10. Řady rozkladů množin

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 74--88.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401437

10. Řady rozkladů množin

V této kapitole vyvineme teorii tzv. řad rozkladů množin. V ní se uplatní mnoho poznatků, k nimž jsme došli v předcházejících úvahách a které se týkají rozkladů a zobrazení množin. Tato teorie popisuje množinovou strukturu příslušných úseků teorie grupoidů a grup a umožňuje hlubší pohled na výsledky teorie grup dosažené klasickými metodami. Mimoto mají úvahy o řadách rozkladů množin významná použití v souvislosti se zobrazeními na množiny posloupností a v oboru vědeckých klasifikací.

10.1. Základní pojmy

Nechť $\bar{A} \geqq \bar{B}$ jsou libovolné rozklady na množině G.

Řadou rozkladů množiny G od rozkladu $\bar{A}$ do rozkladu $\bar{B}$, stručněji *řadou rozkladů od $\bar{A}$ do $\bar{B}$*, rozumíme konečnou posloupnost rozkladů $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ na množině G, délky α ($\geqq 1$), s těmito vlastnostmi: 1. První člen posloupnosti je rozklad $\bar{A}$, poslední člen je rozklad $\bar{B}$, tedy $\bar{A}_1 = \bar{A}$, $\bar{A}_\alpha = \bar{B}$. 2. Každý následující rozklad je zjemněním rozkladu bezprostředně předcházejícího, tedy

$$(\bar{A} =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha \quad (= \bar{B}).$$

Takovou řadu označujeme stručně $(\bar{A})$. Rozklady $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ se nazývají *členy řady* $(\bar{A})$; $\bar{A}_1$ je *počáteční* a $\bar{A}_\alpha$ *koncový člen* řady $(\bar{A})$. *Délkou* řady $(\bar{A})$ rozumíme počet α členů řady $(\bar{A})$.

Např. libovolný rozklad $\bar{A}$ na množině G tvoří řadu délky 1; její počáteční a koncový člen splývají s rozkladem $\bar{A}$.

Budiž $((\bar{A}) =) \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ libovolná řada rozkladů od $\bar{A}$ do $\bar{B}$.

Libovolný člen řady $(\bar{A})$ se nazývá *podstatný*, když je buď počátečním členem $\bar{A}_1$ nebo vlastním zjemněním členu bezprostředně předcházejícího. V opačném případě se nazývá *nepodstatný*. Když se v řadě $(\bar{A})$ vyskytuje alespoň jeden nepodstatný člen $\bar{A}_{\gamma+1}$, nazývá se řada $(\bar{A})$ (vzhledem k $\bar{A}_{\gamma+1} = \bar{A}_\gamma$) *řadou s opakováním*. Když jsou všechny členy řady $(\bar{A})$ podstatné, pravíme, že řada $(\bar{A})$ je *řadou bez opakování*. Počet α' podstatných členů řady $(\bar{A})$ je *redukovanou délkou* řady $(\bar{A})$. Zřejmě je $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, přičemž rovnost $\alpha' = \alpha$ charakterizuje řady bez opakování. Když se v řadě $(\bar{A})$ opakování vyskytují, můžeme ji odstraněním všech nepodstatných členů *redukovat*, tj. zkrátit na řadu $(\bar{A}')$ bez opakování. Délka redukované řady $(\bar{A}')$ se rovná redukované délce α' řady $(\bar{A})$. Naopak můžeme řadu $(\bar{A})$ *prodloužit* tím, že mezi kterékoli dva sousední členy $\bar{A}_\gamma$, $\bar{A}_{\gamma+1}$, popř. před počáteční (za koncový) člen $\bar{A}_1$ ($\bar{A}_\alpha$) řady ($\bar{A}$) vsuneme libovolný konečný počet nepodstatných členů. Je zřejmé, že každá řada rozkladů vzniklá zkrácením nebo prodloužením řady ($\bar{A}$) má touž redukovanou délku jako ($\bar{A}$).

Jsou-li $\alpha_1 < \ldots < \alpha_\beta$ libovolná čísla množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$, je

$$\bar{A}_{\alpha_1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta}$$

rovněž řada rozkladů na G, tzv. *částečná řada* neboli *část řady* ($\bar{A}$).

Je-li dále A neprázdná podmnožina v G, představuje posloupnost

$$\bar{A}_{\alpha_1} \sqcap A \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta} \sqcap A$$

řadu rozkladů na množině A.

10.2. Lokální řetězce

Budiž $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ řada rozkladů na G o libovolné délce $\alpha \geqq 1$.

Budiž $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ libovolný prvek a $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ onen prvek rozkladu $\bar{A}_\gamma$, jehož částí je prvek $\bar{a}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Zřejmě platí vztahy:

$$\bar{a}_1 \supset \ldots \supset \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_\alpha = \bar{a})\,.$$

Dále je

$$\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1} \quad (\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha)$$

rozklad na množině $\bar{a}_\gamma$. Tento rozklad je částí rozkladu $\bar{A}_{\gamma+1}$ a současně platí $\bar{a}_{\gamma+1} \in \in \bar{K}_\gamma$ $(\bar{a}_{\alpha+1} = \bar{a}_\alpha)$. Vidíme, že

$$([\bar{K}] =)\ \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$$

je řetězec rozkladů množin od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_{\alpha+1}$ $(= \bar{a})$ (**2.5**). Tento řetězec se nazývá *lokální řetězec řady* ($\bar{A}$) *příslušný k prvku* $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$, stručněji *lokální řetězec s bází* $\bar{a}$. Značíme jej jako vpředu nebo podrobněji: $([\bar{K}\bar{a}] =)\ \bar{K}_1\bar{a} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}$. Prvek $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ se nazývá *báze řetězce* $[\bar{K}]$. Zřejmě je řetězec $[\bar{K}]$ svou bází $\bar{a}$ jednoznačně určen.

Poznamenejme, že koncový člen $\bar{K}_\alpha$ řetězce $[\bar{K}]$ je největším rozkladem báze $\bar{a}$, a tedy je nepodstatný. Dále si všimněme, že rozklad $\bar{K}_\gamma$ může být vzhledem ke vztahu $\bar{A}_\gamma \geqq \bar{A}_{\gamma+1}$ definován též vzorcem $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{A}_{\gamma+1}$.

Lokální řetězec $[\bar{K}]$ *je elementární řetězec od množiny* $\bar{a}_1$ *do* $\bar{a}_{\alpha+1}$ $(= \bar{a})$ *nad rozkladem* $\bar{A}_{\alpha+1}$.

Vskutku, obsah tohoto tvrzení záleží v tom, že rozklad $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ je zákrytem rozkladu $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\alpha+1}$. Tato situace je důsledkem okolnosti, že rozklad $\bar{A}_{\gamma+1}$ je zákrytem rozkladu $\bar{A}_{\alpha+1}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Délka lokálního řetězce $[\bar{K}]$ je zřejmě α a tedy je táž jako délka řady ($\bar{A}$). Když je některý člen $\bar{A}_{\gamma+1}$ řady ($\bar{A}$) nepodstatný, takže $\bar{A}_{\gamma+1} = \bar{A}_\gamma$, platí rovnost $\bar{a}_{\gamma+1} = \bar{a}_\gamma$;

z ní vidíme, že $\bar{K}_\gamma$ je nepodstatný člen lokálního řetězce $[\bar{K}]$. Odtud soudíme, že mezi redukovanými délkami α' a κ' řady $(\bar{A})$ a lokálního řetězce $[\bar{K}]$ je vztah: $\kappa' \leqq \alpha'$. Když tedy některý lokální řetězec řady $(\bar{A})$ nemá opakování, až na koncový člen, který je vždycky nepodstatný, pak řada $(\bar{A})$ je bez opakování.

10.3. Zjemnění řad rozkladů

Budiž $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ řada rozkladů libovolné délky $\alpha \geqq 1$ na množině G.

Zjemněním řady $(\bar{A})$ rozumíme řadu rozkladů na množině G, přičemž řada $(\bar{A})$ je částí té řady rozkladů. Každé zjemnění řady $(\bar{A})$ je tedy tvaru:

$$\bar{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{1,\beta_1-1} \geqq \bar{A}_{1,\beta_1} \geqq \bar{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{2,\beta_2-1} \geqq \bar{A}_{2,\beta_2} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \geqq \bar{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}\,.$$

V těchto vzorcích značí $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, kdežto $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ jsou přirozená čísla. Když $\beta_\delta = 1$, nečtou se členy $\bar{A}_{\delta,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\delta,\beta_\delta-1}$. Z této definice vidíme, že se každé zjemnění řady $(\bar{A})$ obdrží tím, že vždy mezi některé dva sousední členy $\bar{A}_\gamma$, $\bar{A}_{\gamma+1}$ a popř. též před počáteční člen $\bar{A}_1$ a za koncový člen $\bar{A}_\alpha$ vsuneme vhodnou řadu rozkladů. Zejména je tedy každé prodloužení řady $(\bar{A})$ jejím zjemněním.

Vezměme v úvahu nějaké zjemnění $(\mathring{A})$ řady $(\bar{A})$ a použijme téhož označení jako vpředu. Zejména je $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$. Indexy μ, ν, které se v dalším průběhu vyskytnou, značí v případě $\beta_{\alpha+1} = 1$ čísla $\mu = 1, \ldots, \alpha$; $\nu = 1, \ldots, \beta_\mu$ a v případě $\beta_{\alpha+1} > 1$ též čísla $\mu = \alpha + 1$, $\nu = 1, \ldots, \beta_{\alpha+1} - 1$.

Nechť $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ nebo $\bar{a} \in \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$ je libovolný prvek rozkladu $\bar{A}_\alpha$ nebo rozkladu $\bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$ podle toho, zda je $\beta_{\alpha+1} = 1$ nebo $\beta_{\alpha+1} > 1$. Dále buďte $\bar{a}_{\mu,\nu}$, $\bar{a}_\gamma$ prvky rozkladů $\bar{A}_{\mu,\nu}$, $\bar{A}_\gamma$ určené vztahy $\bar{a} \subset \bar{a}_{\mu,\nu} \in \bar{A}_{\mu,\nu}$, $\bar{a} \subset \bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$; zejména tedy máme $\bar{a}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{a}_\gamma$.

Lokální řetězec $[\mathring{K}]$ řady $(\mathring{A})$ příslušný k bázi $\bar{a}$ je

$$([\mathring{K}] =)\ \bar{K}_{1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{1,\beta_1} \to \bar{K}_{2,1} \to \ldots \to \bar{K}_{2,\beta_2} \to \ldots$$
$$\ldots \to \bar{K}_{\alpha,\beta_\alpha} \to \bar{K}_{\alpha+1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}\,;$$

přitom ovšem značí $\bar{K}_{\mu,\nu} = \bar{a}_{\mu,\nu} \sqcap \bar{A}_{\mu,\nu+1}$, $\bar{A}_{\mu,\beta_\mu+1} = \bar{A}_{\mu+1,1}$, dále $\bar{A}_{\alpha+1,1} = \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha}$ v případě $\beta_{\alpha+1} = 1$ a $\bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}} = \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$ v případě $\beta_{\alpha+1} > 1$.

Vidíme, že lokální řetězec $[\mathring{K}]$ obdržíme tím, že každý člen $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ lokálního řetězce $[\bar{K}]$ řady $(\bar{A})$, příslušného k bázi $\bar{a}_\alpha \in \bar{A}_\alpha$, nahradíme řetězcem od množiny $\bar{a}_\gamma$ do $\bar{a}_{\gamma+1}$:

$$\bar{K}_{\gamma,\beta_\gamma} \to \bar{K}_{\gamma+1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{\gamma+1,\beta_{\gamma+1}-1}$$

(v případě $\beta_{\gamma+1} = 1$ čteme jenom počáteční člen $\bar{K}_{\gamma,\beta_\gamma}$) a mimoto v případě $\beta_1 > 1$, přidáme na začátku řetězce $[\bar{K}]$ řetězec od množiny $\bar{a}_{1,1}$ do $\bar{a}_1$: $\bar{K}_{1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{1,\beta_1 - 1}$. Snadno seznáme, že řetězce, o nichž je řeč, jsou elementární řetězce od $\bar{a}_\gamma$ do $\bar{a}_{\gamma+1}$ nad rozkladem $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$, popř. od $\bar{a}_{1,1}$ do $\bar{a}_1$ nad rozkladem $\bar{a}_{1,1} \sqcap \bar{A}_1$. Z toho soudíme, *že lokální řetězec každého zjemnění řady* $(\bar{A})$ *příslušný k bázi* $\bar{a} \sqsubset \bar{a}_\alpha$ *je zjemněním lokálního řetězce řady* $(\bar{A})$ *příslušného k bázi* $\bar{a}_\alpha$.

10.4. Variety lokálních řetězců

Vezměme v úvahu řadu rozkladů na množině G:

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1)\,.$$

Ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ patří lokální řetězec řady $(\bar{A})$ s bází $\bar{a}$:

$$([\bar{K}\bar{a}] =) \quad \bar{K}_1\bar{a} \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}\,.$$

Množina skládající se z lokálních řetězců, jejichž báze jsou jednotlivé prvky rozkladu $\bar{A}_\alpha$, nazývá se *varieta lokálních řetězců příslušná k řadě* $(\bar{A})$; označení: $\tilde{\mathrm{A}}$. Je to zřejmě α-stupňový množinový útvar, vzhledem k posloupnosti rozkladů $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{\alpha+1}$ $(\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha)$, ve smyslu definice uvedené v odst. **1.9**.

Když ke každému bodu $a \in G$ přiřadíme lokální řetězec $[\bar{K}\bar{a}] \in \tilde{\mathrm{A}}$ s bází $\bar{a} = \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ obsahující bod a $(a \in \bar{a})$, obdržíme zobrazení, tzv. *přirozené zobrazení* množiny G na varietu lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$. Je zřejmé, že rozklad množiny G patřící k tomuto zobrazení splývá s rozkladem $\bar{A}_\alpha$. *Lokálním řetězcem řady* $(\bar{A})$ *patřícím k bodu* a rozumíme lokální řetězec $[\bar{K}\bar{a}]$.

Buďte nyní

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha\,,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta \quad (\alpha, \beta \geqq 1)$$

libovolné řady rozkladů na množině G, které se vyznačují tím, že jejich koncové členy $\bar{A}_\alpha$, $\bar{A}_\beta$ splývají, tedy $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\beta$.

Vezměme v úvahu variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$ příslušné k řadám $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Když ke každému prvku $[\bar{K}\bar{a}] \in \tilde{\mathrm{A}}$ přiřadíme lokální řetězec $[\bar{L}\bar{a}] \in \tilde{\mathrm{B}}$ s touž bází $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha = \bar{B}_\beta$, obdržíme prosté zobrazení variety $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$. Toto zobrazení nazýváme *kobaziální*.

Vidíme, že variety lokálních řetězců příslušné ke dvěma řadám rozkladů se splývajícími koncovými členy jsou ekvivalentní množiny a že kobaziální zobrazení realizuje prosté zobrazení jedné z nich na druhou.

10.5. Řetězcově ekvivalentní řady rozkladů

Buďte

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha ,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\alpha$$

libovolné řady rozkladů na množině G, téže délky α ($\geqq 1$).

Nechť $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$ opět značí variety lokálních řetězců příslušné k řadám $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Pravíme, že *řada* $(\bar{B})$ *je řetězcově ekvivalentní s řadou* $(\bar{A})$, když je varieta lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{B}}$ silně ekvivalentní s varietou $\tilde{\mathrm{A}}$.

Když je řada $(\bar{B})$ řetězcově ekvivalentní s řadou $(\bar{A})$, pak má řada $(\bar{A})$ vzhledem k řadě $(\bar{B})$ touž vlastnost (**6.9.1**). S ohledem na tuto symetrii mluvíme o *řetězcově ekvivalentních řadách* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Podle hořejší definice je řada $(\bar{B})$ řetězcově ekvivalentní s řadou $(\bar{A})$, když existuje silná ekvivalence variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$ (**6.9.1**). Když zejména koncové členy $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ splývají a současně kobaziální zobrazení variety $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$ je silnou ekvivalencí, pravíme, že *řada* $(\bar{B})$ *je kobaziálně řetězcově ekvivalentní s řadou* $(\bar{A})$ a mluvíme o *kobaziálně řetězcově ekvivalentních řadách* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Předpokládejme nyní, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou řetězcově ekvivalentní.

Budiž $\boldsymbol{f}$ silná ekvivalence variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$. Podle **6.9.1** je tedy $\boldsymbol{f}$ prosté zobrazení variety $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$, přičemž každé dva k sobě přiřazené prvky těchto variet jsou v jistých vzájemných vztazích. Podrobněji můžeme danou situaci popsat takto:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem:

Buďte $[\bar{K}] \in \tilde{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{f}[\bar{K}] = [\bar{L}] \in \tilde{\mathrm{B}}$ dva libovolné lokální řetězce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$:

$$([\bar{K}] =) \quad \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha ,$$
$$([\bar{L}] =) \quad \bar{L}_1 \to \ldots \to \bar{L}_\alpha ,$$

přičemž řetězec $[\bar{L}]$ je obrazem řetězce $[\bar{K}]$ v zobrazení $\boldsymbol{f}$. Víme, že každý člen $\bar{K}_\gamma$ $(\bar{L}_\gamma)$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ představuje rozklad v množině G, který je částí rozkladu $\bar{A}_{\gamma+1}$ $(\bar{B}_{\gamma+1})$; přitom značí $\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_{\alpha+1} = \bar{B}_\alpha$. Nuže, zmíněný účinek permutace $\boldsymbol{p}$ záleží v tom, že ke každému členu $\bar{K}_\gamma$ v lokálním řetězci $[\bar{K}]$ existuje prostá funkce $\boldsymbol{a}_\gamma$, která zobrazuje člen $\bar{K}_\gamma$ na člen $\bar{L}_\delta$ lokálního řetězce $[\bar{L}]$; přitom je $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$.

Vidíme, že každé dva členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ lokálních řetězců $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ s příslušnými indexy γ, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ jsou ekvivalentní množiny. Z toho soudíme, že takové členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ jsou v lokálních řetězcích $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ současně buď podstatné nebo nepodstatné. Tak docházíme k poznatku, že *každé dva lokální řetězce, které si v silné ekvivalenci* $\boldsymbol{f}$ *odpovídají, mají touž redukovanou délku.*

Nyní ukážeme, že *i řady* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ *mají touž redukovanou délku.*

To je především zřejmé v případě $\alpha = 1$, neboť počáteční členy $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$ řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou vždy podstatné.

Budiž tedy $\alpha > 1$. Vezměme v úvahu libovolný podstatný člen $\bar{A}_{\gamma+1}$ $(1 \leqq \gamma < \alpha)$

řady $(\bar{A})$. Pak existuje prvek $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ vyznačující se tím, že rozklad $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ obsahuje víc než jeden prvek. Budiž $\bar{a} = \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ libovolný prvek rozkladu $\bar{A}_\alpha$ takový, že $\bar{a} \subset \bar{a}_\gamma$. Dále buď $[\bar{K}]$ lokální řetězec řady $(\bar{A})$ s bází $\bar{a}$ a $[\bar{L}] = \boldsymbol{f}[\bar{K}]$ lokální řetězec řady $(\bar{B})$ přiřazený ke $[\bar{K}]$ funkcí $\boldsymbol{f}$. Použijme hořejšího označení členů lokálních řetězců $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$. Pak zejména máme $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$, $\bar{L}_\delta = \bar{b}_\delta \sqcap \bar{B}_{\delta+1}$, přičemž je $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ a $\bar{b}_\delta \in \bar{B}_\delta$. Podle hořejší úvahy představuje člen $\bar{L}_\delta$ množinu, která je ekvivalentní s rozkladem $\bar{K}_\gamma$ a která tudíž obsahuje víc než jeden prvek. Z toho soudíme, že člen $\bar{B}_{\delta+1}$ řady $(\bar{B})$ je podstatný; zejména máme $1 \leqq \delta < \alpha$. Vidíme, že řada $(\bar{B})$ obsahuje alespoň tolik podstatných členů jako řada $(\bar{A})$, takže pro redukované délky α', β' řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ platí vztah $\alpha' \leqq \beta'$. Z obdobných důvodů platí též $\beta' \leqq \alpha'$ a tím je důkaz ukončen.

10.6. Polospjaté (volně spjaté) a spjaté řady rozkladů

Vezměme opět v úvahu libovolné řady rozkladů $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ na množině G s touž délkou α $(\geqq 1)$ a použijme hořejších označení. Zejména tedy symboly $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$ značí variety lokálních řetězců příslušné k řadám $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Pravíme, že řada $(\bar{B})$ je *polospjatá* neboli *volně spjatá* (*spjatá*) s řadou $(\bar{A})$, když varieta lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{B}}$ je ekvivalentní a volně spřažená (ekvivalentní a spřažená) s varietou $\tilde{\mathrm{A}}$.

Když je řada $(\bar{B})$ polospjatá (spjatá) s řadou $(\bar{A})$, pak také řada $(\bar{A})$ je polospjatá (spjatá) s řadou $(\bar{B})$ (**6.9.2**). S ohledem na tuto symetrii mluvíme o polospjatých neboli volně spjatých (spjatých) řadách $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Podle hořejší definice je řada $(\bar{B})$ polospjatá (spjatá) s řadou $(\bar{A})$, když existuje ekvivalence s volným spřažením (ekvivalence se spřažením) variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu B (**6.9.2**). Když zejména koncové členy $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ splývají a kobaziální zobrazení variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$ je ekvivalencí s volným spřažením (ekvivalencí se spřažením), nazýváme řadu $(\bar{B})$ *kobaziálně polospjatou* neboli *kobaziálně volně spjatou* (*kobaziálně spjatou*) s řadou $(\bar{A})$; v tomto případě mluvíme též o *kobaziálně polospjatých* neboli *kobaziálně volně spjatých* (*kobaziálně spjatých*) *řadách* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Předpokládejme nyní, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou volně spjaté (spjaté).

Budiž $\boldsymbol{f}$ ekvivalence s volným spřažením (ekvivalence se spřažením) variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ na varietu $\tilde{\mathrm{B}}$. Zobrazení $\boldsymbol{f}$ je tedy prosté (**6.9**) a danou situaci můžeme popsat takto (**6.9.2**):

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem:

Buďte $[\bar{K}] \in \tilde{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{f}[\bar{K}] = [\bar{L}] \in \tilde{\mathrm{B}}$ libovolné lokální řetzce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, které jsou k sobě přiřazeny funkcí $\boldsymbol{f}$. Pak jsou každé dva členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ lokálních řetězců $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ polospřažené (spřažené) rozklady v množině G; přitom je $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Podrobněji se dá tato situace popsat tak, že každý prvek každého ze zmíněných rozkladů je incidentní nejvýš (právě) s jedním prvkem druhého a přitom vždy nastane alespoň jedna incidence. Oba obaly $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma = \bar{L}_\delta \sqsubset \bar{K}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{L}_\delta = \bar{K}_\gamma \sqsubset \bar{L}_\delta$ $(\neq \emptyset)$ jsou spřažené.

Když jsou řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ spjaté, pak zobrazení $\mathbf{a}_\gamma$ členu $\bar{K}_\gamma$ na člen $\bar{L}_\delta$, realizované incidencí prvků v rozkladech $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$, je prosté. Vidíme, že *dvě spjaté řady rozkladů jsou řetězcově ekvivalentní.* Zejména tedy mají dvě spjaté řady rozkladů touž redukovanou délku.

10.7. Modulární řady rozkladů

Buďte

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha ,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta$$

libovolné řady rozkladů na množině G o délkách $\alpha, \beta \geqq 1$.

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ nazýváme *modulární*, když každý člen $\bar{A}_\mu$ řady $(\bar{A})$ je modulární vždy vzhledem ke dvěma sousedním členům $\bar{B}_{\delta-1}$, $\bar{B}_\delta$ řady $(\bar{B})$ a současně je každý člen $\bar{B}_\nu$ řady $(\bar{B})$ modulární vždy vzhledem ke dvěma sousedním členům $\bar{A}_{\gamma-1}$, $\bar{A}_\gamma$ řady $(\bar{A})$; jinými slovy, když platí rovnosti

$$(1) \qquad [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] = (\bar{A}_{\gamma-1}, [\bar{A}_\gamma, \bar{B}_\nu]) ,$$
$$[\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] = (\bar{B}_{\delta-1}, [\bar{B}_\delta, \bar{A}_\mu]) .$$

V dalším výkladu předpokládáme, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou modulární.

V této situaci platí věta:

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají kobaziálně volně spjatá zjemnění $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ se stejnými počátečními a koncovými členy. Tato zjemnění jsou dána konstrukcí popsanou v části a) *následujícího důkazu.*

Důkaz. a) Označme

$$[\bar{A}_1, \bar{B}_1] = \bar{U} , \quad (\bar{A}_\alpha, \bar{B}_\beta) = \bar{V} ,$$
$$\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = \bar{G}_{\max} , \quad \bar{A}_{\alpha+1} = \bar{B}_{\beta+1} = \bar{V} .$$

Pak platí vzorce (1) pro $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$.

Označme rozklad vyskytující se na obou stranách prvního (druhého) vzorce (1) symbolem $\mathring{A}_{\gamma,\nu}$ $(\mathring{B}_{\delta,\mu})$, přičemž indexy γ, μ; δ, ν mají výše uvedené hodnoty.

Z definice rozkladů $\mathring{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathring{B}_{\delta,\mu}$ soudíme především na platnost vztahů

$$\bar{A}_{\gamma-1} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu} , \quad \mathring{A}_{\gamma,\beta+1} = \bar{A}_\gamma ,$$
$$\bar{B}_{\delta-1} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu} , \quad \mathring{B}_{\delta,\alpha+1} = \bar{B}_\delta .$$

Pro $\nu \leqq \beta$ platí vztah $\bar{B}_\nu \geqq \bar{B}_{\nu+1}$; z něho podle **3.7.2** plyne $(\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu) \geqq$ $\geqq (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})$ a dále: $[\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] \geqq [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})]$. Podobně odvodíme pro $\mu \leqq \alpha$ vztah $[\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] \geqq [\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_{\mu+1})]$. Máme tedy pro $\nu \leqq \beta$, $\mu \leqq \alpha$ relace

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu+1}, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu+1}$$

a docházíme k těmto řadám rozkladů od $\mathring{A}_{\gamma,1}$ do $\bar{A}_\gamma$ a od $\mathring{B}_{\delta,1}$ do $\mathring{B}_\delta$:

$$\mathring{A}_{\gamma,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{\gamma,\beta+1},$$
$$\mathring{B}_{\delta,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{\delta,\alpha+1}.$$

Vidíme, že následující řady rozkladů $(\mathring{A}), (\mathring{B})$ na množině G jsou zjemněními řad $(\bar{A}), (\bar{B})$:

$$((\mathring{A}) =) \quad \bar{U} = \mathring{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{2,\beta+1} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \bar{V},$$
$$((\mathring{B}) =) \quad \bar{U} = \mathring{B}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{B}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{2,\alpha+1} \geqq \ldots$$
$$\geqq \mathring{B}_{\beta+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} = \bar{V}.$$

Řady $(\mathring{A}), (\mathring{B})$ mají zřejmě touž délku $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ a jejich počáteční a koncové členy splývají: $(\bar{U} =) \mathring{A}_{1,1} = \mathring{B}_{1,1}, \mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} (= \bar{V})$. *Tyto řady* $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ *jsou zmíněná kobaziálně volně spjatá zjemnění řad* $(\bar{A}), (\bar{B})$.

b) Ukážeme, že řady $(\mathring{A}), (\mathring{B})$ jsou kobaziálně volně spjaté.

Především definujeme permutaci $\mathfrak{p}$ množiny $\{1, \ldots, (\alpha + 1)(\beta + 1)\}$ takto:

$$\mathfrak{p}[(\mu - 1)(\beta + 1) + \nu - 1] = (\nu - 1)(\alpha + 1) + \mu - 1,$$
$$\text{pro } \mu = 1, \ldots, \alpha + 1; \ \nu = 1, \ldots, \beta + 1; \ \mu + \nu > 2,$$
$$\mathfrak{p}(\alpha + 1)(\beta + 1) = (\beta + 1)(\alpha + 1).$$

Budiž $\bar{a} \in \bar{V}$ libovolný prvek a

$$([\mathring{K}\bar{a}] =) \quad \mathring{K}_1 \to \ldots \to \mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)},$$
$$([\mathring{L}\bar{a}] =) \quad \mathring{L}_1 \to \ldots \to \mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$$

lokální řetězce řad $(\mathring{A}), (\mathring{B})$, příslušné k bázi $\bar{a}$.

Dále buďte $\bar{a}_{\mu-1}, \bar{b}_{\nu-1}; \mathring{a}_{\mu,\nu}, \mathring{b}_{\nu,\mu}$ prvky určené vztahy:

$$\bar{a} \subset \bar{a}_{\mu-1} \in \bar{A}_{\mu-1}; \quad \bar{a} \subset \bar{b}_{\nu-1} \in \bar{B}_{\nu-1}; \quad \bar{a} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu} \in \mathring{A}_{\mu,\nu},$$
$$\bar{a} \subset \mathring{b}_{\nu,\mu} \in \mathring{B}_{\nu,\mu},$$
$$(\mu = 1, \ldots, \alpha + 1; \ \nu = 1, \ldots, \beta + 1; \ \bar{a}_0 = \bar{b}_0 = G).$$

Pak máme:

(1) $$\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \sqcap \mathring{A}_{\mu,\nu}; \quad \mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1} = \mathring{b}_{\nu,\mu-1} \sqcap \mathring{B}_{\nu,\mu}$$
$$(\mu + \nu > 2; \ \mathring{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1}, \ \mathring{b}_{\nu,0} = \bar{b}_{\nu-1}),$$
$$\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)} = \bar{a} \sqcap \bar{V} = \mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}.$$

Ukážeme, že rozklady $\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$ a $\mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1}$ $(\mu + \nu > 2)$, a rovněž rozklady $\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)}$ a $\mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$, přiřazené k sobě permutací $\boldsymbol{p}$, jsou volně spřažené.

Ze vztahu $\bar{a}_{\mu,\nu-1} \in (\bar{A}_{\mu-1}, [\bar{A}_\mu, \bar{B}_{\nu-1}])$ soudíme na platnost vztahu $\mathring{a}_{\mu,\nu-1} = \bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{v}$, přičemž $\bar{v} \in [\bar{A}_\mu, \bar{B}_{\nu-1}]$ značí součet všech prvků rozkladu $\bar{B}_{\nu-1}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{b}_{\nu-1}$ v rozkladu $\bar{A}_\mu$. Zejména tedy je $\bar{b}_{\nu-1} \subset \bar{v}$ a tedy též $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu-1}$.

Podobně platí $\mathring{b}_{\nu,\mu-1} = \bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{u}$, přičemž $\bar{u} \in [\bar{B}_\nu, \bar{A}_{\mu-1}]$ značí součet všech prvků rozkladu $\bar{A}_{\mu-1}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}_{\mu-1}$ v rozkladu $\bar{B}_\nu$. Zejména tedy je $\bar{a}_{\mu-1} \subset \bar{u}$ a tedy též $\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1} \subset \mathring{b}_{\nu,\mu-1}$.

Z této úvahy plyne platnost vztahů:

$$(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \subset (\mathring{a}_{\mu,\nu-1} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu-1}) = (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{v}) \cap (\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{u}) \subset (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}),$$

takže máme

$$\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu-1}.$$

Nuže, podle (1) je $\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$ rozklad na $\mathring{a}_{\mu,\nu-1}$ a $\mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1}$ rozklad na $\mathring{b}_{\nu,\mu-1}$. Za účelem zjednodušení označení položme na okamžik $\mathring{K}_{\mu,\nu} = \mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$, $\mathring{L}_{\nu,\mu} = \mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1}$. Potom se dá hořejší rovnost napsat ve tvaru

$$\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} = \mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\mathring{L}_{\nu,\mu}.$$

Libovolný prvek $\mathring{x} \in \mathring{K}_{\mu,\nu}$ je incidentní s některým prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ tehdy a jen tehdy, když platí $\mathring{x} \in (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$. Vskutku, když prvek $\mathring{x}$ je incidentní s některým prvkem v $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ pak je též incidentní s množinou $\mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\mathring{L}_{\nu,\mu}$ a tedy též s množinou $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$, takže máme: $\mathring{x} \in (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$; když naopak platí tento vztah, je prvek $\mathring{x}$ incidentní s množinou $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$, tedy též s $\mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\mathring{L}_{\nu,\mu}$ a tedy též alespoň s jedním prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$.

Podobně vidíme, že libovolný prvek $\mathring{y} \in \mathring{L}_{\nu,\mu}$ je incidentní s některým prvkem rozkladu $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ tehdy a jen tehdy, když platí $\mathring{y} \in (\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{L}_{\nu,\mu}$.

Nyní snadno ukážeme, že rozklady $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ a $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ jsou volně spřažené.

Nejdříve si všimněme, že průsek $\mathring{K}_{\mu,\nu} \sqcap \mathring{L}_{\nu,\mu}$ není prázdný, neboť $\bar{a} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu}$. Dále zjistíme, že každý prvek rozkladu $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$. Vskutku, když některý prvek $\mathring{x} \in \mathring{K}_{\mu,\nu}$ není v obalu $(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$, pak není incidentní se žádným prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$. Naopak, je-li prvek $\mathring{x} \in \mathring{K}_{\mu,\nu}$ incidentní alespoň s jedním prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$, pak všechny prvky v $\mathring{L}_{\nu,\mu}$, incidentní s $\mathring{x}$, náleží do obalu $(\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{L}_{\nu,\mu}$. Podle **4.3** jsou obaly $(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$ a $(\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{L}_{\nu,\mu}$ spřažené. Z toho soudíme, že v rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ je právě jeden prvek incidentní s $\mathring{x}$. Tím je ukázáno, že každý prvek v $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem rozkladu $\mathring{L}_{\nu,\mu}$. Podobně zjistíme, že též každý prvek v $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem rozkladu $\mathring{K}_{\mu,\nu}$. Vidíme, že rozklady $\mathring{K}_{\mu,\nu}$, $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ jsou skutečně volně spřažené.

K ukončení důkazu máme ještě zjistit, že též rozklady $\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)}$ a $\mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$ jsou volně spřažené. Avšak to je zřejmé, neboť tyto rozklady se skládají z téhož jediného prvku $\bar{a}$.

10.8. Doplňkové řady rozkladů

Buďte opět $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ libovolné řady rozkladů na množině G a jejich délky nechť jsou $\alpha, \beta \geqq 1$. Používáme i nadále hořejších označení.

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ nazýváme *doplňkové*, když každý člen řady $(\bar{A})$ je doplňkový ke každému členu řady $(\bar{B})$.

V dalším výkladu předpokládáme, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou doplňkové.

Pak platí vzhledem k výsledkům v odst. **5.5** a **5.4** tyto věty:

Každé dva lokální řetězce s týmiž konci, příslušné k řadám $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, jsou adjungované.

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou modulární.

Dále dokážeme tuto větu:

Řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ mají kobaziálně spjatá zjemnění $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ se stejnými počátečními a koncovými členy. Tato zjemnění jsou dána výše popsanou konstrukcí kobaziálně volně spjatých zjemnění modulárních řad (část a) hořejšího důkazu).

Důkaz. Jde o to, abychom s přihlédnutím k tomu, že řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou nejen modulární, ale doplňkové, zostřili část b) hořejšího důkazu v tom směru, že rozklady

$$(\mathring{K}_{\mu,\nu} =)\quad \mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \sqcap \mathring{A}_{\mu,\nu}\,;$$
$$(\mathring{L}_{\nu,\mu} =)\quad \mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1} = \mathring{b}_{\nu,\mu-1} \sqcap \mathring{B}_{\nu,\mu}\,;$$
$$(\mathring{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1},\ \mathring{b}_{\nu,0} = \bar{b}_{\nu-1};\ \mu + \nu > 2)$$

jsou spřažené.

Nuže, podle výsledků v odst. **5.3** jsou rozklady $\bar{A}_\mu$, $(\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})$ doplňkové; z toho soudíme se zřetelem na první větu **5.3**, že prvek $\mathring{a}_{\mu,\nu-1} \in [\bar{A}_\mu, (\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})]$ je součtem všech prvků rozkladu $\bar{A}_\mu$, které jsou incidentní s prvkem $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} \in$ $\in (\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})$. Rovněž libovolný prvek $\mathring{x} \in \mathring{A}_{\mu,\nu}$ je součtem některých prvků rozkladu $\bar{A}_\mu$; vidíme, že tento prvek je s prvkem $\mathring{a}_{\mu,\nu-1}$ incidentní právě tehdy, když je incidentní s množinou $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$. Vidíme, že platí rovnost: $\mathring{K}_{\mu,\nu} = (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{A}_{\mu,\nu}$. Podobně obdržíme: $\mathring{L}_{\nu,\mu} = (\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{B}_{\nu,\mu}$. Tím je důkaz ukončen, neboť oba rozklady vystupující na obou stranách těchto rovností jsou spřažené (**5.5**).

10.9. Příklad kobaziálně spjatých řad rozkladů

V následujícím obrazci je uveden příklad kobaziálně spjatých řad rozkladů $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ množiny G, která se skládá z 20 prvků (srv. str. 205, č. 39). Prvky množiny G, popř. jednobodové množiny utvořené z těchto 20 prvků, jsou uvedeny ve vnitřních sloupcích a jsou označeny symboly A_8, B_8, ...; šipky ukazují, které prvky jsou stejné. Jednotlivé členy kobaziálně spjatých řad

$$((\mathring{A}) =) \quad \mathring{A}_{11} \geqq \mathring{A}_{12} \geqq \mathring{A}_{21} \geqq \mathring{A}_{22} \geqq \mathring{A}_{31} \geqq \mathring{A}_{32} \geqq \mathring{A}_{41} \geqq \mathring{A}_{42},$$
$$((\mathring{B}) =) \quad \mathring{B}_{11} \geqq \mathring{B}_{12} \geqq \mathring{B}_{13} \geqq \mathring{B}_{14} \geqq \mathring{B}_{21} \geqq \mathring{B}_{22} \geqq \mathring{B}_{23} \geqq \mathring{B}_{24}$$

jsou v obrazci uvedeny v příslušných sloupcích.

Východiskem k sestrojení řad $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ jsou doplňkové řady rozkladů množiny G:

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \bar{A}_2 \geqq \bar{A}_3,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \bar{B}_2 (= \bar{A}_3),$$

jejichž jednotlivé členy vystupují v řadách $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ pod jmény $\mathring{A}_{12}$, $\mathring{A}_{22}$, $\mathring{A}_{32}$ a $\mathring{B}_{14}$, $\mathring{B}_{24}$. Z obrazce snadno zjistíme, že je skutečně každý člen řady $(\bar{B})$ doplňkový ke každému členu řady $(\bar{A})$.

Spřažené členy náležející vždy do dvou lokálních řetězců s touž bází řad $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$, jsou uvedeny ve sloupcích označených symboly $\mathring{A}_{\gamma\delta}$, $\mathring{B}_{\delta\gamma}$.

V obrazci jsou barevně vyznačeny lokální řetězce řad $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$, s bází $A_8 = B_8$. Vidíme, že členy těchto lokálních řetězců, uvedené ve dvou sloupcích označených symboly $\mathring{A}_{\gamma\delta}$, $\mathring{B}_{\delta\gamma}$, představují spřažené rozklady. Incidentní prvky vždy ve dvou spřažených rozkladech jsou vyznačeny stejnou barvou. Např. k rozkladu skládajícímu se z prvků A_4, A'_4 je přiřazen rozklad vytvořený prvky B_6, B'_6; prvek A_4 (B_6) je incidentní s jediným prvkem B_6 (A_4) a prvek A'_4 (B'_6) s jediným prvkem B'_6 (A'_4).

10.10. Souvislost s teorií zobrazení množin na množiny konečných posloupností

Předcházející teorie řad rozkladů množin má úzký vztah k úvahám o zobrazení množin na množiny, jejichž prvky jsou konečné posloupnosti stejné délky.

Vezměme v úvahu neprázdnou množinu $\mathscr{A}$ skládající se z konečných α-členných posloupností $(\alpha \geqq 1)$ a libovolné zobrazení $\boldsymbol{a}$ množiny G na množinu $\mathscr{A}$.

K množině $\mathscr{A}$ patří, jak víme (**1.7**), množiny hlavních částí $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha$ $(= \mathscr{A})$, v počtu α.

Budiž γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ libovolné číslo.

Především definujeme zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ množiny G na množinu $\mathscr{A}_\gamma$ tak, že ke každému bodu $a \in G$ přiřadíme γ-tou hlavní část $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ posloupnosti $\boldsymbol{a}a$. Zobrazení $\boldsymbol{a}_\alpha$ je ovšem totéž jako $\boldsymbol{a}$.

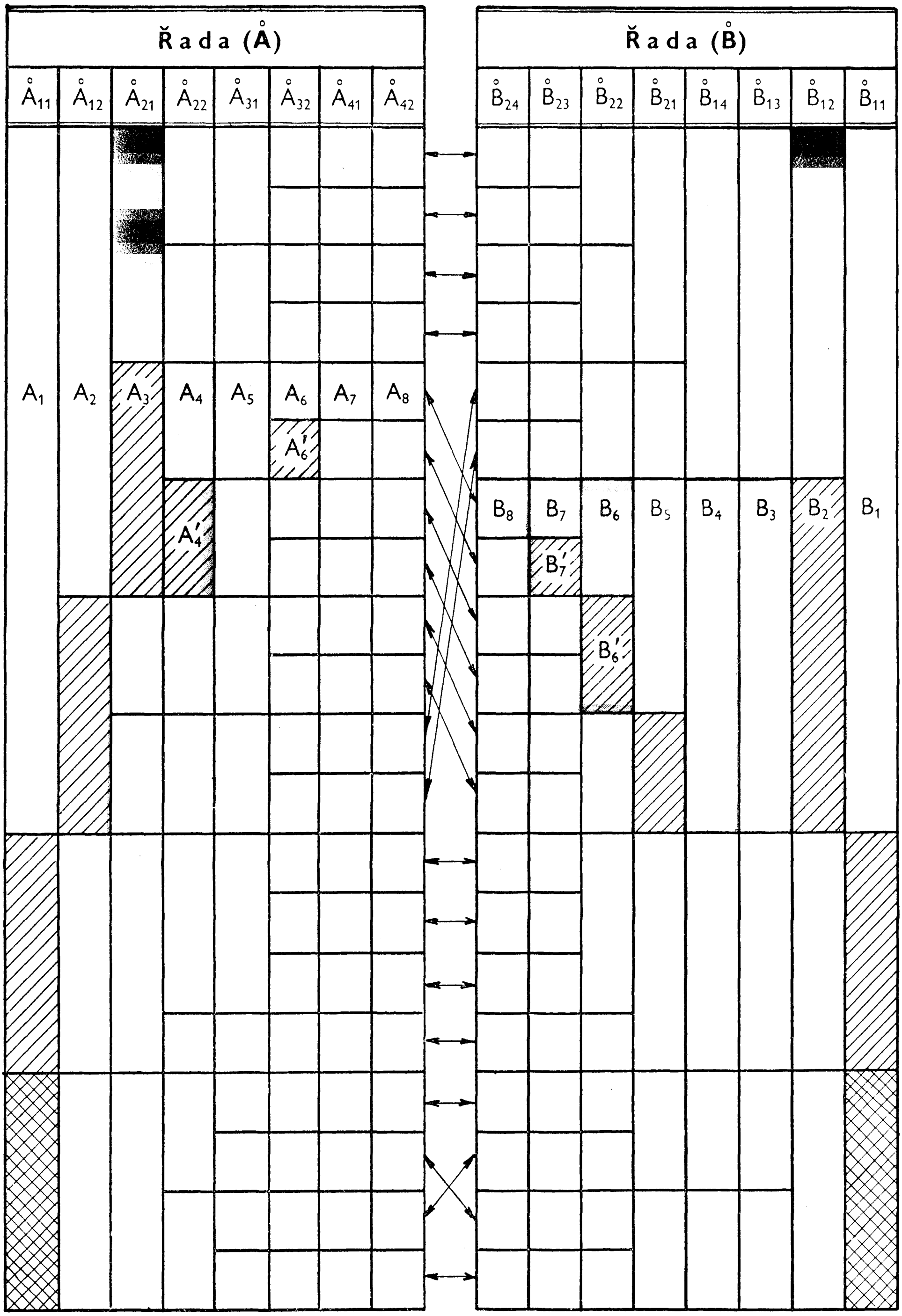
K zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ patří jistý rozklad množiny G, který označíme $\bar{A}_\gamma$. Rozklad $\bar{A}_\alpha$ ovšem splývá s rozkladem patřícím k zobrazení $\boldsymbol{a}$.

Budiž $a \in G$ libovolný bod množiny G.

K prvku $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ patří množina jeho následovnic (**1.7**) $M(a^{(\gamma)}) \subset \subset \mathscr{A}_{\gamma+1}$ $(1 \leqq \gamma < \alpha)$. Dále je účelné označit $M(a^{(\alpha)}) = \{a^{(\alpha)}\}$. Posloupnost množin

$$([Ma] =) \quad M(a^{(1)}) \to \ldots \to M(a^{(\alpha)})$$

se nazývá *řetězec množin následovnic* patřící k bodu a.


Řada (Å)
Řada (B̊)
Å11
Å12
Å21
Å22
Å31
Å32
Å41
Å42
B̊24
B̊23
B̊22
B̊21
B̊14
B̊13
B̊12
B̊11
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A'6
A'4
B8
B7
B6
B5
B4
B3
B2
B1
B'7
B'6

Vezměme v úvahu prvek $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ a prvek $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ skládající se z $\mathbf{a}_\gamma$-vzorů prvku $\bar{a}^{(\gamma)}$. V zobrazení $\mathbf{a}_{\gamma+1}$ $(1 \leqq \gamma < \alpha)$ se zobrazí každý bod ležící v prvku $\bar{a}_\gamma$ na jistou následovnici prvku $a^{(\gamma)}$; současně má každá následovnice tohoto prvku $a^{(\gamma)}$ v zobrazení $\mathbf{a}_{\gamma+1}$ jeden nebo víc vzorů ležících v množině G, které jsou všechny obsaženy v prvku $\bar{a}_\gamma$. Vidíme, že množiny $\mathbf{a}_{\gamma+1}$-vzorů jednotlivých následovnic prvku $a^{(\gamma)}$, tj. množiny $\mathbf{a}_{\gamma+1}$-vzorů jednotlivých prvků množiny $M(a^{(\gamma)})$, jsou rozkladem prvku $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$; tento rozklad představuje rozklad $(\bar{K}_\gamma a =)$ $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ patřící k částečnému zobrazení $\mathbf{a}_{\gamma+1}$ prvku $\bar{a}_\gamma$ na množinu následovnic $M(a^{(\gamma)})$. Podle první věty o ekvivalenci (**6.8**) je množina následovnic $M(a^{(\gamma)})$ ekvivalentní s rozkladem $\bar{K}_\gamma a$. Ovšem je též množina $M(a^{(\alpha)})$ ekvivalentní s rozkladem $\bar{K}_\alpha a$.

Touto úvahou docházíme k takovémuto popisu situace:

Množina posloupností $\mathscr{A}$ a zobrazení $\mathbf{a}$ množiny G na množinu $\mathscr{A}$ určují na množině G řadu rozkladů délky α, tzv. *vzorovou řadu*

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha ,$$

jejímiž členy jsou rozklady příslušné k jednotlivým zobrazením $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\alpha$.

Ke každému bodu $a \in G$ patří řetězec množin následovnic

$$([Ma] =) \quad M(a^{(1)}) \to \ldots \to M(a^{(\alpha)})$$

a lokální řetězec řady $(\bar{A})$

$$([\bar{K}a] =) \quad \bar{K}_1 a \to \ldots \to \bar{K}_\alpha a .$$

Každé dva členy $M(a^{(\gamma)})$, $\bar{K}_\gamma a$ těchto řetězců, s týmž indexem γ, jsou ekvivalentní množiny.

Vezměme nyní v úvahu dvě neprázdné množiny $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ skládající se z konečných α $(\geqq 1)$-členných posloupností a libovolná zobrazení $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ množiny G na množinu $\mathscr{A}$ popř. $\mathscr{B}$. Pak máme příslušné množiny hlavních částí $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha$ $(= \mathscr{A})$; $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_\alpha$ $(= \mathscr{B})$, dále zobrazení $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\alpha$ $(= \mathbf{a})$; $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\alpha$ $(= \mathbf{b})$ množiny G na příslušné množiny hlavních částí a konečně vzorové řady

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha ,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\alpha .$$

Ke každému bodu $a \in G$ patří dva řetězce množin následovnic:

$$([Ma] =) \quad M(a^{(1)}) \to \ldots \to M(a^{(\alpha)}) ,$$
$$([Na] =) \quad N(b^{(1)}) \to \ldots \to N(b^{(\alpha)}) ,$$

a dále lokální řetězce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$:

$$([\bar{K}a] =) \quad \bar{K}_1 a \to \ldots \to \bar{K}_\alpha a ,$$
$$([\bar{L}a] =) \quad \bar{L}_1 a \to \ldots \to \bar{L}_\alpha a .$$

Každé dva členy $M(a^{(\gamma)})$, $\bar{K}_\gamma a$, popř. $N(b^{(\gamma)})$, $\bar{L}_\gamma a$ těchto řetězců, s tímž indexem γ, jsou ekvivalentní množiny.

Nyní předpokládejme, že vzorové řady $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ jsou kobaziálně řetězcově ekvivalentní.

V této situaci především splývají koncové členy $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ vzorových řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, takže $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\alpha$. Dále se dá ukázat toto:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ *množiny* $\{1, \ldots, \alpha\}$, *která se vyznačuje tím, že člen* $M(a^{(\gamma)})$, *s libovolným indexem* γ, *řetězce množin následovnic* $[Ma]$ *patřícího k libovolnému bodu* $a \in G$ *a člen* $N(b^{(\delta)})$, *s indexem* $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, *řetězce množin následovnic* $[Na]$ *patřícího k témuž bodu* a, *jsou ekvivalentní množiny.*

Důkaz. Podle našeho předpokladu je kobaziální zobrazení variety lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{A}}$ řady $(\bar{A})$ na varietu lokálních řetězců $\tilde{\mathrm{B}}$ řady $(\bar{B})$ silnou ekvivalencí. To znamená, že existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem:

Buď $a \in G$ libovolný bod a $\bar{a}$ onen prvek rozkladu $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\alpha$, který jej obsahuje.

Dále buďte $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{L}\bar{a}]$ lokální řetězce řad $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ s bází $\bar{a}$. Pak jsou každé dva členy $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{L}_\delta\bar{a}$ lokálních řetězců $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{L}\bar{a}]$ ekvivalentní množiny; přitom je $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$.

Vezměme v úvahu člen $M(a^{(\gamma)})$ s libovolným indexem γ řetězce množin následovnic $[Ma]$, patřícího k bodu a, a člen $N(b^{(\delta)})$ s indexem $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ řetězce množin následovnic $[Na]$, patřícího k témuž bodu a. Pak máme $\bar{K}_\gamma a = \bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{L}_\delta a = \bar{L}_\delta\bar{a}$. Nuže, jak víme, je množina $M(a^{(\gamma)})$ ekvivalentní s $\bar{K}_\gamma a$ $(= \bar{K}_\gamma\bar{a})$, dále $\bar{K}_\gamma a$ je ekvivalentní s $\bar{L}_\delta a$ $(= \bar{L}_\delta\bar{a})$ a konečně $\bar{L}_\delta a$ s $N(b^{(\delta)})$. Vidíme (**6.10**.7), že $M(a^{(\gamma)})$ je ekvivalentní s $N(b^{(\delta)})$. Tím je důkaz ukončen.

Věta, kterou jsme právě dokázali, vede k tomuto poznatku: Když zobrazíme libovolný bod $a \in G$ funkcemi $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\delta$ do množin hlavních částí $\mathscr{A}_\gamma$, $\mathscr{B}_\delta$, přičemž γ, δ jsou ve výše popsaném vztahu, pak jsou množiny následovnic obou obrazů ekvivalentní.

10.11. Poznámky o použití předcházející teorie v oboru vědeckých klasifikací

Teorie řad rozkladů množin a zobrazení na množiny posloupností má zajímavé použití v oboru vědeckých klasifikací. V tomto směru se spokojíme s několika poznámkami, neboť podrobnější výklad by přesahoval rámec této knihy.

Vědeckou klasifikací $(\mathscr{A})$ *množiny* G, stručněji *klasifikací množiny* G, rozumíme neprázdnou množinu $\mathscr{A}$ skládající se z konečných α-členných $(\alpha \geqq 1)$ posloupností, spolu s nějakým zobrazením $\boldsymbol{a}$ množiny G na $\mathscr{A}$. Pro každý prvek $a \in G$ se γ-tý člen posloupnosti $\boldsymbol{a}a$ nazývá γ-*tý znak* neboli *znak řádu* γ *prvku* a. Vzhledem k tomu se prvky množiny $\mathscr{A}$ nazývají *posloupnosti znaků*. Je zřejmé, že se předcházejících poznatků o zobrazeních na množiny posloupností dá bezprostředně použít na vědecké klasifikace.

V případě vědeckých klasifikací se prvky množiny G nazývají *individua*, množiny hlavních částí se nazývají *množiny znakové* a vzorové řadě se říká *řada klasifikační.*

V konkrétních případech se při sestavení klasifikace kladou na volbu znaků speciální podmínky, které pak mají vliv zejména na vlastnosti klasifikační řady. Tak je tomu např. při klasifikacích v přírodních vědách, kdy se za znaky klasifikovaných individuí volí zcela určité vlastnosti těchto individuí, dané přírodou.

Určení libovolného individua a v klasifikaci $(\mathscr{A})$ záleží ve zjištění příslušné posloupnosti znaků $\mathbf{a}a$. Nuže, v konkrétních případech se stává, že se při určování individua některé znaky zjistit nedají, např. v případech, kdy jde o individuum poškozené nebo patologické, nebo když nemáme k určení vhodné prostředky apod. V takových případech není určení daného individua v klasifikaci $(\mathscr{A})$ možné.

Odtud vyvstává tento problém:

Má se popsat princip vedoucí ke konstrukci dvou tzv. *zladěných klasifikací* množiny G, které by byly ve vhodných vzájemných vztazích. Požaduje se 1) aby obě klasifikace vedly k témuž výsledku, tj. aby individua, která se vzájemně nerozlišují, byla v obou klasifikacích táž; 2) aby se u každého individua daly scházející znaky v jedné klasifikaci nahradit vhodnými znaky v druhé.

Naše poznatky o funkcích, jejichž hodnotami jsou posloupnosti, ukazují cestu k řešení tohoto zajisté obtížného problému. Vyjdeme od dvou vhodně zvolených doplňkových řad rozkladů klasifikované množiny G a volíme, v souhlase s konstrukcí uvedenou v odst. **10.7**, znaky v obou klasifikacích tak, aby příslušné klasifikační řady vyšly kobaziálně spjaté (**10.8**). Jestliže se nám to podařilo, dovedeme u každého individua ze znalosti jeho prvních γ znaků v jedné klasifikaci a $(\delta + 1)$-ých znaků v druhé, pomocí prostých zobrazení mezi příslušnými množinami následovnic, určit $(\gamma + 1)$-ní znak v první klasifikaci. Možnost skutečného provedení této konstrukce zladěných klasifikací není však v konkrétních případech nikterak zajištěna, neboť při volbě znaků je nutno přihlížet k požadavkům, které se na ně kladou. Nicméně zmíněná konstrukce připouští ve volbě znaků jistou volnost, neboť doplňkové řady rozkladů, z nichž konstrukce vychází, mohou být zvoleny libovolně.

10.12. Cvičení

1. Varieta lokálních řetězců příslušná k řadě rozkladů $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ na množině G je množina posloupností $\mathscr{A}$. Když ke každému bodu $a \in G$ přiřadíme příslušný lokální řetězec $[\bar{K}a]$, obdržíme zobrazení $\mathbf{a}$ množiny G na množinu posloupností $\mathscr{A}$. Příslušná vzorová řada je řada $(\bar{A})$. γ-tá hlavní část $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ posloupnosti $\mathbf{a}a$ přiřazené k libovolnému bodu $a \in G$ je řetězec $\bar{K}_1 a \to \ldots \to \bar{K}_\gamma a$. Pro $1 \leqq \gamma < \alpha$ obdržíme všechny jeho následovnice, když na konci zmíněného řetězce přidáme vždy jeden rozklad $\bar{x}_{\gamma+1} \sqcap \bar{A}_{\gamma+2}$, přičemž $\bar{x}_{\gamma+1}$ probíhá všechny prvky rozkladu $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ $(a \in \bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma;\ \bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha)$. Existují zobrazení množiny G na množiny posloupností s libovolně danými vzorovými řadami.

2. Obrazec za str. 84 může být považován za schéma dvou zladěných klasifikací (s kobaziálně spjatými klasifikačními řadami). Posloupnosti znaků příslušné k jednotlivým individuím, popř. třídám individuí, která mezi sebou rozlišujeme, jsou v obrazci uvedeny v jednotlivých řadách; šipky ukazují vždy obě posloupnosti znaků patřící témuž individuu. Pro každé individuum jsou příslušné ekvivalentní množiny následovnic (o nichž je podrobněji pojednáno v textu) uvedeny vždy ve dvou sloupcích označených $\mathring{A}_{\gamma\delta}$ a $\mathring{B}_{\delta\gamma}$. Když např. má určité individuum v klasifikaci ($\mathring{A}$) znaky A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 a v klasifikaci ($\mathring{B}$) znaky B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 (popř. B_7'), pak má v klasifikaci ($\mathring{A}$) také znak A_6, popř. (A_6'). Čtenář nechť si věc promyslí ve všech podrobnostech.