Poznámka. Když $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou zaměnitelné podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, nazývá se podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k součinu jejich polí, *součin podgrupoidů* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Označuje se $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

6.9.9. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak množina všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou zaměnitelné s každým prvkem v $\mathfrak{G}$, je grupoidní, není-li prázdná. — *Poznámka*: Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *centrum grupoidu* $\mathfrak{G}$.

6.9.10. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a násobení je definováno takto: Součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je nejmenší společný násobek, příp. největší společný dělitel, čísel a a b. Ukažte, že v obou případech grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský a asociativní.

7. O DEFORMACI GRUPOIDŮ.

7.1. Definice.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili (v odst. 6.2), rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G^* grupoidu $\mathfrak{G}^*$, a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly, které jsme popsali (v kap. 3) při studiu zobrazení množin. Podle této definice týká se tedy pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem míti nějaký vztah k násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^*$. Pro theorii grupoidů jsou nejdůležitější t. zv. *homomorfní zobrazení,* která, stručně řečeno, jsou charakterisována tím, že zachovávají násobení v obou grupoidech. Podrobná definice je tato:

Libovolné zobrazení $\mathbf{d}$ *grupoidu* $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$ *se nazývá homomorfní, když součin ab libovolného prvku* $a \in \mathfrak{G}$ *s libovolným prvkem* $b \in \mathfrak{G}$ *je zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení* $\mathbf{d}$, t. j. *když pro* $a, b \in \mathfrak{G}$ *platí rovnost* $\mathbf{d}ab = \mathbf{d}a . \mathbf{d}b$.

Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *homomorfismus.* Název homomorfní zobrazení je v literatuře ustálen, ale je dlouhý, a proto budeme zpravidla místo něho používati názvu *deformace.*

Již při studiu zobrazení množin jsme si všimli, že nemusí vždycky existovati zobrazení nějaké množiny na libovolnou jinou množinu; odtud plyne, že zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, a ovšem tím méně deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, nemusí existovat. *Jestliže nějaká deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje, pak pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ je homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$.*

7.2. Příklad deformace.

Nechť na př. n značí libovolné přirozené číslo a $\boldsymbol{d}$ zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ na grupoid $\mathfrak{Z}_n$ definované takto: Pro $a \in \mathfrak{Z}$ je $\boldsymbol{d}a \in \mathfrak{Z}_n$ zbytek dělení čísla a číslem n. Snadno zjistíme, že $\boldsymbol{d}$ je deformace, a tedy homomorfismus grupoidu $\mathfrak{Z}$ na $\mathfrak{Z}_n$. Vskutku, nechť a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{Z}$. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}$ je součin ab prvku a s prvkem b součet $a + b$ a podle definice zobrazení $\boldsymbol{d}$ jsou $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}ab$ zbytky dělení čísel $a, b, a + b$ číslem n. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}_n$ je součin $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b$ prvku $\boldsymbol{d}a$ s prvkem $\boldsymbol{d}b$ zbytek dělení čísla $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$ číslem n, a protože čísla $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$, $a + b$ se liší jenom o celý násobek čísla n, je $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b$ zbytek dělení čísla $a + b$ číslem n. Odtud vychází rovnost $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b = \boldsymbol{d}ab$ a vidíme, že zobrazení $\boldsymbol{d}$ je deformace. Při dalším studiu grupoidů se setkáme ještě častěji s příklady deformace, a proto se prozatím spokojíme s tímto jedním příkladem.

7.3. Vlastnosti deformace.

Nechť $\boldsymbol{d}$ značí libovolnou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$.

Nechť $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ značí libovolné neprázdné podmnožiny.

7.3.1. Připomeňme, že symbolem $\boldsymbol{d}A$ označujeme obraz množiny A v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$, tedy podmnožinu v $\mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků množiny A.

Snadno ukážeme, že *platí rovnost:*

$$\boldsymbol{d}(AB) = \boldsymbol{d}A \,.\, \boldsymbol{d}B.$$

Vskutku, jednak je každý prvek $c^* \in \boldsymbol{d}(AB)$ obrazem v $\boldsymbol{d}$ součinu ab jistého prvku $a \in A$ s jistým prvkem $b \in B$, takže máme $c^* = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b \subset \boldsymbol{d}A \,.\, \boldsymbol{d}B$, a z toho vidíme, že platí vztah: $\boldsymbol{d}(AB) \subset \boldsymbol{d}A \,.\, \boldsymbol{d}B$. Jednak je každý prvek $c^* \in \boldsymbol{d}A \,.\, \boldsymbol{d}B$ součinem jistého prvku $a^* \in \boldsymbol{d}A$ s jistým prvkem $b^* \in \boldsymbol{d}B$, takže existují prvky $a \in A$, $b \in B$ takové, že jest $a^* = \mathbf{d}a$, $b^* = \mathbf{d}b$, a máme: $c^* = a^*b^* = \mathbf{d}a \cdot \mathbf{d}b = \mathbf{d}ab \subset \mathbf{d}(AB)$; z toho vidíme, že platí vztah: $\mathbf{d}A \cdot \mathbf{d}B \subset \mathbf{d}(AB)$, a důkaz je ukončen.

7.3.2. Přihlížejíce k tomuto výsledku, soudíme, že *když množina AB je částí množiny C, pak také množina $\mathbf{d}A \cdot \mathbf{d}B$ je částí množiny $\mathbf{d}C$*; t. j. ze vztahu $AB \subset C$ plyne $\mathbf{d}A \cdot \mathbf{d}B \subset \mathbf{d}C$.

7.3.3. Když množina A je polem podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, takže je grupoidní, máme vztah $AA \subset A$ a z něho následuje $\mathbf{d}A \cdot \mathbf{d}A \subset \mathbf{d}A$. Odtud vidíme, že *obraz pole podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}^*$*. Podgrupoid v $\mathfrak{G}^*$, jehož pole je $\mathbf{d}A$, se nazývá *obraz podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v deformaci $\mathbf{d}$* a označuje se symbolem $\mathbf{d}\mathfrak{A}$; podgrupoid $\mathfrak{A}$ se nazývá *vzor podgrupoidu $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ v deformaci $\mathbf{d}$*. Je zřejmé, že $\mathbf{d}$ je deformace podgrupoidu $\mathfrak{A}$ na podgrupoid $\mathbf{d}\mathfrak{A}$, takže podgrupoid $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ je homomorfní s podgrupoidem $\mathfrak{A}$.

Tyto pojmy a výsledky platí zejména v případě, že jde o pole G grupoidu $\mathfrak{G}$. Zvláště vidíme, že *obraz $\mathbf{d}\mathfrak{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ v deformaci $\mathbf{d}$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}^*$ homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$*. Když $\mathbf{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, máme ovšem $\mathfrak{G}^* = \mathbf{d}\mathfrak{G}$.

7.3.4. Když $\mathbf{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a $\mathbf{f}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}^*$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{F}$, pak $\mathbf{fd}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{F}$. Vskutku, podle definice složeného zobrazení $\mathbf{fd}$, a protože $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ jsou deformace, platí pro $a, b \in \mathfrak{G}$ rovnosti

$$\mathbf{fd}(ab) = \mathbf{f}(\mathbf{d}ab) = \mathbf{f}(\mathbf{d}a \cdot \mathbf{d}b) = \mathbf{f}(\mathbf{d}a) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{d}b) = \mathbf{fd}a \cdot \mathbf{fd}b,$$

a tedy skutečně platí $\mathbf{fd}(ab) = \mathbf{fd}a \cdot \mathbf{fd}b$.

7.4. Isomorfní zobrazení.

7.4.1. K pojmu deformace připojují se některé další důležité pojmy, které jsou v něm zahrnuty. Je to především pojem prosté deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$, t. j. tedy takové deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$, v níž každý prvek grupoidu $\mathfrak{G}^*$ má nejvýš jeden vzor. Pro prostou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$ jest ustálen název *isomorfní zobrazení* grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$.

Z výsledků v odst. **3.7** a **7.3.4** vyplývá, že *když $\mathbf{d}$ je isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a $\mathbf{f}$ isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}^*$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{F}$, pak složené zobrazení $\mathbf{fd}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{F}$ jest opět isomorfní.*

7.4.2. Isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *isomorfismus*. Ke každé prosté deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje ovšem zobrazení inversní $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$, které je prosté, a snadno se přesvědčíme, že je deformací. Nechť a^*, b^* značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}^*$ a $a, b \in \mathfrak{G}$ jejich vzory v $\boldsymbol{d}$, takže $\boldsymbol{d}a = a^*$, $\boldsymbol{d}b = b^*$, $\boldsymbol{d}ab = a^*b^*$. Podle definice inversního zobrazení $\boldsymbol{d}^{-1}$ plynou odtud rovnosti: $a = \boldsymbol{d}^{-1}a^*$, $b = \boldsymbol{d}^{-1}b^*$, $ab = \boldsymbol{d}^{-1}a^*b^*$, a z nich skutečně vychází $\boldsymbol{d}^{-1}a^*b^* = \boldsymbol{d}^{-1}a^* \,.\, \boldsymbol{d}^{-1}b^*$. Když tedy existuje nějaký isomorfismus $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak existuje isomorfismus $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$; v tomto případě pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}^*$) je *isomorfní* s $\mathfrak{G}^*$ ($\mathfrak{G}$) nebo že grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ jsou isomorfní, a píšeme $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}^*$. Je zřejmé, že pole každých dvou isomorfních grupoidů jsou ekvivalentní množiny.

Zobrazení složené ze dvou isomorfismů je opět isomorfismus.

7.4.3. *Příklady.* Abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\mathsf{e}\}$ a násobení je popsáno v první multiplikační tabulce v odst. **5.4.2**, jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_1$. Abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\mathsf{e}, \mathsf{a}\}$ a násobení je popsáno v druhé multiplikační tabulce v odst. **5.4.2**, jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_2$; abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\mathsf{e}, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{f}\}$ a násobení je popsáno ve třetí multiplikační tabulce v odst. **5.4.2**, jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_3$.

7.5. Operátory, zobrazení meromorfní a automorfní.

7.5.1. Další pojmy zahrnuté v pojmu deformace se vztahují na případ, kdy jde o deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe nebo na sebe.

Deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe se nazývá také operátor na grupoidu $\mathfrak{G}$, kratčeji: *operátor grupoidu $\mathfrak{G}$*, nebo též: *endomorfní zobrazení grupoidu.*

Prostý operátor na $\mathfrak{G}$ neboli isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe se nazývá také meromorfní zobrazení na grupoidu $\mathfrak{G}$ nebo meromorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$. Meromorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ se nazývá *vlastní*, když obraz grupoidu $\mathfrak{G}$ je vlastní podgrupoid v $\mathfrak{G}$.

7.5.2. Isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na sebe* se nazývá také *automorfní* zobrazení na $\mathfrak{G}$, stručněji *automorfismus na* $\mathfrak{G}$.

7.5.3. *Příklady.* Na př. zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ do sebe, v němž je každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ zobrazen na součin (v aritmetickém smyslu) $ka \in \mathfrak{Z}$, kde k značí libovolné celé nezáporné číslo, jest operátor na $\mathfrak{Z}$. V případě $k \geqq 1$ máme meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$, v případě $k = 1$ automorfismus na $\mathfrak{Z}$ a v případě $k = 0$ operátor, ale nikoli meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$.

Nejjednodušším příkladem automorfismu libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$ jest identické zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$, t. zv. *identický automorfismus* na $\mathfrak{G}$.

7.6. Cvičení.

7.6.1. Když některé dva prvky v grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou vzájemně zaměnitelné, pak jejich obrazy v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jsou také vzájemně zaměnitelné. Obraz každého abelovského grupoidu v každé deformaci jest opět abelovský.

7.6.2. Když některá uspořádaná trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{G}$ má jenom jeden součin, pak totéž platí o uspořádané trojici jejich obrazů $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}c \in \mathfrak{G}^*$ v každé deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého asociativního grupoidu v každé deformaci jest opět asociativní.

7.6.3. Když grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní a má centrum, pak obraz centra v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na nějaký grupoid $\mathfrak{G}^*$ je v centru grupoidu $\mathfrak{G}^*$.

7.6.4. Vzorem grupoidní podmnožiny v $\mathfrak{G}^*$ v nějaké deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí býti podmnožina grupoidní.

7.6.5. Každé meromorfní zobrazení na libovolném konečném grupoidu $\mathfrak{G}$ jest automorfismus na $\mathfrak{G}$.

7.6.6. Uveďte sami příklady deformace!

8. O FAKTOROIDECH.

8.1. Vytvořující rozklady.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupoidy.

8.1.1. *Definice. Libovolný rozklad $\bar{A}$ v $\mathfrak{G}$ se nazývá vytvořující, když součin každé uspořádané dvojice jeho prvků je částí některého prvku téhož*