B} \in \mathring{A}$. Tím je zjištěno, že prvky rozkladu $\mathring{A}$ jsou levé třídy bodů ležících v podgrupě $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ vytvořené podgrupou $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$. Součet těchto tříd je zřejmě $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{U}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$. Odtud vychází rovnost: $\mathring{A} = (\mathfrak{A} \cap$ $\cap\, \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}$. Podobně obdržíme: $\mathring{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$. Tím je ukázáno, že levé rozklady $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ jsou spřažené. Podle druhé věty o ekvivalenci (**6.8**) jsou též ekvivalentní.

Mimoto máme (podle **4.1**): $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$, a tedy (podle **2.3**): $(\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C}) \sqcap (\mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A}) = \bar{B}$; dále platí (**4.1**): $\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C} = \mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A}$. Tímto postupem docházíme ke vzorcům $\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C} = \mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A} = \bar{B}$ neboli

$$((\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D})/_l((\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \\ = ((\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B})/_l((\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\mathfrak{U}\,.$$

Z nich vychází bezprostředně hořejší formule (1).

Poznámka. Za předpokladů hořejší obecné věty o pěti grupách platí ovšem obdobný výrok též o pravých rozkladech, takže zejména máme:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_p\mathfrak{U}\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_p\mathfrak{U}\mathfrak{D}\,.$$

Zejména pro $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ máme tzv. *obecnou větu o čtyřech grupách*: *Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ libovolné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$. Předpokládáme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné, podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ jsou zaměnitelné s podgrupou $\mathfrak{B}$ a podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ s podgrupou $\mathfrak{D}$. V této situaci jsou levé rozklady $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}$ spřažené a tedy ekvivalentní, takže*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}\,.$$

*Mimoto platí tyto vzorce:*

(2) $$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}\,.$$

Obdobný výrok platí též o pravých rozkladech, takže zejména máme:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_p(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_p(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}\,.$$

## 23.3. Adjungované levé rozklady

Buďte opět $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ libovolné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a $A \supset B$, $C \supset D$ jejich pole.

Tážeme se, za jakých okolností jsou levé rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ adjungované vzhledem k $B$, $D$.

V tomto směru platí tato věta:

*Levé rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ jsou adjungované vzhledem k $B$, $D$ právě tehdy, když podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. V tomto případě platí vzorce:*

(1) $$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,.$$

Důkaz. Podle **2.6.5** máme

$$D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C = (D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \sqcap C = D \sqsubset (\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}),$$
$$B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A = (B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqcap A = B \sqsubset (\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A})\,.$$

Z těchto vztahů soudíme s ohledem na **21.2.1** na správnost rovností:

$$\mathbf{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) = \mathbf{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \cap C = \mathbf{s}(D \sqsubset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}))\,,$$
$$\mathbf{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A) = \mathbf{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \cap A = \mathbf{s}(B \sqsubset (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}))\,,$$

které (podle **20.3.2**) mohou být vyjádřeny takto:

(2) $$\mathbf{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) = (A \cap D)\, B \cap C = (A \cap D)\,(C \cap B)\,,$$
$$\mathbf{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A) = (C \cap B)\, D \cap A = (C \cap B)\,(A \cap D)\,.$$

a) Předpokládejme, že rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ jsou adjungované vzhledem k $B$, $D$. Pak máme podle (2),

$$(A \cap D)\,(C \cap B) = (C \cap B)\,(A \cap D)\,.$$

Vidíme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Následkem toho představuje součin $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ podgrupu v $\mathfrak{G}$. Dále z vzorců (2) soudíme, že pole této podgrupy splývá s každým z obou komplexů $(A \cap D)\, B \cap C$, $(C \cap B)\, D \cap \cap A$, což právě vyjadřují vzorce (1). Zdůrazněme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ a rovněž podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ nejsou nutně vzájemně zaměnitelné.

b) Předpokládejme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Pak podle (2) platí rovnost $\mathbf{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) = \mathbf{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A)$ a vidíme, že rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ jsou adjungované vzhledem k $B$, $D$. Tím je důkaz proveden.

O pravých rozkladech obdobně platí věta:

*Pravé rozklady $\mathfrak{A}/_p\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_p\mathfrak{D}$ jsou adjungované právě tehdy, když podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. V tomto případě platí vzorce:*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}) \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{D}(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,.$$

## 23.4. Řady podgrup

V této kapitole popíšeme vlastnosti řad podgrup opírajíce se o teorii řad rozkladů, kterou jsme vyvinuli v kap. **10**. Tato nová teorie se později bohatě uplatní v souvislosti s invariantními podgrupami (**24.**6) v oboru klasické teorie grup.

1. *Základní pojmy.* Buďte $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ libovolné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$.

*Řadou podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$* (stručněji *řadou od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$*) rozumíme konečnou $\alpha$ ($\geqq 1$)-člennou posloupnost podgrup $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ v grupě $\mathfrak{G}$ s těmito vlastnostmi: a) První člen posloupnosti je $\mathfrak{A}$ a poslední $\mathfrak{B}$, tedy $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}$; b) každý následující člen je podgrupou v podgrupě bezprostředně předcházející, tedy:

$$(\mathfrak{A} =)\quad \mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{A}_\alpha \quad (= \mathfrak{B})\,.$$

Takovou řadu značíme stručněji $(\mathfrak{A})$. Podgrupy $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ jsou tzv. *členy řady* $(\mathfrak{A})$. $\mathfrak{A}_1$ je *počáteční* a $\mathfrak{A}_\alpha$ *koncový člen* řady $(\mathfrak{A})$. *Délkou řady* $(\mathfrak{A})$ rozumíme počet $\alpha$ jejích členů.

Např. každá podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ tvoří řadu délky 1, jejíž počáteční a koncový člen splývá s touto podgrupou $\mathfrak{A}$.

Budiž nyní $(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha$ libovolná řada od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$.

Libovolný člen řady $(\mathfrak{A})$ se nazývá *podstatný*, když je to buď první člen $\mathfrak{A}_1$ nebo když představuje vlastní podgrupu (**19.4.1**) v členu bezprostředně předcházejícím; v jiných případech se nazývá *nepodstatný*. Když se v řadě $(\mathfrak{A})$ vyskytuje alespoň jeden nepodstatný člen $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$, pravíme (vzhledem k tomu, že $\mathfrak{A}_{\gamma+1} = \mathfrak{A}_\gamma$), že $(\mathfrak{A})$ je *řada s opakováním*. Když jsou všechny členy řady $(\mathfrak{A})$ podstatné, nazývá se $(\mathfrak{A})$ *řada bez opakování*. Počet $\alpha'$ podstatných členů řady $(\mathfrak{A})$ je tzv. *redukovaná délka řady* $(\mathfrak{A})$. Zřejmě platí vztahy: $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, přičemž rovnost $\alpha' = \alpha$ charakterizuje řady bez opakování. Podobně jako v případě řad rozkladů (**10.1**) můžeme řadu $(\mathfrak{A})$ vypuštěním všech nepodstatných členů, jsou-li jaké, redukovat, popř. vsunutím dalších podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ prodloužit. Rovněž pojem *částečné řady* neboli *části řady* $(\mathfrak{A})$ je bez dalšího výkladu jasný.

*Zjemněním řady* $(\mathfrak{A})$ rozumíme řadu podgrup v $\mathfrak{G}$, která obsahuje řadu $(\mathfrak{A})$ jako svou část. Každé zjemnění řady $(\mathfrak{A})$ má tedy tento tvar:

$$\mathfrak{A}_{1,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{1,\beta_1-1} \supset \mathfrak{A}_{1,\beta_1} \supset \mathfrak{A}_{2,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{2,\beta_2-1} \supset \mathfrak{A}_{2,\beta_2} \supset \ldots$$
$$\ldots \supset \mathfrak{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}\,.$$

Přitom je $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \mathfrak{A}_\gamma$, $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ a symboly $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ znamenají přirozená čísla; když $\beta_\delta = 1$, pak nečteme členy $\mathfrak{A}_{\delta,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{\delta,\beta_\delta-1}$.

2. *Přiřazené řady levých a pravých rozkladů.* Budiž $((\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha$ libovolná řada rozkladů v grupě $\mathfrak{G}$.

K řadě $(\mathfrak{A})$ přiřaďme tyto řady levých a pravých rozkladů:

$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha\,,$$
$$((\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha\,.$$

Mluvíme pak o *přiřazených* (popř. *příslušných*) řadách levých nebo pravých rozkladů patřících k řadě $(\mathfrak{A})$. Vidíme, že řadu $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, popř. $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ obdržíme, když každý člen $\mathfrak{A}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ řady $(\mathfrak{A})$ nahradíme levým (popř. pravým) rozkladem $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$ $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\gamma)$.

Vezměme v úvahu např. řadu levých rozkladů $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$. Stejně bychom ovšem mohli uvažovat o řadě pravých rozkladů $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$.

Především je zřejmá platnost těchto výroků:

*Řady* $(\mathfrak{A})$ *a* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ *mají touž délku* $\alpha$.

*Řady* $(\mathfrak{A})$ *a* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ *jsou současně bez opakování nebo s opakováním a mají vždy touž redukovanou délku* $\alpha'$ $(\leqq \alpha)$.

*Řada levých rozkladů* $(\mathfrak{G}/_l\mathring{\mathfrak{A}})$ *přiřazená k libovolnému zjemnění* $(\mathring{\mathfrak{A}})$ *řady* $(\mathfrak{A})$ *je zjemněním řady* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$.

Tím, že jsme do úvah o řadách podgrup zavedli pojem přiřazených řad levých a pravých rozkladů, získáváme možnost podřadit vlastnosti řad podgrup teorii řad rozkladů. K tomu cíli stačí přenést úvahy zavedené pro řady rozkladů na řady podgrup. Přitom je nutno dbát na to, aby se v některém směru nedávala přednost levým popř. pravým rozkladům, ale aby se přenášely na řady podgrup jenom takové vlastnosti, které jsou společné rozkladům levým i pravým. Význam této poznámky vynikne jasněji v průběhu dalších úvah.

3. *Varieta lokálních řetězců.* Vezměme v úvahu libovolnou řadu $(\mathfrak{A})$ podgrup v grupě $\mathfrak{G}$:

$$(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$

a dále příslušné řady levých a pravých rozkladů na $\mathfrak{G}$:

$$(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha\,,$$
$$(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha\,.$$

Víme, že ke každému prvku $\bar{a}$ rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$, popř. $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha$ patří lokální řetězec řady $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, popř. $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$ s bází $\bar{a}$. Množina lokálních řetězců patřících k jednotlivým prvkům rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$, popř. $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha$, je tzv. *levá, popř. pravá, varieta lokálních řetězců příslušná k řadě* $(\mathfrak{A})$. Označení: $\tilde{\mathrm{A}}_l$, popř. $\tilde{\mathrm{A}}_p$.

Mezi varietami $\tilde{\mathrm{A}}_l$, $\tilde{\mathrm{A}}_p$ jsou jisté vztahy, jimiž se nyní budeme zabývat.

Především připomeňme, že ke každé levé (pravé) třídě $\bar{a}$ vzhledem k libovolné podgrupě v grupě $\mathfrak{G}$ existuje inverzní pravá (levá) třída $\bar{a}^{-1}$. Třída $\bar{a}^{-1}$ se skládá ze všech bodů inverzních k jednotlivým bodům ležících v $\bar{a}$ (**20.2.**8).

Nuže, vezměme v úvahu libovolné vzájemně inverzní třídy $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$, $\bar{a}^{-1} \in \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha$ a příslušné lokální řetězce řad $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$ s bázemi $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$:

$$([\bar{K}\bar{a}] \;=)\, \bar{K}_1\bar{a} \;\to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}\,,$$
$$([\bar{K}\bar{a}^{-1}] =)\, \bar{K}_1\bar{a}^{-1} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}^{-1}\,.$$

V těchto vzorcích jsme k označení lokálních řetězců $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ a jejich členů $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ použili kvůli jednoduchosti téhož symbolu $\bar{K}$, ačkoli jde o lokální řetězce nebo členy řad $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$, které jsou obecně různé. Toto zjednodušení nemůže vést k nejasnostem, neboť označení zmíněných lokálních řetězců a jejich členů se liší v symbolech bází $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$. Podobného zjednodušeného označení použijeme i v dalších úvahách.

Budiž $\bar{a}_\gamma$ prvek rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$ obsahující jako podmnožinu bázi $\bar{a}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Pak inverzní třída $\bar{a}_\gamma^{-1}$ je prvkem rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\gamma$ obsahujícím jako podmnožinu bázi $\bar{a}^{-1}$. Zřejmě platí vztahy: $\bar{a}_1 \supset \ldots \supset \bar{a}_\alpha (= \bar{a})$, $\bar{a}_1^{-1} \supset \ldots \supset \bar{a}_\alpha^{-1} (= \bar{a}^{-1})$ a dále:

$$\bar{a}_\gamma \;\;= \bar{a}\mathfrak{A}_\gamma\,, \qquad \bar{K}_\gamma\bar{a} \;\;= \bar{a}_\gamma \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_{\gamma+1}\,,$$
$$\bar{a}_\gamma^{-1} = \mathfrak{A}_\gamma\bar{a}^{-1}\,, \quad \bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1} = \bar{a}_\gamma^{-1} \sqcap \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_{\gamma+1}\,, \quad (\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha)\,.$$

Každý z obou rozkladů $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ se zobrazí rozšířenou inverzí $\boldsymbol{n}$ grupy $\mathfrak{G}$ na druhý (**21.8.**5), takže $\boldsymbol{n}\bar{K}_\gamma\bar{a} = \bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$, $\boldsymbol{n}\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1} = \bar{K}_\gamma\bar{a}$. Se zřetelem na tuto skutečnost, nazýváme dva členy $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ s týmž indexem $\gamma (= 1, \ldots, \alpha)$ *vzájemně inverzní*, a tohoto pojmenování používáme též pro lokální řetězce $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$.

Dva vzájemně inverzní členy lokálních řetězců $[\overline{K}\bar{a}]$, $[\overline{K}\bar{a}^{-1}]$ jsou ekvivalentní množiny (**21.8**.5).

Snadno zjistíme, že *variety lokálních řetězců* $\tilde{A}_l$, $\tilde{A}_p$ *jsou silně ekvivalentní.*

Vskutku, když ke každému lokálnímu řetězci $[\overline{K}\bar{a}] \in \tilde{A}_l$ přiřadíme inverzní lokální řetězec $[\overline{K}\bar{a}^{-1}] \in \tilde{A}_p$, obdržíme prosté zobrazení $\boldsymbol{f}$ variety $\tilde{A}_l$ na varietu $\tilde{A}_p$ Toto zobrazení je silnou ekvivalencí, neboť každé dva vzájemně inverzní členy lokálních řetězců $[\overline{K}\bar{a}]$, a $\boldsymbol{f}[\overline{K}\bar{a}] = [\overline{K}\bar{a}^{-1}]$ jsou ekvivalentní množiny.

4. *Dvojice řad podgrup.* Vezměme v úvahu dvojici řad podgrup v grupě $\mathfrak{G}$:

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$
$$((\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1).$$

K těmto řadám patří řady levých rozkladů grupy $\mathfrak{G}$:

(1)
$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha,$$
$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\beta$$

a levé variety lokálních řetězců: $\tilde{A}_l$, $\tilde{B}_l$.

Obdobně patří k řadám $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ řady pravých rozkladů grupy $\mathfrak{G}$:

(2)
$$((\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\alpha,$$
$$((\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}_\beta$$

a pravé variety lokálních řetězců $\tilde{A}_p$, $\tilde{B}_p$.

V této situaci platí věta:

*Když obě řady* (1), *popř.* (2) *jsou v některém z následujících čtyř vztahů, pak v témže vztahu jsou i obě řady* (2), *popř.* (1): *Řady* (1), *popř.* (2) *jsou* a) *doplňkové,* b) *řetězcově ekvivalentní,* c) *volně spjaté nebo kobaziálně volně spjaté,* d) *spjaté nebo kobaziálně spjaté.*

Důkaz. Předpokládejme, že např. řady (1) jsou doplňkové.

V tomto případě je každý člen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\mu$ řady $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ doplňkový ke každému členu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\nu$ řady $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ (**10.8**); $\mu = 1, \ldots, \alpha$; $\nu = 1, \ldots, \beta$. V důsledku toho je každý člen $\mathfrak{A}_\mu$ řady $(\mathfrak{A})$ zaměnitelný s každým členem $\mathfrak{B}_\nu$ řady $(\mathfrak{B})$ (**21.6**). Vidíme, že též každý člen $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}_\mu$ řady $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$ je doplňkový ke každému členu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}_\nu$ řady $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B})$ (**21.6**), takže řady (2) jsou doplňkové.

Dále předpokládejme, že např. řady (1) jsou v některém ze vztahů b), c), d). V této situaci mají řady (1), (2) a tedy i řady $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ touž délku $\alpha = \beta$ a v každém z uvedených případů existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{f}_l$ (silná ekvivalence, ekvivalence spojená s volným spřažením, ekvivalence spojená se spřažením) variety $\tilde{A}_l$ na varietu $\tilde{B}_l$, která je popřípadě kobaziální. Pomocí zobrazení $\boldsymbol{f}_l$ definujeme prosté zobrazení $\boldsymbol{f}_p$ variety $\tilde{A}_p$ na varietu $\tilde{B}_p$ tak, že ke každému prvku $[\overline{K}\bar{a}] \in \tilde{A}_p$ vezmeme inverzní lokální řetězec $[\overline{K}\bar{a}^{-1}] \in \tilde{A}_l$ a k prvku $[\overline{K}\bar{a}]$ přiřadíme lokální řetězec $\boldsymbol{f}_p[\overline{K}\bar{a}] = [\overline{K}\bar{b}^{-1}] \in \tilde{B}_p$, inverzní k lokálnímu řetězci $\boldsymbol{f}_l[\overline{K}\bar{a}^{-1}] = [\overline{K}\bar{b}] \in \tilde{B}_l$. Když je zobrazení $f_l$ kobaziální, máme $\bar{b} = \bar{a}^{-1}$, tedy $\bar{b}^{-1} = \bar{a}$, a vidíme, že též zobrazení $f_p$ je kobaziální.

Nechť nyní značí $[\bar{K}\bar{a}]$, $f_p[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{b}^{-1}]$ libovolné prvky variet $\tilde{\mathrm{A}}_p$, $\tilde{\mathrm{B}}_p$, které jsou vzorem a obrazem vzhledem k zobrazení $f_p$. Vezměme v úvahu příslušné inverzní lokální řetězce $[\bar{K}\bar{a}^{-1}] \in \tilde{\mathrm{A}}_l$, $f_l[\bar{K}\bar{a}^{-1}] = [\bar{K}\bar{b}] \in \tilde{\mathrm{B}}_l$:

$$([\bar{K}\bar{a}^{-1}] =) \quad \bar{K}_1\bar{a}^{-1} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}^{-1}\,,$$
$$([\bar{K}\bar{b}] =) \quad \bar{K}_1\bar{b} \quad \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{b}\,.$$

Vzhledem k tomu, že řady (1) jsou v některém ze vztahů b), c), d), existuje permutace $p$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ taková, že každé dva členy $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$, $\bar{K}_\delta\bar{b}$ lokálních řetězců $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$, $[\bar{K}\bar{b}]$ představují ekvivalentní nebo volně spřažené nebo spřažené rozklady v grupě $\mathfrak{G}$; přitom je $\delta = p\gamma$. Uplatněme permutaci $p$ na lokální řetězce $[\bar{K}\bar{a}] \in \tilde{\mathrm{A}}_p$, $f_p[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{b}^{-1}] \in \tilde{\mathrm{B}}_p$ tím, že ke každému členu $\bar{K}_\gamma\bar{a}$ prvního lokálního řetězce přiřadíme člen $\bar{K}_\delta\bar{b}^{-1}$ druhého. Každé dva takové členy $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\delta\bar{b}^{-1}$ představují rozklady v $\mathfrak{G}$, které jsou inverzní k ekvivalentním nebo volně spřaženým nebo spřaženým rozkladům $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$, $\bar{K}_\delta\bar{b}$. Z toho soudíme, že též rozklady $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\delta\bar{b}$ jsou vzájemně ekvivalentní nebo volně spřažené nebo spřažené (**7.3.4**). Tím je důkaz proveden.

Symetrie, kterou jsme právě zjistili ve vztazích mezi řadami levých a pravých rozkladů příslušnými k řadám $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, vede k této definici:

Řady podgrup $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ nazýváme: a) *doplňkové* neboli *vzájemně zaměnitelné*, b) *řetězcově ekvivalentní*, popř. *kobaziálně řetězcově ekvivalentní*, c) *polospjaté* neboli *volně spjaté*, popř. *kobaziálně polospjaté* neboli *kobaziálně volně spjaté*, d) *spjaté*, popř. *kobaziálně spjaté*, když řady levých rozkladů $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$, a tedy (podle hořejší věty) též řady pravých rozkladů $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B})$ grupy $\mathfrak{G}$ příslušné k řadám $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ mají příslušnou vlastnost.

5. *Doplňkové řady podgrup.* Vezměme v úvahu libovolné dvě doplňkové řady podgrup v grupě $\mathfrak{G}$:

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1)\,,$$
$$((\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1)\,.$$

K těmto řadám patří příslušné řady levých a pravých rozkladů grupy $\mathfrak{G}$: $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ a $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B})$, které jsou podrobněji zapsány ve vzorcích (1), (2).

Platí tato věta:

*Řady* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *mají kobaziálně spjatá zjemnění* $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ *se splývajícími počátečními a koncovými členy. Tato zjemnění jsou dána konstrukcí popsanou v části* a) *následujícího důkazu.*

Důkaz. a) Podle předpokladu jsou každé dva rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\delta$ ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$) vzájemně doplňkové a tedy každé dvě podgrupy $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{B}_\delta$ jsou vzájemně zaměnitelné (**21.6**). Podle **22.2.1** jsou i podgrupy $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu$, popř. $\mathfrak{B}_\delta$, $\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu$ ($\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}$; $\mu = 1, \ldots, \alpha$; $\nu = 1, \ldots, \beta$) vzájemně zaměnitelné a platí:

$$(3) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} =)\ \ & \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma\mathfrak{B}_\nu\,, \\ (\mathfrak{B}_{\delta,\mu} =)\ \ & \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu) = \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\delta\mathfrak{A}_\mu\,. \end{aligned}$$

Označme:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{V}\,,$$
$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}\,, \quad \mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{V}\,.$$

Pak platí vzorce (3) pro $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$.
Z definice podgrup $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ soudíme na správnost vztahů:

$$\mathfrak{A}_{\gamma-1} \supset \mathfrak{A}_{\gamma,\nu}\,, \quad \mathfrak{A}_{\gamma,\beta+1} = \mathfrak{A}_\gamma\,,$$
$$\mathfrak{B}_{\delta-1} \supset \mathfrak{B}_{\delta,\mu}\,, \quad \mathfrak{B}_{\delta,\alpha+1} = \mathfrak{B}_\delta\,;$$

mimoto pro $\nu \leqq \beta$, $\mu \leqq \alpha$ máme:

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} \supset \mathfrak{A}_{\gamma,\nu+1}\,, \quad \mathfrak{B}_{\delta,\mu} \supset \mathfrak{B}_{\delta,\mu+1}\,.$$

Tím docházíme k těmto řadám podgrup od $\mathfrak{A}_{\gamma,1}$ do $\mathfrak{A}_\gamma$ a od $\mathfrak{B}_{\delta,1}$ do $\mathfrak{B}_\delta$:

$$\mathfrak{A}_{\gamma,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{\gamma,\beta+1}\,,$$
$$\mathfrak{B}_{\delta,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{\delta,\alpha+1}\,.$$

Následující řady podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ představují tedy zjemnění řad $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$:

$$((\mathfrak{A}_*) =)\ \ \mathfrak{U} = \mathfrak{A}_{1,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{1,\beta+1} \supset \mathfrak{A}_{2,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{2,\beta+1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,1} \supset$$
$$\supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathfrak{V}\,,$$
$$((\mathfrak{B}_*) =)\ \ \mathfrak{U} = \mathfrak{B}_{1,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{1,\alpha+1} \supset \mathfrak{B}_{2,1} \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{2,\alpha+1} \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{\beta+1,1} \supset$$
$$\supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{\beta+1,\alpha+1} = \mathfrak{V}\,.$$

Vidíme, že řady $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ mají touž délku a jejich počáteční a koncové členy splývají: $(\mathfrak{U} =)\, \mathfrak{A}_{1,1} = \mathfrak{B}_{1,1}$, $\mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1,\alpha+1}$ $(= \mathfrak{V})$. *Řady* $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ *jsou zmíněná kobaziálně spjatá zjemnění řad* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

b) Ukážeme, že řady levých rozkladů $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_*)$, příslušné k řadám $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ jsou kobaziálně spjatá. Tyto řady obdržíme, když každý člen $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$ řady $(\mathfrak{A}_*)$ nahradíme levým rozkladem $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$ a každý člen $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ řady $(\mathfrak{B}_*)$ levým rozkladem $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$.

Zavedeme označení:

$$\bar{A}_\gamma = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma\,, \quad \bar{B}_\delta = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\delta\,, \quad \mathring{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}\,, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_{\delta,\mu}\,,$$

načež ve smyslu vzorců (3) a podle **21.4** a **21.5** máme

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} = [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] = (\bar{A}_{\gamma-1}, [\bar{A}_\gamma, \bar{B}_\nu])\,,$$
$$\mathring{B}_{\delta,\mu} = [\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] = (\bar{B}_{\delta-1}, [\bar{B}_\delta, \bar{A}_\mu])\,.$$

Vidíme, že řady rozkladů $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_*)$, příslušné k řadám $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$, vzniknou z doplňkových řad $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ konstrukcí popsanou v odst. **10.7** v důkazu část a). Podle **10.8** jsou tedy zmíněné řady $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_*)$ kobaziálně spjaté. Tím je důkaz proveden.

## 23.5. Cvičení

1. Realizujte obecnou větu o pěti grupách podgrupami v grupě $\mathfrak{Z}$ (**18.5.1**).

2. Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ libovolné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a $A \supset B$, $C \supset D$ jejich pole. Předpokládáme, že levé rozklady $(\bar{A} =)\ \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $(\bar{C} =)\ \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ v grupě $\mathfrak{G}$ jsou adjungované vzhledem k $B$, $D$. Proveďte konstrukci popsanou v odst. **4.2**, vedoucí ke spřaženým zákrytům $\dot{A}$, $\mathring{C}$ rozkladů $\bar{A}_1 = C \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\bar{C}_1 = A \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$.