17. Řady faktoroidů

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 126--131.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401444

17. Řady faktoroidů

V této kapitole vyvineme teorii tzv. řad faktoroidů. Teorie řad faktoroidů se zakládá na vlastnostech, které jsme zjistili u řad rozkladů na množinách v kap. 10, jenže úvahy rozhojníme o algebraické situace vyplývající z násobení. Uvidíme, že se v této nové teorii přirozeným způsobem a vydatně uplatňují pojmy, které souvisí s vlastnostmi α-stupňových grupoidních útvarů.

17.1. Základní pojmy

Buďte $\overline{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Řadou faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$, *od* $\overline{\mathfrak{A}}$ *do* $\overline{\mathfrak{B}}$, stručněji *řadou od* $\overline{\mathfrak{A}}$ *do* $\overline{\mathfrak{B}}$ rozumíme konečnou α-člennou ($\alpha \geqq 1$) posloupnost faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ na $\mathfrak{G}$ s těmito vlastnostmi: a) První faktoroid je $\overline{\mathfrak{A}}$, poslední $\overline{\mathfrak{B}}$; tedy $\overline{\mathfrak{A}}_1 = \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha = \overline{\mathfrak{B}}$; b) každý následující faktoroid představuje zjemnění faktoroidu bezprostředně předcházejícího, tedy

$$(\overline{\mathfrak{A}} =) \quad \overline{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \overline{\mathfrak{A}}_\alpha \quad (= \overline{\mathfrak{B}}).$$

Takovou řadu označujeme stručně symbolem $(\overline{\mathfrak{A}})$. Faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ se nazývají *členy řady* $(\overline{\mathfrak{A}})$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_1$ je *počáteční*, $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ *koncový člen řady* $(\overline{\mathfrak{A}})$. *Délkou řady* $(\overline{\mathfrak{A}})$ rozumíme počet α jejích členů.

Např. představuje faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ řadu délky 1; počáteční a koncový člen této řady splývá s faktoroidem $\overline{\mathfrak{A}}$.

Pole jednotlivých členů libovolné řady faktoroidů $(\overline{\mathfrak{A}})$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ tvoří řadu vytvořujících rozkladů $(\bar{A})$ na $\mathfrak{G}$. Pojmy a výsledky, které známe pro řadu $(\bar{A})$, můžeme bezprostředně přenést na řadu $(\overline{\mathfrak{A}})$. Tímto způsobem můžeme např. definovat délku řady $(\overline{\mathfrak{A}})$ jakožto délku řady $(\bar{A})$. Je přirozené, že pro teorii řad faktoroidů přicházejí v úvahu zejména takové situace, které souvisí s násobením.

Z pojmů, které tímto postupem přecházejí do teorie řad faktoroidů a jejichž obsah vzhledem ke zřejmému významu zde explicitně nevysvětlujeme, uveďme zejména tyto: *podstatné a nepodstatné členy, redukovaná délka, zkrácení a prodloužení, zjemnění řady* $(\overline{\mathfrak{A}})$. Dále jsou důležité pojmy *modulárních a doplňkových řad faktoroidů*, které do teorie řad faktoroidů rovněž přecházejí z úvah o řadách rozkladů množin uvedeným způsobem.

17.2. Lokální řetězce

Východiskem dalších úvah je pojem lokálního řetězce. Také tento pojem patří k základním pojmům, které přecházejí z teorie řad rozkladů do nové teorie řad faktoroidů (**10.2**). Nicméně jej zde vzhledem k jeho důležitosti uvedeme.

Budiž $((\bar{\mathfrak{A}}) =)\ \bar{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ řada faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$, libovolné délky $\alpha \geqq 1$.

Budiž $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ libovolný prvek a $\bar{a}_\gamma$ onen prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$, v němž je prvek $\bar{a}$ podmnožinou $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Pak máme vztah:

$$\bar{a}_1 \supset \ldots \supset \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_\alpha = \bar{a}).$$

Průsek

$$\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$$

splývá s obalem $\bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$ a představuje rozklad prvku $\bar{a}_\gamma$. Je to komplex v $\bar{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$ a vyznačuje se tím, že $\bar{a}_{\gamma+1} \in \bar{K}_\gamma$ $(\bar{a}_{\alpha+1} = \bar{a}_\alpha)$.

Řetězec rozkladů v $\mathfrak{G}$, od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_{\alpha+1}$:

$$([\bar{K}] =)\ \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$$

se nazývá *lokální řetězec řady* $(\bar{\mathfrak{A}})$ *příslušný k bázi* $\bar{a}$, stručněji *lokální řetězec s bází* $\bar{a}$. Označení jako nahoře nebo podrobněji: $([\bar{K}\bar{a}] =)\ \bar{K}_1\bar{a} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}$.

V souvislosti s násobením v grupoidu $\mathfrak{G}$ se může stát, že báze $\bar{a}$ a tedy i prvky $\bar{a}_\gamma \in \bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ jsou grupoidními podmnožinami (**14.5.1**). V tomto případě jsou rozklady $\bar{K}_\gamma$ vytvořující (**14.4.1**). Takový lokální řetězec nazýváme *grupoidní*. K jednotlivým vytvořujícím rozkladům $\bar{K}_\gamma$ patřící faktoroidy $\bar{\mathfrak{K}}_\gamma$ v grupoidu $\mathfrak{G}$, tvoří tzv. *lokální řetězec faktoroidů řady* $(\bar{\mathfrak{A}})$, *příslušný k bázi* $\bar{a}$, stručněji *lokální řetězec faktoroidů s bází* $\bar{a}$. Označení: $[\bar{\mathfrak{K}}]$ nebo $[\bar{\mathfrak{K}}\bar{a}]$.

17.3. Grupoid lokálních řetězců

Budiž

$$((\bar{\mathfrak{A}}) =)\ \bar{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{A}}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1)$$

libovolná řada faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ patří lokální řetězec $[\bar{K}\bar{a}]$ řady $(\bar{\mathfrak{A}})$ s bází $\bar{a}$.

Množina, která se skládá z lokálních řetězců patřících k jednotlivým prvkům faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha$, představuje tzv. *varietu lokálních řetězců* $\tilde{\mathrm{A}}$ *příslušnou k řadě* $(\bar{\mathfrak{A}})$. Je to zřejmě α-stupňový množinový útvar vzhledem k posloupnosti faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_{\alpha+1}$ $(\bar{\mathfrak{A}}_{\alpha+1} = \bar{\mathfrak{A}}_\alpha)$.

Ve varietě lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ můžeme definovat násobení takto: Pro každé dva prvky $[\bar{K}\bar{a}], [\bar{K}\bar{b}] \in \tilde{\mathrm{A}}$ je součin $[\bar{K}\bar{a}][\bar{K}\bar{b}]$ dán vzorcem:

$$[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}].$$

Varieta $\tilde{A}$ spolu s tímto násobením tvoří jistý grupoid $\tilde{\mathfrak{A}}$, který se nazývá *grupoid lokálních řetězců příslušný k řadě* $(\mathfrak{A})$.

Především ukážeme, že grupoid $\tilde{\mathfrak{A}}$ je α-stupňový grupoidní útvar vzhledem k posloupnosti faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_{\alpha+1}$ $(\bar{\mathfrak{A}}_{\alpha+1} = \bar{\mathfrak{A}}_\alpha)$.

Vskutku, každý prvek v $\tilde{\mathfrak{A}}$ je α-člennou posloupností, jejíž každý člen, s libovolným indexem γ $(= 1, \ldots, \alpha)$, představuje rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$, který je komplexem ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$. Násobení v $\tilde{\mathfrak{A}}$ se vyznačuje tím, že pro každé dva prvky

$$[\bar{K}\bar{a}] = \bar{K}_1\bar{a} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}\,, \quad [\bar{K}\bar{b}] = \bar{K}_1\bar{b} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{b} \in \tilde{\mathfrak{A}}$$

a jejich součin

$$[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}] = \bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{b} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a} \circ \bar{b} \in \tilde{\mathfrak{A}}$$

platí vztahy (**15.4**.2):

$$\bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{K}_1\bar{b} \subset \bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{b}, \ \ldots, \ \bar{K}_\alpha\bar{a} \circ \bar{K}_\alpha\bar{b} \subset \bar{K}_\alpha\bar{a} \circ \bar{b}\,.$$

Když ke každému bodu $a \in \mathfrak{G}$ přiřadíme lokální řetězec $[\bar{K}\bar{a}] \in \tilde{\mathfrak{A}}$ s bází $\bar{a} = \bar{a}_\alpha \in \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ obsahující bod a $(a \in \bar{a})$, obdržíme jisté zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid lokálních řetězců $\tilde{\mathfrak{A}}$, které je zřejmě deformací. Je to tzv. *přirozená deformace grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na grupoid lokálních řetězců* $\tilde{\mathfrak{A}}$. Faktoroid příslušný k deformaci $\boldsymbol{d}$ splývá s faktoroidem $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha$. *Lokálním řetězcem řady* $(\bar{\mathfrak{A}})$ *příslušným k bodu* a rozumíme lokální řetězec $[\bar{K}\bar{a}]$.

Buďte nyní

$$((\bar{\mathfrak{A}}) =) \quad \bar{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{A}}_\alpha\,,$$
$$((\bar{\mathfrak{B}}) =) \quad \bar{\mathfrak{B}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{B}}_\beta$$

libovolné řady faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$, které se vyznačují tím, že jejich koncové členy $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha, \bar{\mathfrak{B}}_\beta$ splývají, takže: $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha = \bar{\mathfrak{B}}_\beta$.

Vezměme v úvahu grupoidy lokálních řetězců $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ příslušné k řadám $(\bar{\mathfrak{A}})$, $(\bar{\mathfrak{B}})$.

Když ke každému prvku $[\bar{K}\bar{a}] \in \tilde{\mathfrak{A}}$ přiřadíme prvek $[\bar{L}\bar{a}] \in \tilde{\mathfrak{B}}$ s touž bází $\bar{a}$, obdržíme prosté zobrazení grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$. Toto zobrazení, které je zřejmě izomorfní, nazýváme *kobaziální izomorfismus*.

Vidíme, že *grupoidy lokálních řetězců, příslušné ke dvěma řadám faktoroidů se splývajícími koncovými členy, jsou izomorfní, přičemž deformace je realizována kobaziálním izomorfismem.*

17.4. Řetězcově izomorfní řady faktoroidů

Buďte

$$((\bar{\mathfrak{A}}) =) \quad \bar{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{A}}_\alpha\,,$$
$$((\bar{\mathfrak{B}}) =) \quad \bar{\mathfrak{B}}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{\mathfrak{B}}_\alpha$$

libovolné řady faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$ o téže délce α $(\geqq 1)$.

Označme symboly $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ grupoidy lokálních řetězců příslušné k těmto řadám.

Pravíme, že řada $(\overline{\mathfrak{A}})$ je *řetězcově izomorfní s řadou* $(\overline{\mathfrak{B}})$, když je grupoid $\tilde{\mathfrak{A}}$ silně izomorfní s grupoidem $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Když je řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ řetězcově izomorfní s řadou $(\overline{\mathfrak{A}})$, pak má řada $(\overline{\mathfrak{A}})$ vzhledem k $(\overline{\mathfrak{B}})$ touž vlastnost (**16.3.1**). S ohledem na tuto symetrii mluvíme též o *řetězcově izomorfních řadách* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Podle hořejší definice je řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ řetězcově izomorfní s řadou $(\overline{\mathfrak{A}})$, když existuje silný izomorfismus grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ (**16.3.2**). Když zejména koncové členy $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ řad $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ splývají a kobaziální zobrazení grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ je silným izomorfismem, pravíme, že řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ je *kobaziálně řetězcově izomorfní s řadou* $(\overline{\mathfrak{A}})$ a mluvíme o *kobaziálně řetězcově izomorfních řadách* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Předpokládejme, že řady $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ jsou řetězcově izomorfní.

Tato situace se dá stručně popsat takto:

Existuje izomorfní zobrazení $\boldsymbol{i}$ grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ a dále permutace $\boldsymbol{p}$ množiny čísel $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem:

Permutace $\boldsymbol{p}$ určuje pro každý prvek $[\overline{K}]$ a jeho obraz $\boldsymbol{i}[\overline{K}]$ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$, prostou funkci, která ke každému členu $\overline{K}_\gamma$ lokálního řetězce $[\overline{K}]$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$, přiřazuje člen $\overline{L}_\delta$ lokálního řetězce $\boldsymbol{i}[\overline{K}]$, s indexem $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Dále patří k členu $\overline{K}_\gamma$ prosté zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ množiny $\overline{K}_\gamma$ na množinu $\overline{L}_\delta$. Prostá zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\gamma$, $\boldsymbol{c}_\gamma$ patřící k členům $\overline{K}_\gamma \bar{a}$, $\overline{K}_\gamma \bar{b}$ libovolných lokálních řetězců $[\overline{K}\bar{a}]$, $[\overline{K}\bar{b}]$ a k členu $\overline{K}_\gamma \bar{a} \circ \bar{b}$ součinu $[\overline{K}\bar{a}]\,[\overline{K}\bar{b}] = [\overline{K}\bar{a} \circ \bar{b}]$ se chovají homomorfně, tj. pro libovolné prvky $a \in \overline{K}_\gamma \bar{a}$, $b \in \overline{K}_\gamma \bar{b}$ platí vztah:

$$\boldsymbol{c}_\gamma(a \circ b) = (\boldsymbol{a}_\gamma a) \circ (\boldsymbol{b}_\gamma b)\,.$$

Je zřejmé, že řady $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ jsou řetězcově ekvivalentní, takže se pro ně dají uplatnit úvahy z odst. **10.5** o řetězcově ekvivalentních řadách rozkladů množin. Zejména vidíme, že *řady* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ *mají touž redukovanou délku.*

17.5. Polospjaté (volně spjaté) a spjaté řady faktoroidů

Úvahy obdobné těm, jimiž jsme dospěli k pojmu řetězcově izomorfních řad faktoroidů, vedou k polospjatým a spjatým řadám faktoroidů.

Používáme téhož označení jako výše.

Pravíme, že řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ je *polospjatá* neboli *volně spjatá* (*spjatá*) *s řadou* $(\overline{\mathfrak{A}})$, když je grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ izomorfní a polospřažený (izomorfní a spřažený) s grupoidem $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Když je řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ volně spjatá (spjatá) s řadou $(\overline{\mathfrak{A}})$, pak má řada $(\overline{\mathfrak{A}})$ touž vlastnost vzhledem k řadě $(\overline{\mathfrak{B}})$. S ohledem na tuto symetrii mluvíme též o *polospjatých* neboli *volně spjatých* (spjatých) řadách $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Podle hořejší definice je řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ polospjatá (spjatá) s řadou $(\overline{\mathfrak{A}})$, když existuje izomorfismus s volným spřažením (izomorfismus se spřažením) grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ (**16.3.2**). Když zejména koncové členy $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ řad $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ splývají a kobaziální zobrazení grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ představuje izomorfismus s volným spřažením (izomorfismus se spřažením), nazývá se řada $(\overline{\mathfrak{B}})$ *kobaziálně polospjatá* neboli *kobaziálně volně spjatá* (*kobaziálně spjatá*) *s řadou* $(\overline{\mathfrak{A}})$; v tomto případě mluvíme též o *kobaziálně polospjatých* neboli *kobaziálně volně spjatých* (*kobaziálně spjatých*) *řadách* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Tato situace se dá stručně popsat takto:

Existuje izomorfní zobrazení $\boldsymbol{i}$ grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ na grupoid $\tilde{\mathfrak{B}}$ a dále permutace $\boldsymbol{p}$ množiny čísel $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem:

Permutace $\boldsymbol{p}$ určuje pro každý prvek $[\bar{K}] \in \tilde{\mathfrak{A}}$ a jeho obraz $\boldsymbol{i}[\bar{K}] \in \tilde{\mathfrak{B}}$ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$, prostou funkci, která ke každému členu $\bar{K}_\gamma$ lokálního řetězce $[\bar{K}]$ ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$) přiřazuje člen $\bar{L}_\delta$ lokálního řetězce $\boldsymbol{i}[\bar{K}]$, přičemž $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Dále patří k obalu $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma = \bar{L}_\delta \sqsubset \bar{K}_\gamma$ prosté zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$, realizované incidencí prvků, které zobrazuje obal $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma$ na obal $\mathrm{H}\bar{L}_\delta = \bar{K}_\gamma \sqsubset \bar{L}_\delta$. Prostá zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\gamma$, patřící k obalům $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{b}$ příslušným k libovolným lokálním řetězcům $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{b}] \in \tilde{\mathfrak{A}}$ a prosté zobrazení $\boldsymbol{c}_\gamma$, patřící k obalu $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a} \circ \bar{b}$ příslušnému k součinu $[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}] \in \tilde{\mathfrak{A}}$, se chovají homomorfně, tj. pro libovolné prvky $a \in \mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $b \in \mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{b}$ platí vztah: $\boldsymbol{c}_\gamma(a \circ b) = (\boldsymbol{a}_\gamma a) \circ (\boldsymbol{b}_\gamma b)$.

Jsou-li zejména řady $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ *spjaté, jsou řetězcově izomorfní a tedy mají touž redukovanou délku* (**17.4**).

17.6. Modulární a doplňkové řady faktoroidů

Buďte

$$((\overline{\mathfrak{A}}) =)\quad \overline{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \overline{\mathfrak{A}}_\alpha\,,$$
$$((\overline{\mathfrak{B}}) =)\quad \overline{\mathfrak{B}}_1 \geqq \ldots \geqq \overline{\mathfrak{B}}_\beta$$

modulární řady faktoroidů na grupoidu $\mathfrak{G}$ o délkách α, β ($\geqq 1$).

Platí tato věta:

Řady $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ *mají kobaziálně volně spjatá zjemnění* $(\mathring{\mathfrak{A}})$, $(\mathring{\mathfrak{B}})$ *s týmiž počátečními a koncovými členy.*

Označme

$$[\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_1] = \overline{\mathfrak{U}}\,, \quad (\overline{\mathfrak{A}}_\alpha, \overline{\mathfrak{B}}_\beta) = \overline{\mathfrak{V}}\,,$$
$$\overline{\mathfrak{A}}_0 = \overline{\mathfrak{B}}_0 = \overline{\mathfrak{G}}_{\max}\,; \quad \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha+1} = \overline{\mathfrak{B}}_{\beta+1} = \overline{\mathfrak{V}}$$

a dále, pro $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$

$$\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\nu} = [\overline{\mathfrak{A}}_\gamma, (\overline{\mathfrak{A}}_{\gamma-1}, \overline{\mathfrak{B}}_\nu)] = (\overline{\mathfrak{A}}_{\gamma-1}, [\overline{\mathfrak{A}}_\gamma, \overline{\mathfrak{B}}_\nu])\,,$$
$$\mathring{\mathfrak{B}}_{\delta,\mu} = [\overline{\mathfrak{B}}_\delta, (\overline{\mathfrak{B}}_{\delta-1}, \overline{\mathfrak{A}}_\mu)] = (\overline{\mathfrak{B}}_{\delta-1}, [\overline{\mathfrak{B}}_\delta, \overline{\mathfrak{A}}_\mu])\,.$$

Pak jsou zmíněná kobaziálně volně spjatá zejmnění řad $(\overline{\mathfrak{A}}), (\overline{\mathfrak{B}})$ *vyjádřena těmito vzorci:*

$$((\mathring{\mathfrak{A}}) =) \quad \overline{\mathfrak{U}} = \mathring{\mathfrak{A}}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{2,\beta+1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha+1,1} \geqq$$
$$\geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha+1,\beta+1} = \overline{\mathfrak{B}},$$

$$((\mathring{\mathfrak{B}}) =) \quad \overline{\mathfrak{U}} = \mathring{\mathfrak{B}}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{2,\alpha+1} \geqq \ldots \geqq$$
$$\geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{\beta+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{\beta+1,\alpha+1} = \overline{\mathfrak{B}}.$$

Jsou-li řady $(\overline{\mathfrak{A}}), (\overline{\mathfrak{B}})$ *doplňkové, jsou zejmnění* $(\mathring{\mathfrak{A}}), (\mathring{\mathfrak{B}})$ *kobaziálně spjatá.*
Správnost této věty vyplývá z úvah o modulárních a doplňkových řadách rozkladů na množině G (**10.7**; **10.8**).

17.7. Cvičení

1. Když se grupoid $\mathfrak{G}$ vyznačuje tím, že každé dva na něm ležící faktoroidy jsou doplňkové, pak každé dvě řady faktoroidů na $\mathfrak{G}$ mají kobaziálně spjatá zjemnění.