Základy teorie grupoidů a grup

4. Speciální rozklady

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 35--40.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401431

4. Speciální rozklady

V této kapitole se budeme zabývat situacemi, které jsou vytvořeny rozklady v množině nebo na množině G a mají speciální vzájemné vztahy.

4.1. Polospřažené (volně spřažené) a spřažené rozklady

Nechť $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou rozklady v G.

Definice. Rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ se nazývají *polospřažené* nebo též *volně spřažené*, když každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{C}$ a současně každý prvek $\bar{c} \in \bar{C}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{A}$ a když alespoň pro jednu dvojici prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ incidence skutečně nastane. Když jsou rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ polospřažené, nazýváme rozklad $\bar{A}$ ($\bar{C}$) polospřažený nebo též volně spřažený s rozkladem $\bar{C}$ ($\bar{A}$).

Rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ se nazývají *spřažené*, když je každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ incidentní právě s jedním prvkem v $\bar{C}$ a současně každý prvek $\bar{c} \in \bar{C}$ je incidentní právě s jedním prvkem v $\bar{A}$. Když rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou spřažené, nazýváme rozklad $\bar{A}$ ($\bar{C}$) spřažený s rozkladem $\bar{C}$ ($\bar{A}$).

Vidíme, že dva spřažené rozklady v G jsou vždy polospřažené.

Jako příklad spřažených rozkladů uveďme např. tento: Když podmnožina $X \subset G$ a rozklad $\bar{Y}$ v G jsou ve vztahu $X \cap \mathbf{s}\bar{Y} \neq \emptyset$, pak obal $X \sqsubset \bar{Y}$ a průsek $\bar{Y} \sqcap X$ jsou spřažené rozklady.

Přistoupíme nyní k popisu vlastností polospřažených a spřažených rozkladů.

Především poznamenejme toto: Když jsou rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ polospřažené, je $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$; pak totiž nastává alespoň pro jednu dvojici prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ incidence, takže $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \supset \bar{a} \cap \bar{c} \neq \emptyset$. Kvůli jednoduchosti označení klademe $\mathbf{s}\bar{A} = A$, $\mathbf{s}\bar{C} = C$, takže $A \cap C \neq \emptyset$.

Rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou polospřažené právě tehdy, když se průseky $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$ rovnají, tedy $\bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A$.

Důkaz: a) Předpokládejme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou polospřažené. Pak především vzhledem ke vztahu $A \cap C \neq \emptyset$ máme: $\bar{A} \sqcap C \neq \emptyset \neq \bar{C} \sqcap A$. Všimněme si libovolného prvku $\bar{a}' = \bar{A} \sqcap C$; zřejmě je $\bar{a}' = \bar{a} \cap C$, přičemž $\bar{a}$ je jistý prvek v $\bar{A}$. Vzhledem k tomu, že $\bar{a}' \subset C$, je prvek $\bar{a}$ incidentní alespoň s jedním a tedy, podle předpokladu, právě s jedním prvkem $\bar{c} \in \bar{C}$; $\bar{a}$ je zřejmě jediný prvek v $\bar{A}$, který je incidentní s $\bar{c}$. Vidíme, že platí vztahy: $\bar{a}' = \bar{a} \cap \bar{c} = \bar{c} \cap A \in \bar{C} \sqcap A$. Tím jsme zjistili platnost relace $\bar{A} \sqcap C \subset \bar{C} \sqcap A$. Zřejmě současně platí vztah $\supset$, a tedy rovnost obou rozkladů.

b) Nechť $\bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A$. Budiž $\bar{a} \in \bar{A}$ libovolný prvek. Tento prvek $\bar{a}$ buď není incidentní s žádným prvkem v $\bar{C}$ nebo je incidentní alespoň s jedním. Je-li incidentní s prvky $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$, máme: $\bar{a} \cap (\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2) \subset \bar{a} \cap C \in \bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A$, a tedy existuje prvek $\bar{c} \in \bar{C}$, pro nějž platí $\bar{a} \cap (\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2) = A \cap \bar{c}$. Odtud plyne, vzhledem k tomu, že dva různé prvky rozkladu $\bar{C}$ jsou disjunktní, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \bar{c}$. Tím je ukázáno, že každý prvek v $\bar{A}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{C}$. Zřejmě též platí, že každý prvek v $\bar{C}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{A}$. Z relace $A \cap C \neq \emptyset$ vidíme, že alespoň pro jednu dvojici prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ incidence skutečně nastane. Tím je důkaz ukončen.

Rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou polospřažené právě tehdy, když obaly $(\mathrm{H}\bar{A} =)\ \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $(\mathrm{H}\bar{C} =)\ \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ *jsou spřažené.*

Důkaz. a) Předpokládejme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou polospřažené. Pak vzhledem k $A \cap C \neq \emptyset$ především máme: $\mathrm{H}\bar{A} \neq \emptyset \neq \mathrm{H}\bar{C}$. Všimněme si některého prvku, např. $\bar{a} \in \mathrm{H}\bar{A}$. Tento prvek je incidentní alespoň s jedním a tedy, vzhledem k hořejšímu předpokladu, právě s jedním prvkem $\bar{c} \in \bar{C}$. Prvek $\bar{c}$ náleží zřejmě do obalu $\mathrm{H}\bar{C}$, tedy $\bar{c} \in \mathrm{H}\bar{C}$, a je v něm jediným prvkem, který je incidentní s $\bar{a}$. Vidíme, že každý prvek v $\mathrm{H}\bar{A}$ je incidentní právě s jedním prvkem v $\mathrm{H}\bar{C}$. Zřejmě je též každý prvek v $\mathrm{H}\bar{C}$ incidentní právě s jedním prvkem v $\mathrm{H}\bar{A}$. Tím jsme ukázali, že obaly $\mathrm{H}\bar{A}$, $\mathrm{H}\bar{C}$ jsou spřažené.

b) Nechť obaly $\mathrm{H}\bar{A}$, $\mathrm{H}\bar{C}$ jsou spřažené. Pak libovolný prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ buď není incidentní se žádným prvkem v $\bar{C}$ nebo je incidentní alespoň s jedním. V druhém případě prvek $\bar{a}$ náleží do obalu $\mathrm{H}\bar{A}$ a tedy, vzhledem k hořejšímu předpokladu, je incidentní právě s jedním prvkem $\bar{c} \in \mathrm{H}\bar{C}$. Mimo prvky obalu $\mathrm{H}\bar{C}$ zřejmě není žádný prvek v $\bar{C}$ incidentní s $\bar{a}$. Vidíme, že každý prvek v $\bar{A}$ je incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{C}$. Z obdobných důvodů je též každý prvek v $\bar{C}$ incidentní nejvýš s jedním prvkem v $\bar{A}$. Tím je zjištěno, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou polospřažené a důkaz je ukončen.

Rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou spřažené právě tehdy, když současně platí

$$(1) \qquad \bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A\,,$$

$$(2) \qquad A = \mathbf{s}(C \sqcap \bar{A})\,, \quad C = \mathbf{s}(A \sqcap \bar{C})\,.$$

Důkaz. a) Předpokládejme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou spřažené. Pak každý prvek v $\bar{A}$ ($\bar{C}$) je incidentní nejvýš s jedním a současně alespoň s jedním prvkem v $\bar{C}$ ($\bar{A}$). V důsledku toho platí podle hořejšího výsledku rovnost (1) a současně, podle **2.6.**6, první (druhá) rovnost (2).

b) Nechť platí rovnosti (1), (2). Použijeme-li týchž vět jako v a), zjistíme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou spřažené.

Když rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou spřažené, je každý prvek v $\bar{A}$ nebo $\bar{C}$ incidentní alespoň (a současně nejvýš) s jedním prvkem v $\bar{C}$ popř. $\bar{A}$. V důsledku toho platí rovnosti $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ (**2.6.**6).

V dalším výkladu předpokládáme platnost těchto rovností: $\bar{A} = \bar{C} \sqcap \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$; pak je ovšem též splněn náš předpoklad $A \cap C \neq \emptyset$.

Budiž $\bar{B}$ libovolný společný zákryt rozkladů $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$ množiny $A \cap C$. Pomocí rozkladu $\bar{B}$ definujeme především rozklad $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$) na rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{C}$) takto: Každý prvek rozkladu $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$) se skládá ze všech prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ ($\bar{c} \in \bar{C}$), které jsou incidentní vždy s jedním prvkem v $\bar{B}$. Dále pomocí rozkladu $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$) definujeme rozklad $\mathring{A}$ ($\mathring{C}$) v G tímto předpisem: $\mathring{A}$ ($\mathring{C}$) je zákryt rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{C}$) vynucený rozkladem $\bar{\bar{A}}$ ($\bar{\bar{C}}$). Podle toho je tedy $\bigcup \bar{a} \in \mathring{A}$ ($\bigcup \bar{c} \in \mathring{C}$) právě tehdy, když platí $\bigcup(\bar{a} \cap C) \in \bar{B}$, ($\bigcup(\bar{c} \cap A) \in \bar{B}$).

Tímto způsobem jsme pomocí rozkladu $\bar{B}$ ležícího na množině $\bar{A}$ ($\bar{C}$) konstruovali jisté zákryty $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$. O zákrytech $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ pravíme, že jsou *vynuceny* společným zákrytem $\bar{B}$ rozkladů $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$. Zdůrazňujeme, že se zmíněná konstrukce zakládá na platnosti vztahů $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$.

Zřejmě platí tyto rovnosti: $\mathbf{s}\mathring{A} = \mathbf{s}\bar{A}$ $(= A)$, $\mathbf{s}\mathring{C} = \mathbf{s}\bar{C}$ $(= C)$.

Nyní dokážeme, že *rozklady $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ jsou spřažené a sečou se v rozkladu $\bar{B}$, takže* $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$.

Důkaz. Z rovnosti $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$ plyne $\mathring{A} = \mathring{C} \sqsubset \mathring{A}$ a podobně $\mathring{C} = \mathring{A} \sqsubset \mathring{C}$. K důkazu stačí zjistit, že platí:

$$\mathring{A} \sqcap C = \mathring{C} \sqcap A = \bar{B}\,.$$

Vskutku, jsou-li tyto rovnosti splněny, pak podle hořejšího výsledku jsou rozklady $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ spřažené a s ohledem na **2.3** máme: $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = (\mathring{A} \sqcap C) \sqcap (\mathring{C} \sqcap A) = \bar{B} \sqcap \bar{B} = \bar{B}$.

Nuže, ke každému prvku $\mathring{a}' \in \mathring{A} \sqcap C$ existují prvky $\mathring{a} = \bigcup \bar{a}$, $\mathring{a} \in \mathring{A}$, $\bar{a} \in \bar{A}$, takové, že $\mathring{a}' = \mathring{a} \cap C = (\bigcup \bar{a}) \cap C = \bigcup(\bar{a} \cap C) \in \bar{B}$. Z těchto rovností plyne $\mathring{A} \sqcap C \subset \bar{B}$. Naopak má každý prvek $\bar{b} \in \bar{B}$ tvar: $\bar{b} = \bigcup(\bar{a} \cap C)$, přičemž je $\bar{a} \in \bar{A}$, $\mathring{a} = \bigcup \bar{a} \in \mathring{A}$, a platí $\bar{b} = \bigcup(\bar{a} \cap C) = (\bigcup \bar{a}) \cap C = \mathring{a} \cap C \in \mathring{A} \sqcap C$. Odtud plyne $\bar{B} \subset \mathring{A} \sqcap C$. Máme tedy $\mathring{A} \sqcap C = \bar{B}$ a z obdobných důvodů též $\mathring{C} \sqcap A = \bar{B}$.

4.2. Adjungované rozklady

Nechť $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou rozklady a B, D podmnožiny v G. Předpokládáme, že $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$ a $B \cap D \neq \emptyset$. Opět použijeme označení: $A = \mathbf{s}\bar{A}$, $C = \mathbf{s}\bar{C}$.

Z předpokladů plyne $B \in D \sqsubset \bar{A}$, $D \in B \sqsubset \bar{C}$ a vzhledem ke vztahům $B \subset A$ $D \subset C$ máme: $\emptyset \neq B \cap D \subset (B \cap C), (D \cap A)$. Odtud soudíme (**2.6.5**), že

$$D \sqsubset \bar{A} \sqcap C\,, \quad B \sqsubset \bar{C} \sqcap A$$

jsou rozklady v G.

Když platí rovnost:

$$\mathbf{s}(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = \mathbf{s}(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A) \tag{1}$$

pravíme, že *rozklady* $\bar{A}$, $\bar{C}$ *jsou adjungované vzhledem k množinám* B, D; říkáme též, že *rozklad* $\bar{A}$ $(\bar{C})$ *je adjungovaný k rozkladu* $\bar{C}$ (A) *vzhledem k* B, D.

S ohledem na rovnosti $D \sqsubset \bar{A} \sqcap C = (D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C)$, $B \sqsubset \bar{C} \sqcap A = (B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqcap A)$ můžeme vzorec (1) nahradit tímto:

$$(1') \qquad \mathbf{s}((D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C)) = \mathbf{s}((B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqcap A)).$$

Např. jsou rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ adjungované vzhledem k B, D tehdy, když $\bar{A}$ je největší nebo nejmenší rozklad na A.

V dalším výkladu předpokládáme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ *jsou vzhledem k* B, D *adjungované.* Pak

$$\bar{A}_1 = C \sqsubset \bar{A}, \quad \bar{A}_2 = D \sqsubset \bar{A},$$
$$\bar{C}_1 = A \sqsubset \bar{C}, \quad \bar{C}_2 = B \sqsubset \bar{C}$$

jsou rozklady v G. Označíme $A_1 = \mathbf{s}\bar{A}_1$, $A_2 = \mathbf{s}\bar{A}_2$, $C_1 = \mathbf{s}\bar{C}_1$, $C_2 = \mathbf{s}\bar{C}_2$, načež máme:

$$\bar{A} \supset \bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \{B\}, \quad A \supset A_1 \supset A_2 \supset B,$$
$$\bar{C} \supset \bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \{B\}, \quad C \supset C_1 \supset C_2 \supset D.$$

Ukážeme, že *existují spřažené zákryty* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ *rozkladů* $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$ *takové, že* $A_2 \in \mathring{A}$, $C_2 \in \mathring{C}$. Tyto zákryty jsou určeny konstrukcí popsanou v části a) následujícího důkazu. *Množiny* A_2, C_2 *jsou incidentní.*

Důkaz. a) Každý prvek v $\bar{A}_1$ $(\bar{C}_1)$ leží v $\bar{A}$ $(\bar{C})$ a je incidentní s C (A), a tedy též s některým prvkem rozkladu $\bar{C}$ $(\bar{A})$ incidentním s A (C); tento prvek v $\bar{C}$ $(\bar{A})$ je ovšem obsažen v $\bar{C}_1$ $(\bar{A}_1)$. Platí tedy

$$\bar{A}_1 = \bar{C}_1 \sqsubset \bar{A}_1, \quad \bar{C}_1 = \bar{A}_1 \sqsubset \bar{C}_1.$$

Rovněž snadno seznáme, že $A_1 \cap C_1 = A \cap C$. Vidíme, že $A_1 \sqcap \bar{C}_1$, $C_1 \sqcap \bar{A}_1$ jsou rozklady na množině $A \cap C$. Budiž $\bar{U}$ jejich nejmenší společný zákryt, tedy $\bar{U} = [A_1 \sqcap \bar{C}_1, C_1 \sqcap \bar{A}_1]$. *Rozklady* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$, *o něž jde, definujeme jako zákryty rozkladů* $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$ *vynucené rozkladem* $\bar{U}$. Máme tedy $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{U}$ a každý prvek v $\mathring{A}$ $(\mathring{C})$ je součtem všech prvků v $\bar{A}_1$ $(\bar{C}_1)$, které jsou incidentní vždy s jedním prvkem rozkladu $\bar{U}$.

b) Ukážeme, že je $A_2 \in \mathring{A}$, a $C_2 \in \mathring{C}$. Vskutku, vzhledem k předpokladu $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$ máme

$$C \cap B \in C \sqcap \bar{A}, \quad A \cap D \in A \sqcap \bar{C}$$

a protože rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ jsou adjungované vzhledem k B, D, platí (1'). Máme tedy, podle **3.7.1**, $\bar{u} \in \bar{U}$, přičemž $\bar{u}$ je množina vystupující na obou stranách rovnosti (1'). Jednotlivé prvky v $\mathring{A}$ $(\mathring{C})$ jsou součtem všech prvků v $\bar{A}_1$ $(\bar{C}_1)$, které jsou incidentní vždy s jedním prvkem v rozkladu $\bar{U}$. Abychom zjistili platnost vztahu $A_2 \in \mathring{A}$ $(C_2 \in \mathring{C})$, stačí ukázat, že A_2 (C_2) je součet všech prvků v $\bar{A}_1$ $(\bar{C}_1)$ incidentních s $\bar{u}$.

Nuže, především vidíme, že platí rovnosti

$$\bar{u} = \mathbf{s}(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = \mathbf{s}(\bar{A}_2 \sqcap C) = A_2 \cap C.$$

Libovolný prvek v $\bar{A}_1$ leží též v rozkladu $\bar{A}$ a je incidentní s množinou C; leží současně v rozkladu $\bar{A}_2$ právě tehdy, když je incidentní nejenom s množinou C, ale i s množinou D a tedy též s množinou $A_2 \cap C = \bar{u}$. S touto množinou $\bar{u}$ jsou tedy incidentní právě ony prvky rozkladu $\bar{A}_1$, které leží v $\bar{A}_2$; jejich součet je tedy A_2. Podobně z rovností

$$\bar{u} = \mathbf{s}(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A) = \mathbf{s}(\bar{C}_2 \sqcap A) = C_2 \cap A$$

vyplývá, že součet prvků rozkladu $\bar{C}_1$, které jsou incidentní s $\bar{u}$, je množina C_2.

c) Ze vztahů $\emptyset \neq B \cap D \subset A_2 \cap C_2$ následuje $A_2 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Pojem adjungovaných rozkladů se dá rozšířit na adjungované řetězce rozkladů. Nechť $(\emptyset \neq)$ $B \subset A \subset G$, $(\emptyset \neq)$ $D \subset C \subset G$ a nechť

$$([\bar{K}] =) \quad \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha\,,$$
$$([\bar{L}] =) \quad \bar{L}_1 \to \ldots \to \bar{L}_\beta$$

jsou řetězce rozkladů v G od A do B a od C do D.

Řetězce $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ se nazývají *adjungované*, když: 1) jejich konce splývají, tedy $A = C$, $B = D$; 2) každé dva členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ jsou adjungované vzhledem k množinám $\mathbf{s}\bar{K}_{\gamma+1}$, $\mathbf{s}\bar{L}_{\delta+1}$; přitom je $\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$, a $\mathbf{s}\bar{K}_{\alpha+1} = B$, $\mathbf{s}\bar{L}_{\beta+1} = D$.

4.3. Modulární rozklady

V této kapitole se budeme zabývat speciálními rozklady ležícími na množině G. Nechť $\bar{X}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou rozklady na množině G a nechť je $\bar{X} \geqq \bar{A}$.

Čtenář si zajisté všiml toho (viz **3.7.2**,3), že rozklad $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])$ je zákrytem rozkladu $[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$, ale tyto dva rozklady nejsou nutně rovné.

Když jsou si rovné, když tedy platí vztah

$$[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})] = (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])\,,$$

nazýváme rozklad $\bar{B}$ *modulární vzhledem k rozkladům* $\bar{X}$, $\bar{A}$ (v tomto pořadí). Např. v případě $\bar{X} = \bar{A}$ nebo $\bar{X} = \bar{G}_{\max}$ je rozklad $\bar{B}$ modulární vzhledem k $\bar{X}$, $\bar{A}$.

Nechť jsou nyní $\bar{X}$, $\bar{Y}$ a $\bar{A}$, $\bar{B}$ rozklady na G a vyznačují se tím, že $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$, a nechť je rozklad $\bar{B}$ modulární vzhledem k $\bar{X}$, $\bar{A}$, a současně rozklad $\bar{A}$ je modulární vzhledem k $\bar{Y}$, $\bar{B}$.

Pak platí rovnosti

$$(\mathring{A} =) \quad [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})] = (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])\,,$$
$$(\mathring{B} =) \quad [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})] = (\bar{Y}, [\bar{B}, \bar{A}])\,,$$

přičemž jsme označili rozklad vystupující na obou stranách prvního (druhého) vzorce symbolem $\mathring{A}$ ($\mathring{B}$).

Především vidíme, že platí

$$\bar{X} \geqq \mathring{A} \geqq \bar{A}\,, \quad \bar{Y} \geqq \mathring{B} \geqq \bar{B}\,,$$

takže rozklady $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ interpolují rozklady $\bar{X}$, $\bar{A}$, popř. $\bar{Y}$, $\bar{B}$ ve smyslu těchto vzorců.

Dále platí tyto rovnosti:

(1) $[\mathring{A}, \mathring{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$, $[\bar{X}, \mathring{B}] = [\bar{X}, \bar{B}]$, $[\bar{Y}, \mathring{A}] = [\bar{Y}, \bar{A}]$,

(2) $(\mathring{A}, \mathring{B}) = (\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A}) = ((\bar{X}, \bar{Y}), [\bar{A}, \bar{B}])$.

Tyto vztahy se snadno odvodí z vlastností nejmenšího společného zákrytu a největšího společného zjemnění dvou rozkladů. Např. první vzorec s pomocí vztahů $(\bar{X}, \bar{B}) \leqq \bar{B} \leqq [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]$, $(\bar{Y}, \bar{A}) \leqq \bar{A} \leqq [\bar{A}, \bar{B}]$ takto:

$$[\mathring{A}, \mathring{B}] = [[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})], [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [\bar{A}, [(\bar{X}, \bar{B}), [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]]] =$$
$$= [\bar{A}, [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [[\bar{A}, \bar{B}], (\bar{Y}, \bar{A})] = [\bar{A}, \bar{B}]\,,$$

a podobně vzorce ostatní.

Předcházející vlastnosti modulárních rozkladů mají charakter „ve velkém" (neboli globální) v tom smyslu, že se týkají rozkladů jako celků bez zřetele k jednotlivým prvkům těchto rozkladů. Pro naše účely je důležitá vedle uvedených globálních vlastností tato „lokální" vlastnost modulárních rozkladů:

Pro každé dva incidentní prvky $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ jsou obaly $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ spřažené.

Důkaz. Buďte $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ libovolné incidentní prvky. Vezměme v úvahu libovolný prvek $\mathring{a} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$ a ukažme, že je incidentní právě s jedním prvkem $\mathring{b} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$. Nuže, poněvadž prvek $\mathring{a} \in \mathring{A}$ je incidentní s množinou $\bar{x} \cap \bar{y}$ a podle předpokladu je $\bar{X} \geqq \mathring{A}$, máme: $\mathring{a} \subset \bar{x}$, $\bar{y} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Odtud zejména plyne, že $\bar{y} \cap \mathring{a}$ je prvkem rozkladu $(\bar{Y}, \mathring{A})$. Ze vzorce $(\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A})$ soudíme na existenci prvku $\mathring{b} \in \mathring{B}$ vyznačujícího se tím, že $\bar{x} \cap \mathring{b} = \bar{y} \cap \mathring{a}$. Vidíme, že prvek $\mathring{b}$ je incidentní s $\mathring{a}$, takže $\mathring{b} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Protože prvek $\mathring{b}$ je současně incidentní s množinou $\bar{x} \cap \bar{y}$, máme $\mathring{b} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$. Tím je zjištěno, že prvek $\mathring{a}$ je incidentní alespoň s prvkem $\mathring{b}$ obalu $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$. Avšak v tomto obalu žádné další prvky incidentní s prvkem $\mathring{a}$ nejsou, neboť každý takový prvek tvoří část prvku $\bar{y}$, je incidentní s množinou $\bar{y} \cap \mathring{a} = \bar{x} \cap \mathring{b}$, a tudíž splývá s $\mathring{b}$. Z obdobných důvodů je též každý prvek v $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ incidentní právě s jedním prvkem druhého obalu a tím je důkaz ukončen.

4.4. Cvičení

1. Dva konečné spřažené rozklady mají týž počet prvků.

2. V souvislosti s poslední větou v odst. **4.3** ukažte, že platí tyto vzorce:

$$((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) \sqcap \mathbf{s}((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}) = ((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}) \sqcap \mathbf{s}((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) = (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqcap [\bar{A}, \bar{B}]\,.$$