9. Obecné (mnohoznačné) zobrazení

9.1. Základní pojmy a vlastnosti

Pojem zobrazení množiny G do množiny G^*, o němž jsme posud uvažovali, můžeme zobecnit touto definicí:

Obecným (mnohoznačným) zobrazením množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen alespoň jeden prvek množiny G^*.

Budiž $\mathbf{g}$ libovolné obecné zobrazení množiny G do G^*. Pak má každý prvek $a \in G$ v tomto zobrazení alespoň jeden, obecně několik a třeba i nekonečně mnoho obrazů v množině G^*; tuto množinu obrazů označujeme $\mathbf{g}a$.

Když každý prvek $a^* \in G^*$ je v množině obrazů některého prvku $a \in G$, pravíme, že $\mathbf{g}$ je obecné zobrazení množiny G *na* množinu G^*.

V tomto případě je zobrazením $\mathbf{g}$ určeno jisté obecné zobrazení množiny G^* na G, které se nazývá *inverzní vzhledem ke* $\mathbf{g}$ a označuje se $\mathbf{g}^{-1}$. Je definováno tím, že k libovolnému prvku $a^* \in G^*$ je přiřazen každý prvek $a \in G$, jehož množina obrazů v $\mathbf{g}$ obsahuje a^*. Podle této definice platí tedy oba vztahy $a^* \in \mathbf{g}a$, $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ současně, tj. když platí jeden, platí i druhý.

Snadno ukážeme, že *zobrazení inverzní vzhledem ke* $\mathbf{g}^{-1}$ *je původní zobrazení* $\mathbf{g}$, tj. $(\mathbf{g}^{-1})^{-1} = \mathbf{g}$. Vskutku, ze vztahu $a^* \in \mathbf{g}a$ plyne $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ a odtud $a^* \in (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$, takže máme $\mathbf{g}a \subset (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$; naopak ze vztahu $a^* \in (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$ plyne $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ a odtud $a^* \in \mathbf{g}a$, takže platí $(\mathbf{g}^{-1})^{-1}a \subset \mathbf{g}a$. Vychází tedy $(\mathbf{g}^{-1})^{-1}a = \mathbf{g}a$ a tím je důkaz proveden.

Se zřetelem na tuto vlastnost inverzního zobrazení nazýváme obě *zobrazení* $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}$ *inverzní* a nerozlišujeme, které je inverzní vzhledem ke kterému.

Když je zobrazení $\mathbf{g}$ jednoznačné, je inverzní zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ zpravidla obecné. V tomto případě se množina obrazů $\mathbf{g}^{-1}a^* \subset G$ libovolného prvku $a^* \in \mathbf{g}G$ skládá ze všech bodů množiny G, které se funkcí $\mathbf{g}$ zobrazí na a^*; $\mathbf{g}^{-1}a^*$ je tedy prvkem rozkladu množiny G příslušného k zobrazení $\mathbf{g}$.

Na pojmu obecného zobrazení lze vybudovat obsáhlou teorii, která ovšem též zahrnuje poznatky o zobrazeních jednoznačných, jimiž jsme se zabývali výše. Z této teorie uvedeme zde několik drobností o skládání obecných zobrazení.

Pojem složeného zobrazení, který jsme v **6.7** zavedli pro jednoznačná zobrazení, se dá bezprostředně rozšířit na zobrazení obecná. Nechť G, H, K, značí neprázdné množiny, $\mathbf{g}$ obecné zobrazení množiny G do H a $\mathbf{h}$ obecné zobrazení množiny H do K. Pak se zobrazení $\mathbf{hg}$, složené z funkcí $\mathbf{g}$ a $\mathbf{h}$ (v tomto pořadí), definuje tak, že se ke každému prvku $a \in G$ přiřadí všechny $\mathbf{h}$-obrazy jednotlivých prvků ležících v množině

$\boldsymbol{g}a$. Zřejmě platí $\boldsymbol{hg}a \subset K$. Zejména se množina obrazů $\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{g}a$ libovolného prvku $a \in G$ skládá z prvků v G vyznačujících se tím, že alespoň jeden jejich $\boldsymbol{g}$-obraz leží v $\boldsymbol{g}a$.

Konečně poznamenejme, že pojem obecného zobrazení množiny G do množiny G^* lze zobecnit v tom směru, že se připustí existence prvků v množině G, k nimž není přiřazen žádný prvek v G^*. Takové obecné zobrazení se nazývá *relace množiny G do množiny G^**.

V dalších úvahách o obecných zobrazeních se omezíme na případ, že množiny G a G^* splývají a že jde o obecné zobrazení množiny G *na* sebe.

9.2. Kongruence

Obecné zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G na sebe se nazývá *kongruence na G*, když má tyto vlastnosti:

a) Pro $a \in G$ je $a \in \boldsymbol{g}a$;

b) když pro $a, b, c \in G$ platí $b \in \boldsymbol{g}a$, $c \in \boldsymbol{g}b$, pak je $c \in \boldsymbol{g}a$.

První vlastnost vyjadřujeme tím, že obecné zobrazení $\boldsymbol{g}$ je *reflexivní* a druhou, že je *tranzitivní*.

Kongruence na množině je tedy obecné zobrazení množiny na sebe vyznačující se tím, že je reflexivní a tranzitivní.

Předpokládejme, že $\boldsymbol{g}$ je kongruence.

Potom vztah $b \in \boldsymbol{g}a$ vyjadřujeme tím, že prvek b je kongruentní s prvkem a v kongruenci $\boldsymbol{g}$.

Snadno zjistíme, že inverzní obecné zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$ je rovněž kongruencí. Vskutku, zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$ je zřejmě reflexivní. Dále ze vztahů $b \in \boldsymbol{g}^{-1}a$, $c \in \boldsymbol{g}^{-1}b$ plyne $a \in \boldsymbol{g}b$, $b \in \boldsymbol{g}c$, tedy $a \in \boldsymbol{g}c$, a odtud vychází, že $c \in \boldsymbol{g}^{-1}a$, takže zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$ je i tranzitivní.

Kongruenci $\boldsymbol{g}^{-1}$ nazýváme ovšem *inverzní* vzhledem ke $\boldsymbol{g}$. Kongruence inverzní vzhledem ke $\boldsymbol{g}^{-1}$ je kongruence $\boldsymbol{g}$.

Např. když máme libovolné rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ na množině G a když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ přiřadíme všechny prvky rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\bar{B}$, máme kongruenci $\boldsymbol{g}$ na rozkladu $\bar{A}$, jak plyne z **3.1**a, b. V tomto případě je s prvkem $\bar{a}$ kongruentní každý prvek $\bar{b} \in \bar{A}$, který se dá spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\bar{B}$. V inverzní kongruenci $\boldsymbol{g}^{-1}$ jsou ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ přiřazeny všechny prvky rozkladu $\bar{A}$, s nimiž se prvek $\bar{a}$ dá spojit v rozkladu $\bar{B}$; podle **3.1**c soudíme, že jsou to právě prvky, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\bar{B}$. Odtud vychází, že v tomto zvláštním případě inverzní kongruence $\boldsymbol{g}^{-1}$ je táž jako $\boldsymbol{g}$, tj. $\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}$.

Jiné příklady kongruencí jsou tyto: Ke každému rozkladu $\bar{A}$ v množině G přiřadíme všechny jeho zákryty (zjemnění). Pokaždé máme kongruenci na množině všech rozkladů v množině G, jak plyne z **2.4**a, b. S rozkladem $\bar{A}$ je kongruentní každý rozklad množiny G, který je zákrytem (zjemněním) rozkladu $\bar{A}$. Obě kongruence jsou vzájemně inverzní.

Zvláště důležité jsou kongruence symetrické a antisymetrické.

9.3. Kongruence symetrické

Libovolná kongruence $\mathbf{g}$ na množině G se nazývá *symetrická*, když má tuto vlastnost:

$$(S) \quad \text{Když } b \in \mathbf{g}a, \text{ pak } a \in \mathbf{g}b\,.$$

Tato vlastnost vyjadřuje *symetrii* kongruence $\mathbf{g}$ v tom smyslu, že z každých dvou prvků v G buď žádný není nebo každý je v množině obrazů druhého. Když pak platí $b \in \mathbf{g}a$, píšeme $b \equiv a\ (\mathbf{g})$, stručněji $b \equiv a$. Máme pak ovšem také $a \equiv b$ a pravíme, že *prvky a, b jsou kongruentní.*

Např. kongruence na rozkladu $\bar{A}$, o níž byla řeč v prvním příkladě předcházejícího odstavce, je symetrická, jak plyne z **3.1**c.

Budiž $\mathbf{g}$ libovolná symetrická kongruence na množině G.

Důležitá vlastnost kongruence $\mathbf{g}$ je ta, že *systém všech podmnožin v G, z nichž každá se skládá ze všech prvků, které vesměs jsou kongruentní s některým prvkem množiny G, je rozklad množiny G.* O tomto rozkladu pravíme, že *přísluší* nebo *patří* ke kongruenci $\mathbf{g}$; jeho prvky se nazývají *třídy kongruence* $\mathbf{g}$.

Důkaz tohoto tvrzení je snadným zobecněním důkazu v odst. **3.4**, že systém $\bar{\bar{A}}$ všech podmnožin v rozkladu $\bar{A}$, o němž je tam řeč, je rozkladem na rozkladu $\bar{A}$; přenecháváme čtenáři, aby si toto zobecnění provedl.

Rovněž snadno vidíme, že *každé dva prvky v G, které leží v téže třídě kongruence $\mathbf{g}$, jsou kongruentní, kdežto žádné dva, které v téže třídě neleží, nejsou.* Libovolný výběr v rozkladu příslušném ke kongruenci $\mathbf{g}$, tj. podmnožina v G, mající s každým prvkem rozkladu společný právě jeden prvek množiny G, je tedy *systémem reprezentantů kongruence* $\mathbf{g}$ v tom smyslu, že každý prvek v G je kongruentní právě s jedním reprezentantem.

Naopak, *když je dán na množině G libovolný rozklad $\bar{A}$, existuje kongruence na množině G, k níž příslušný rozklad je $\bar{A}$.* Tato kongruence je definována tím, že s každým prvkem $a \in G$ je kongruentní každý prvek v G, který leží v témž prvku rozkladu $\bar{A}$ jako prvek a, kdežto jiné prvky v G s prvkem a kongruentní nejsou.

Mezi studiem symetrických kongruencí a studiem rozkladů množin není podstatný rozdíl.

Konečně ukážeme, že inverzní kongruence $\mathbf{g}^{-1}$ je táž jako $\mathbf{g}$, tj. $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$. Vskutku, ze vztahu $b \in \mathbf{g}^{-1}a$ plyne $a \in \mathbf{g}b$ a tedy, podle předpokladu S, je $b \in \mathbf{g}a$, takže máme $\mathbf{g}^{-1}a \subset \mathbf{g}a$; naopak ze vztahu $b \in \mathbf{g}a$ plyne podle předpokladu S, že

$a \in \mathbf{g}b$ a tedy také $b \in \mathbf{g}^{-1}a$, takže vychází $\mathbf{g}a \subset \mathbf{g}^{-1}a$. Máme tedy $\mathbf{g}^{-1}a = \mathbf{g}a$ a tím je důkaz proveden.

Poznamenejme, že každá kongruence na množině G, která se vyznačuje tím, že splývá se svou inverzní, je symetrická.

Podotkněme, že se symetrické kongruence nazývají také *ekvivalence*.

9.4. Kongruence antisymetrické

1. *Základní pojmy a vlastnosti.* Libovolná kongruence $\mathbf{g}$ na množině G se nazývá *antisymetrická,* když má tuto vlastnost:

(AS) Ze vztahů $b \in \mathbf{g}a$, $a \in \mathbf{g}b$ plyne $a = b$.

Tato vlastnost vyjadřuje *antisymetrii kongruence* $\mathbf{g}$ v tom smyslu, že z každých dvou různých prvků v G buď žádný není nebo právě jenom jeden je kongruentní s druhým. Když pak prvek b je kongruentní s prvkem a, tj. když $b \in \mathbf{g}a$, píšeme $a \leqq b\ (\mathbf{g})$ nebo $b \geqq a\ (\mathbf{g})$, stručněji $a \leqq b$ nebo $b \geqq a$.

Když je kongruence $\mathbf{g}$ *antisymetrická, pak kongruence inverzní* $\mathbf{g}^{-1}$ *je rovněž antisymetrická.* Ze vztahů $b \in \mathbf{g}^{-1}a$, $a \in \mathbf{g}^{-1}b$ následuje totiž $a \in \mathbf{g}b$, $b \in \mathbf{g}a$ a tedy, podle předpokladu AS, je $a = b$.

Např. obě kongruence na systému všech rozkladů v množině G, o nichž byla řeč na konci odst. **9.2**, jsou antisymetrické, jak plyne z **2.4**c; řekli jsme již, že každá z nich je inverzní vzhledem k druhé.

Podotkněme, že se antisymetrické kongruence nazývají také *částečná uspořádání*; vzájemně inverzní částečná uspořádání se nazývají také *duální.*

2. *Horní a dolní hranice dvou prvků.* Důležitými pojmy založenými na pojmu antisymetrické kongruence jsou pojmy horní a dolní hranice dvou prvků.

Nechť je na množině G dána antisymetrická kongruence $\mathbf{g}$.

Horní hranicí dvoučlenné posloupnosti prvků $a, b \in G$ *vzhledem ke kongruenci* $\mathbf{g}$, stručněji *horní hranicí prvků* $a, b \in G$, rozumíme prvek $c \in G$, který se vyznačuje tím, že $a \leqq c$, $b \leqq c$ a současně pro každý prvek $x \in G$ vyhovující vztahům $a \leqq x$, $b \leqq x$ platí $c \leqq x$. Horní hranice dvoučlenné posloupnosti prvků může být nejvýše jedna; neboť značí-li c, c' horní hranice, máme $c \leqq c'$ a současně $c' \leqq c$, a tedy $c = c'$, podle předpokladu AS. Horní hranice prvků a, b nemusí existovat; existuje-li, označujeme ji symbolem $a \cup b$

Obdobně definujeme *dolní hranici dvoučlenné posloupnosti prvků* $a, b \in G$ *vzhledem ke kongruenci* $\mathbf{g}$, stručněji *dolní hranici prvků* $a, b \in G$: Tímto názvem jmenujeme prvek $c \in G$, který se vyznačuje tím, že $c \leqq a$, $c \leqq b$ a současně pro každý prvek $x \in G$, vyhovující vztahům $x \leqq a$, $x \leqq b$, platí $x \leqq c$. Dolní hranice prvků a, b může být nejvýš jedna; existuje-li, označujeme ji symbolem $a \cap b$.

Porovnáme-li definice horní a dolní hranice, vidíme, že *horní* (*dolní*) *hranice* *dvou prvků v G vzhledem ke kongruenci* $\mathbf{g}$, *existuje-li, je jejich dolní (horní) hranicí vzhledem k inverzní kongruenci* $\mathbf{g}^{-1}$.

Přenecháváme čtenáři, aby se přesvědčil, že pro každé tři prvky $a, b, c \in G$ platí následující rovnosti, kdykoli existují příslušné horní a dolní hranice:

a) $a \cup b = b \cup a$, a′) $a \cap b = b \cap a$,

b) $a \cup a = a$, b′) $a \cap a = a$,

c) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$, c′) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$,

d) $a \cup (a \cap b) = a$, d′) $a \cap (a \cup b) = a$.

Vzhledem k tomu, že platí rovnosti a), a′), mluvíme obvykle o horní a dolní hranici dvou prvků, ale nerozlišujeme jejich uspořádání.

Abychom uvedli příklad horní a dolní hranice, všimněme si antisymetrické kongruence na systému všech rozkladů množiny G, v níž jsou ke každému rozkladu množiny G přiřazeny všechny jeho zákryty, popř. zjemnění. Každé dva rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ množiny G mají vzhledem k této kongruenci horní hranici $[\bar{A}, \bar{B}]$, popř. $(\bar{A}, \bar{B})$ a dolní hranici $(\bar{A}, \bar{B})$, popř. $[\bar{A}, \bar{B}]$.

9.5. Cvičení

1. Nechť je množina G zobrazena jednoznačnými funkcemi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ na množinu A popř. B a nechť se její rozklady patřící k těmto zobrazením sobě rovnají. Ukažte, že pak $\mathbf{f} = \mathbf{ba}^{-1}$ je jednoznačné a prosté zobrazení množiny A na B a $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{ab}^{-1}$ je k němu inverzní zobrazení množiny B na A. V tomto případě jsou tedy množiny A, B ekvivalentní.

2. Budiž n libovolné přirozené číslo. Když ke každému celému číslu a přiřadíme každé číslo $a + vn$, kde $v = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, obdržíme symetrickou kongruenci na množině všech celých čísel. Příslušný rozklad má n tříd; čísla $0, 1, \ldots n - 1$ tvoří systém reprezentantů této symetrické kongruence.

3. Když ke každému přirozenému číslu přiřadíme každý jeho přirozený násobek (každého jeho kladného dělitele), obdržíme antisymetrickou kongruenci na množině všech přirozených čísel. Každá dvě přirozená čísla mají vzhledem k této kongruenci horní hranici, kterou je jejich nejmenší společný násobek (největší společný dělitel), a dolní hranici, kterou je jejich největší společný dělitel (nejmenší společný násobek). Obě kongruence jsou vzájmně inverzní.

4. Když ke každé části množiny G přiřadíme každou její nadmnožinu (podmnožinu), obdržíme antisymetrickou kongruenci na množině všech částí množiny G. Každé dvě části množiny G mají vzhledem k této kongruenci horní hranici, kterou je jejich součet (průnik), a dolní hranici, kterou je jejich průnik (součet). Obě kongruence jsou vzájemně inverzní.

5. Když je $\mathbf{g}$ antisymetrická kongrence na G a některé prvky $a, b \in G$ mají horní hranici $a \cup b$, platí tyto vztahy:

a) $\mathbf{g}(a \cup b) = \mathbf{g}a \cap \mathbf{g}b$ (pravá strana značí ovšem průnik množin $\mathbf{g}a$, $\mathbf{g}b$),

b) $\mathbf{g}^{-1}(a \cup b) \supset \mathbf{g}^{-1}a \cup \mathbf{g}^{-1}b$.