13.4. Cvičení.

13.4.1. V grupě $\mathfrak{S}_4$ skládající se ze všech permutací prvků a, b, c, d, tvoří všechny permutace, které zobrazují prvek d na sebe, podgrupu $\mathfrak{S}'_3$. Permutace, které zobrazují prvky a, b, c jako permutace $\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ v odst. **5.4.2** a prvek d nechávají beze změny, tvoří podgrupu v $\mathfrak{S}_4$, která jest invariantní v $\mathfrak{S}'_3$, ale není invariantní v $\mathfrak{S}_4$.

13.4.2. Nechť $\mathfrak{A}$ jest libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Množina všech prvků $a \in \mathfrak{G}$ takových, že $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, tvoří podgrupu $\mathfrak{N}$ na $\mathfrak{A}$, t. zv. *normalisátor podgrupy* $\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{N}$ a každá podgrupa v $\mathfrak{G}$, v níž jest $\mathfrak{A}$ invariantní, je podgrupou v $\mathfrak{N}$.

13.4.3. Centrum grupy $\mathfrak{G}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$.

13.4.4. Když v nějaké konečné grupě řádu N ($\geqq 2$) existuje podgrupa řádu $\frac{1}{2}N$, pak tato podgrupa je v ní invariantní. Na př. v diedrické permutační grupě, řádu $2n$ ($n \geq 3$) máme invariantní podgrupu řádu n, která se skládá ze všech prvků grupy, odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu (viz cvič. **11.7.2**).

13.4.5. Když ke každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ přiřadíme každý prvek $x^{-1}ax \in \mathfrak{G}$, při čemž $x \in \mathfrak{G}$ značí libovolný prvek, obdržíme symetrickou kongruenci na $\mathfrak{G}$. Rozklad příslušný k této kongruenci je t. zv. *hlavní rozklad grupy* $\mathfrak{G}$. Pole každé invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ je součtem některých prvků hlavního rozkladu. Hlavní rozklad je doplňkový ke každému vytvořujícímu rozkladu grupy $\mathfrak{G}$.

14. O FAKTOROVÝCH GRUPÁCH.

14.1. Definice.

Uvažujme nyní o libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$. Podle definice faktoroidu je pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ jistý vytvořující rozklad grupy $\mathfrak{G}$ a je tedy vytvořen, podle věty v odst. **13.3.2**, jistou podgrupou $\mathfrak{A}$, která jest invariantní v $\mathfrak{G}$. Podle definice násobení faktoroidu je součin $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A}$ libovolného prvku $a\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ s libovolným prvkem $b\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje množinu $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A}$; protože tato množina splývá, jak jsme viděli, s prvkem $ab\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$, máme pro násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ tento vzorec: $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$.

Nyní ukážeme, že *faktoroid* $\overline{\mathfrak{G}}$ je *grupa, v níž jednotkou je pole invariantní podgrupy* $\mathfrak{A}$ *a prvek inversní vzhledem k libovolnému prvku* $a\mathfrak{A}$ *jest* $a^{-1}\mathfrak{A}$. Skutečně, především podle cvič. **8.8.4** je $\overline{\mathfrak{G}}$ grupoid asociativní. Dále, podle cvič. **10.7.5**, je pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ jednotkou grupoidu $\overline{\mathfrak{G}}$. Konečně máme tyto rovnosti:

$$a\mathfrak{A} \cdot a^{-1}\mathfrak{A} = aa^{-1}\mathfrak{A} = \underline{1}\mathfrak{A} = A,$$

a z nich vidíme, že $a^{-1}\mathfrak{A}$ jest inversní prvek vzhledem k prvku $a\mathfrak{A}$.

Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$ je tedy grupou a jest jednoznačně určen jistou podgrupou $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, a to tím způsobem, že pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ je rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ nazýváme *faktorová grupa* neboli *grupa tříd* a pravíme, že je *vytvořena invariantní podgrupou* $\mathfrak{A}$; označujeme ji symbolem $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

14.2. Faktoroidy na grupě.

Na základě výsledku v odst. **13.3.2** máme tento přehled o všech možných faktoroidech na libovolné grupě $\mathfrak{G}$: *Všechny faktoroidy grupy* $\mathfrak{G}$ *jsou právě jenom faktorové grupy na* $\mathfrak{G}$ *vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v* $\mathfrak{G}$.

Všimněme si, že *největším (nejmenším) faktoroidem na grupě* $\mathfrak{G}$ *je t. zv. největší (nejmenší) faktorová grupa* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{E})$; *je vytvořena největší (nejmenší) invariantní podgrupou v* $\mathfrak{G}$, *t. j. podgrupou* $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{E})$.

14.3. Vlastnosti faktorových grup.

Vlastnosti faktorových grup plynou z vlastností vytvořujících rozkladů grupy (**13.3.3**). Nechť $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ jsou libovolné faktorové grupy na grupě $\mathfrak{G}$.

14.3.1. *Faktorová grupa* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *je zákrytem (zjemněním) faktorové grupy* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ *tehdy a jen tehdy, když* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

14.3.2. *Nejmenší společný zákryt* $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}]$ *faktorových grup* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *je faktorová grupa* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

14.3.3. *Největší společné zjemnění* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *faktorových grup* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *je faktorová grupa* $\mathfrak{G}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

14.3.4. *Faktorové grupy* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *jsou doplňkové.*

14.3.5. *V každé grupě je systém všech faktorových grup spolu s násobeními, v nichž je ke každé uspořádané dvojici faktorových grup přiřazen jednou jejich nejmenší společný zákryt a po druhé největší společné zjemnění, Dedekindovým svazem s krajními prvky; těmito prvky jsou největší a nejmenší faktorová grupa.*

14.4. Obal a průsek podgrupy s faktorovou grupou.

14.4.1. Nechť nyní $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v $\mathfrak{G}$ a předpokládáme že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a že je zaměnitelná s $\mathfrak{C}$. Pak $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$ a $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$ jsou faktoroidy v $\mathfrak{G}$. Ze vzorců (1) a (2) v odst. 12.4.1 vidíme, že faktoroid $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$ leží na podgrupě $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a faktoroid $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$ na podgrupě $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$; prvkem prvního faktoroidu obsahujícím jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ je zřejmě pole podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvkem druhého faktoroidu obsahujícím $\underline{1}$ je pole podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$. Odtud plyne, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupou v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupou v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, a máme vzorce

$$\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}, \qquad (\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

14.4.2. Když podgrupa $\mathfrak{B}$ splývá s grupou $\mathfrak{G}$, pak podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$ a je tedy zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$; kromě toho máme $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Když tedy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak podgrupa $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{C}$, a máme vzorce

$$\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}, \qquad (\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

14.5. Zákryt faktorové grupy.

Tuto kapitolu ukončíme úvahou o zákrytu faktorové grupy vynuceném opět nějakou faktorovou grupou.

Nechť $\mathfrak{B}$ značí libovolnou invariantní podgrupu v grupě $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ libovolnou invariantní podgrupu ve faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Prvky podgrupy $\mathfrak{B}_1$ jsou tedy třídy vzhledem k invariantní podgrupě $\mathfrak{B}$ a mezi těmito prvky je pole B invariantní podgrupy $\mathfrak{B}$, neboť B je, jak víme, jednotkou faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ a je tedy prvkem každé podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Součet všech prvků podgrupy $\mathfrak{B}_1$ je tedy jistá nadmnožina A na B, která obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, tedy $\underline{1} \in B \subset A$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ vytvořuje na $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ faktorovou grupu $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ a jak víme z odst.

8.5.3 vynucuje tato faktorová grupa jistý zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Připomeňme si, že $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktoroid na grupě $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek je součtem všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, které jsou obsaženy vždy v témže prvku faktorové grupy $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$. Zejména je tedy množina A prvkem faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, a protože obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, je podle úvahy v odst. **13.3.2** polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{B}$ jest invariantní v $\mathfrak{A}$, neboť má tuto vlastnost dokonce v $\mathfrak{G}$, a je zřejmé, že platí rovnost $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Došli jsme k tomuto výsledku:

Zákryt faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynucený faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, při čemž pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ je součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, z nichž se skládá invariantní podgrupa $\mathfrak{B}_1$ v $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

14.6. Cvičení.

14.6.1. Řád faktorové grupy na libovolné konečné grupě řádu N jest dělitelem čísla N.

14.6.2. V úplné grupě euklidovských pohybů na přímce nebo v rovině jest ona podgrupa, která se skládá ze všech euklidovských pohybů $\mathbf{f}[a]$ nebo $\mathbf{f}[\alpha; a, b]$ invariantní (viz cvič. **11.7.1**). Příslušná faktorová grupa má právě dva prvky; jeden se skládá ze všech euklidovských pohybů $\mathbf{f}[a]$ nebo $\mathbf{f}[\alpha; a, b]$, druhý pak z $\mathbf{g}[a]$ nebo $\mathbf{g}[\alpha; a, b]$.

15. DEFORMACE A VĚTY O ISOMORFISMU GRUP.

15.1. Deformace grup.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\mathbf{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Když jeden z grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ je grupa, co se dá říci o druhém?

15.1.1. *Deformace grupy na grupoid.*

Když $\mathfrak{G}$ je grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ je grupa. Mimo to obraz v $\mathbf{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}$ jest jednotka grupy $\mathfrak{G}^*$ a obraz prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ je prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a.