12. Základní pojmy o grupoidech

12.1 Definice

Libovolná neprázdná množina G spolu s nějakým násobením $\mathbf{M}$ v G se nazývá *grupoid*. G se nazývá *pole* a $\mathbf{M}$ *násobení grupoidu*. Grupoidy budeme označovat velkými německými písmeny, a to zpravidla stejnými jako jejich pole. Např. označujeme grupoid, jehož pole jsme označili G, písmenem $\mathfrak{G}$, a když jsme nějaký grupoid označili $\mathfrak{G}$, pak písmeno G značí zpravidla jeho pole.

12.2. Další pojmy
Grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$

Na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole. Tak např. mluvíme *o prvcích grupoidu* místo o prvcích pole grupoidu a píšeme $a \in \mathfrak{G}$ místo $a \in G$, podobně mluvíme o *podmnožinách v grupoidu* a píšeme např. $A \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset A$, mluvíme o *rozkladech v grupoidu* a *na grupoidu*, o *řádu grupoidu*, o *zobrazení grupoidu do nějaké množiny*, *do nějakého grupoidu* nebo *na grupoid*, atd. Neprázdná množina v grupoidu nazývá se též *komplex*. Když je G abstraktní množina, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ *abstraktní*.

Rovněž pojmy a symboly, které jsme definovali pro násobení, přenášíme na grupoidy. Tedy zejména má každá dvoučlenná posloupnost prvků $a, b \in \mathfrak{G}$ jistý součin $a \,.\, b$, stručněji ab, a když pro každé $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $ab = ba$, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ *komutativní* neboli *abelovský*. Také můžeme ke každému konečnému grupoidu $\mathfrak{G}$ přiřadit multiplikační tabulku, v níž je popsáno násobení v $\mathfrak{G}$. V odstavci **11.3** jsme uvedli několik příkladů násobení a každý z nich je současně příkladem grupoidu.

V dalším výkladu častěji poukážeme zejména na tyto tři grupoidy, které budeme označovat $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$: Grupoid $\mathfrak{Z}$ se skládá z množiny Z všech celých čísel a násobení je definováno sečítáním čísel (**11.3**a). Grupoid $\mathfrak{Z}_n$ se skládá z množiny $Z_n = \{0, \ldots, n - 1\}$, přičemž n značí libovolné přirozené číslo a násobení je definováno sečítáním vzhledem k modulu n (**11.3**b). Grupoid $\mathfrak{S}_n$ se skládá z množiny S_n všech permutací nějaké konečné množiny H řádu n $(\geqq 1)$ a násobení je definováno skládáním permutací (**11.3**c). Poznamenejme, že každý grupoid, jehož prvky jsou permutace nějaké (konečné anebo nekonečné) množiny a násobení je definováno skládáním permutací, se nazývá *permutační*; např. grupoid $\mathfrak{S}_n$ je permutační.

12.3. Vzájemně zaměnitelné podmnožiny

Nechť $\mathfrak{G}$ značí (všude v dalším výkladu) nějaký grupoid.

Nechť A, B značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$. Podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze součinů ab každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$, se nazývá *součin podmnožiny A s podmnožinou B* a označuje se symbolem $A \,.\, B$, kratčeji AB. Když je některá z podmnožin A, B prázdná, rozumíme symboly $A \,.\, B$, AB prázdnou množinu. Pro $a \in \mathfrak{G}$ píšeme zpravidla místo $\{a\}A$ stručněji aA a podobně Aa místo $A\{a\}$, takže např. aA značí množinu součinů prvku a s každým prvkem v A nebo, v případě $A = \emptyset$, prázdnou množinu. Místo AA píšeme někdy stručněji A^2.

Platí-li rovnost $AB = BA$, nazývají se podmnožiny A, B *vzájemně zaměnitelné* neboli *vzájemně komutativní*; tento případ se vyznačuje tím, že součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$ je součinem některého prvku $b' \in B$ s některým prvkem $a' \in A$ a současně součin každého prvku $b \in B$ s každým prvkem $a \in A$ je součinem některého prvku $a' \in A$ s některým prvkem $b' \in B$. Když je grupoid $\mathfrak{G}$ abelovský, pak ovšem každé dvě podmnožiny v $\mathfrak{G}$ jsou zaměnitelné. V opačném případě platí pro některé prvky $a, b \in \mathfrak{G}$ vztah $ab \neq ba$ a odtud plyne, že každé dvě podmnožiny $A, B \subset \mathfrak{G}$ nemusí být zaměnitelné, jak je tomu např. v případě, že $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Součin AB podmnožiny $A = \{1\}$ s podmnožinou $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ v grupoidu $\mathfrak{Z}$ je $\{\ldots, -1, 1, 3, \ldots\}$ a zřejmě se rovná součinu BA; když $A = \{0, 1\}$, $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$, máme $AB = BA = Z$. Všimněme si, že pro každý grupoid $\mathfrak{G}$ platí vztah $GG \subset \mathfrak{G}$.

12.4. Podgrupoid, nadgrupoid, ideál

Nechť A značí nějaký komplex v $\mathfrak{G}$. Když $AA \subset A$, tj. když součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in A$ je opět prvek v A, pak pravíme, že A je *grupoidní podmnožina* v $\mathfrak{G}$. V tomto případě určuje násobení $\boldsymbol{M}$ v $\mathfrak{G}$ jisté tzv. *částečné násobení $\boldsymbol{M}_A$* v A, které je definováno takto: $\boldsymbol{M}_A$ přiřazuje ke každé dvoučlenné posloupnosti prvků $a, b \in A$ týž prvek $ab \in A$ jako násobení $\boldsymbol{M}$. Množina A spolu s částečným násobením $\boldsymbol{M}_A$ je jistý grupoid $\mathfrak{A}$; pravíme, že $\mathfrak{A}$ je *podgrupoid* v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ je *nadgrupoid na* $\mathfrak{A}$, a píšeme: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Když pak A je vlastní podmnožina v $\mathfrak{G}$, pravíme, že $\mathfrak{A}$ je *vlastní podgrupoid* v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ je *vlastní nadgrupoid na* $\mathfrak{A}$. Grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje vždycky *největší podgrupoid*, který je s ním identický.

Když dokonce platí vztah $GA \subset A$ (anebo $AG \subset A$, nebo současně $GA \subset \subset A \supset AG$), nazývá se $\mathfrak{A}$ *levý* (nebo *pravý*, nebo *oboustranný*) *ideál v* $\mathfrak{G}$. Případ $A \neq G$ charakterizujeme opět přívlastkem *vlastní*.

Např. komplex všech celých násobků některého přirozeného čísla m v grupoidu $\mathfrak{Z}$ je grupoidní, neboť součin (tj. součet v obvyklém smyslu) každých dvou celých násobků čísla m je opět celý násobek čísla m; tento komplex spolu se sečítáním v obvyklém smyslu je tedy podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, a to v případě $m > 1$ zřejmě vlastní podgrupoid v $\mathfrak{Z}$. Jiný příklad je tento: Podmnožina všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$, je grupoidní, neboť když některé dvě permutace $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ nechávají prvek a beze změny, pak zřejmě platí totéž o jejich součinu $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ (tj. o složené permutaci $\boldsymbol{qp}$); tato podmnožina spolu se skládáním permutací v obvyklém smyslu je tedy podgrupoid v $\mathfrak{S}_n$.

Snadno vidíme, že pro libovolné grupoidy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ platí zřejmě tyto výroky:

Když $\mathfrak{B}$ *je podgrupoid v* $\mathfrak{A}$ *a* $\mathfrak{A}$ *podgrupoid v* $\mathfrak{G}$, *pak* $\mathfrak{B}$ *je podgrupoid v* $\mathfrak{G}$.

Když $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *jsou podgrupoidy v* $\mathfrak{G}$ *a pro jejich pole* A, B *platí vztah* $B \subset A$, *pak* $\mathfrak{B}$ *je podgrupoid v* $\mathfrak{A}$.

12.5. Další pojmy

V souhlase s tím, že na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole, mluvíme někdy např. o průniku nějaké podmnožiny $B \subset \mathfrak{G}$ a podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ve smyslu průniku podmnožiny B a pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$; v podobném smyslu mluvíme o součinu podmnožiny B s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, o součinu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ s podmnožinou B, dále o obalu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v nějakém rozkladu $\bar{A}$, o průseku rozkladu $\bar{A}$ s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, atp., a užíváme označení např. $B \cap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \cap B$, $B\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{A} \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset \mathfrak{A}$, $\bar{A} \sqcap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \sqcap \bar{A}$, atp.

12.6. Průnik podgrupoidů

Uvažujme nyní o nějakých dvou podgrupoidech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $A \cap B$ jejich polí A, B není prázdný, $A \cap B \neq \emptyset$. Pro libovolné prvky $a, b \in A \cap B$ platí jednak vztahy $ab \in AA \subset A$ a jednak $ab \in BB \subset B$, takže $ab \in A \cap B$, a odtud vychází, že $A \cap B$ je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik* podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Vidíme, že každé dva podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, jejichž pole jsou incidentní, mají průnik, který je podgrupoidem v $\mathfrak{G}$. Tento průnik je ovšem podgrupoidem v každém z obou podgrupoidů. Pamatujme si, že pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ je definován jenom v tom případě, že pole obou podgrupoidů mají společné prvky. Např. existuje průnik podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}_n$, přičemž se pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$ skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$, a pole B podgrupoidu $\mathfrak{B}$ se skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $b \in H$, neboť obě množiny A, B mají společný alespoň jeden prvek, a to identickou permutaci množiny H, která nechává beze změny všechny prvky množiny H.

Pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ se dá snadno rozšířit na pojem průniku systému podgrupoidů v $\mathfrak{G}$: Máme-li nějaký systém $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$ podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ a průnik $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$ jejich polí není prázdný, pak tento průnik, jak se snadno zjistí, je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$; příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik systému podgrupoidů* $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\bigcap \mathfrak{a}$, nebo podobně.

12.7. Součin konečné posloupnosti prvků

1. *Definice.* Vezměme v úvahu libovolnou n-člennou posloupnost prvků $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, přičemž $n \geqq 2$. Co rozumíme součinem této posloupnosti? Součin dvoučlenné posloupnosti a_1, a_2 $(n = 2)$ máme již definován; označujeme jej, jak víme, $a_1 . a_2$, kratčeji a_1a_2. V případě $n = 3$ definujeme součin trojčlenné posloupnosti a_1, a_2, a_3 takto: Je to množina skládající se z tzv. součinových prvků: $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$. Zmíněný součin označujeme $\{a_1 . a_2 . a_3\}$, kratčeji $\{a_1a_2a_3\}$; symbol $a_1 . a_2 . a_3$ nebo $a_1a_2a_3$ pak znamená kterýkoli součinový prvek, takže má význam jednak součinu prvku a_1 s prvkem a_2a_3 a jednak součinu prvku a_1a_2 s prvkem a_3. V případě $n = 4$ definujeme obdobně: Součin čtyřčlenné posloupnosti a_1, a_2, a_3, a_4 je množina skládající se ze součinových prvků $a_1(a_2a_3a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1a_2a_3)a_4$. Tento součin označujeme $\{a_1 . a_2 . a_3 . a_4\}$, kratčeji $\{a_1a_2a_3a_4\}$; symbol $a_1 . a_2 . . a_3 . a_4$ nebo $a_1a_2a_3a_4$ značí kterýkoli součinový prvek, takže má význam kteréhokoli z prvků: $a_1(a_2(a_3a_4))$, $a_1((a_2a_3)a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1(a_2a_3))a_4$, $((a_1a_2)a_3)a_4$. Tyto zvláštní případy zajisté postačí, abychom pochopili tuto definici:

Součinem n-členné posloupnosti prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rozumíme množinu $\{a_1a_2 \ldots a_n\}$ definovanou takto: Pro $n = 2$ se množina $\{a_1a_2\}$ skládá z jediného prvku a_1a_2; pro $n > 2$ je definována vzorcem

$$\{a_1a_2 \ldots a_n\} = \{a_1\}\{a_2 \ldots a_n\} \cup \{a_1a_2\}\{a_3 \ldots a_n\} \cup \ldots \cup \{a_1 \ldots a_{n-1}\}\{a_n\}\,.$$

Někdy používáme též označení $\{a_1 . a_2 \ldots a_n\}$. Jednotlivé prvky této množiny, tzv. *součinové prvky*, se označují symbolem $a_1 . a_2 \ldots a_n$, stručněji $a_1a_2 \ldots a_n$. Je zřejmé, že existuje jenom konečný počet součinových prvků. V případě $n = 2$ zpravidla nerozlišujeme mezi součinem a příslušným součinovým prvkem.

2. *Grupoidy asociativní.* Podle předešlého odstavce má každá trojčlenná posloupnost prvků $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ nejvýše dva různé součinové prvky: $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$. Jestliže vždycky splývají, tj. jestliže pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$, pak se násobení grupoidu $\mathfrak{G}$ a rovněž grupoid $\mathfrak{G}$ nazývají *asociativní.*

Grupoidy, které se v matematice nejčastěji studovaly, mají vlastnost, že každá konečná posloupnost jejich prvků má jenom jeden součinový prvek; jak později (**18.1**) ukážeme, mají tuto důležitou vlastnost právě grupoidy asociativní.

Např. grupoid $\mathfrak{Z}$ je asociativní, neboť podle definice jeho násobení jsou součinové prvky $a(bc)$, $(ab)c$ každé trojčlenné posloupnosti prvků $a, b, c \in \mathfrak{Z}$ součty v obvyklém smyslu $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ a jsou si tedy rovné.

Podobně i grupoid $\mathfrak{Z}_n$ $(n \geqq 1)$ je asociativní. Vskutku, podle definice jeho násobení jsou součinové prvky $a(bc)$, $(ab)c$ každé trojčlenné posloupnosti prvků $a, b, c \in \in \mathfrak{Z}_n$ zbytky dělení čísel $a + r$, $s + c$ číslem n, přičemž r (s) značí zbytek dělení čísla $b + c$ $(a + b)$ číslem n. Protože se čísla $a + r$, $a + (b + c)$ liší jenom o celý násobek čísla n, je $a(bc)$ zbytek dělení čísla $a + (b + c)$ číslem n a podobně vidíme, že $(ab)c$ je zbytek dělení čísla $(a + b) + c$ číslem n. Z rovnosti $a + (b + c) = (a + b) + c$ pak vychází $a(bc) = (ab)c$.

Rovněž grupoid $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ je asociativní, neboť jsou-li $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ libovolné prvky v $\mathfrak{S}_n$, jsou podle definice násobení v $\mathfrak{S}_n$ součinové prvky $\boldsymbol{p} . (\boldsymbol{q} . \boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{p} . \boldsymbol{q}) . \boldsymbol{r}$ složené permutace $(\boldsymbol{rq})\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{qp})$ a podle výsledku v **8.7.**3 jsou si rovné.

3. *Příklad.* Jako příklad výpočtu součinu vypočtěme součin $\{1 . 2 . 3 . 4\}$ v grupoidu popsaném v **11.5.**4. Podle příslušné multiplikační tabulky máme

$$\{1 . 2 . 3\} = \{1\} . \{2 . 3\} \cup \{1 . 2\} . \{3\} = \{1\} . \{1\} \cup \{3\} . \{3\} = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\};$$

$$\{2 . 3 . 4\} = \{2\} . \{3 . 4\} \cup \{2 . 3\} . \{4\} = \{2\} . \{2\} \cup \{1\} . \{4\} = \{2\} \cup \{2\} = \{2\};$$

$$\{1 . 2 . 3 . 4\} = \{1\} . \{2 . 3 . 4\} \cup \{1 . 2\} . \{3 . 4\} \cup \{1 . 2 . 3\} . \{4\} = \{1\} . \{2\} \cup \{3\} . \{2\} \cup \{1, 2\} . \{4\} = \{3\} \cup \{5\} \cup \{2, 4\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Všechny součinové prvky $1 . 2 . 3 . 4$ jsou tedy tyto: 2, 3, 4, 5.

12.8. Součin konečné posloupnosti podmnožin

1. *Definice.* Nechť nyní $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ značí libovolné podmnožiny v $\mathfrak{G}$.

Součinem n-členné posloupnosti podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rozumíme součet všech součinů $\{a_1 a_2 \ldots a_n\}$, přičemž prvky $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_n \in A_n$ probíhají všechny prvky příslušných podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tento součin označujeme symbolem $A_1 . A_2 \ldots A_n$, kratčeji $A_1 A_2 \ldots A_n$. Když je některá podmnožina $A_1, \ldots, A_n$ prázdná, rozumíme zmíněným součinem prázdnou množinu. Podle této definice a podle obsahu symbolu $\{a_1 \ldots a_n\}$ vznikne každý prvek $a \in A_1 A_2 \ldots A_n$ násobením některého součinového prvku $a_1 \ldots a_k$ s některým prvkem $a_{k+1} \ldots a_n$, přičemž $1 \leqq k \leqq n - 1$; odtud plyne $a \in (A_1 \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots A_n)$. Naopak, součin libovolného prvku množiny $A_1 \ldots A_k$ s libovolným prvkem množiny $A_{k+1} \ldots A_n$ je jistým prvkem $a \in A_1 \ldots A_n$. Odtud vychází rovnost

$$A_1 \ldots A_n = A_1(A_2 \ldots A_n) \cup (A_1 A_2)(A_3 \ldots A_n) \cup \ldots \cup (A_1 \ldots A_{n-1}) A_n$$

Když A značí nějakou podmnožinu v $\mathfrak{G}$, pak místo $\underbrace{A \ldots A}_{n}$ píšeme kratčeji A^n, takže pro $n \geqq 2$ máme

$$A^n = AA^{n-1} \cup A^2A^{n-2} \cup \ldots \cup A^{n-1}A .$$

Hořejší definice součinu konečné posloupnosti prvků nebo množin zřejmě zobecňují definice součinu dvoučlenné posloupnosti prvků nebo množin.

2. *Příklad.* Nechť A značí podmnožinu $\{1, 2, 4\}$ v grupoidu popsaném v **11.5.4**. Pak je:

$$A^2 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1 . 1, 1 . 2, 1 . 4, 2 . 1, 2 . 2, 2 . 4, 4 . 1, 4 . 2, 4 . 4\} = \\ = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$A^3 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A^4 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} . \{1, 2, 4\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

12.9. Cvičení

1. Když je podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ součtem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ je součtem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB je součet součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$

2. Když je podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ průnikem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ je průnikem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB je částí průniku součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$ Zejména tedy platí pro každé podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ tyto vztahy: a) $(A \cap B)\, C \subset AC \cap BC$; b) $C(A \cap B) \subset CA \cap CB$. Pomocí vhodných příkladů ukažte, že se v těchto vztazích znaménko $\subset$ nedá vždycky nahradit znaménkem $=$.

3. Ukažte, že počet N_n součinových prvků n-členné posloupnosti prvků v $\mathfrak{G}$ ($n \geqq 2$), je obecně vyjádřen vzorcem $N_n = (2n - 2)!/(n - 1)!\, n!$

4. Nechť A značí libovolnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$ a m, n libovolná přirozená čísla. Platí tyto vztahy: a) $A^mA^n \subset A^{m+n}$; b) $(A^m)^n \subset A^{mn}$.

5. Nechť $A \subset B$ značí libovolné podmnožiny v $\mathfrak{G}$ a n libovolné přirozené číslo. Platí vztah $A^n \subset B^n$.

6. Nechť n značí libovolné přirozené číslo. Pro pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ platí vztah $G^n \supset G^{n+1}$, takže $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$

7. Nechť n, G mají týž význam jako ve cvič. 6. G^n je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ a příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ je oboustranný ideál v $\mathfrak{G}$. — Poznámka. Tento oboustranný ideál se označuje $\mathfrak{G}^n$.

8. Když je $\mathfrak{G}$ asociativní grupoid, pak: a) každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$ je asociativní; b) pro všechny podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ platí rovnost $A(BC) = (AB)C$.

9. Když je $\mathfrak{G}$ asociativní grupoid a A, B jsou grupoidní a zaměnitelné podmnožiny v $\mathfrak{G}$, pak také podmnožina AB je grupoidní. — Poznámka. Když jsou $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zaměnitelné podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, nazývá se podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k součinu jejich polí, *součin podgrupoidů* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Označuje se $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

10. Když je $\mathfrak{G}$ asociativní grupoid, pak množina všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou zaměnitelné s každým prvkem v $\mathfrak{G}$, je grupoidní, není-li prázdná. — Poznámka. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *centrum grupoidu* $\mathfrak{G}$.

11. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a násobení je definováno takto: Součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je nejmenší společný násobek, popř. největší společný dělitel, čísel a a b. Ukažte, že v obou případech grupoid $\mathfrak{G}$ je abelovský a asociativní.