3. O zobrazeních

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do theorie grup [2. rozšířené vydání]. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 26--43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401409

z nichž každý se skládá ze dvou prvků množiny. 2. Dvojice, jejichž jeden rozklad má dva a druhý tři prvky a oba rozklady mají společný prvek, který se skládá z jednoho prvku množiny. 3. Dvojice, jejichž každý rozklad má tři prvky, avšak žádný prvek není v obou rozkladech.

3. O ZOBRAZENÍCH.

3.1. Zobrazení do množiny.

V denním životě se napořád setkáváme se zjevy, které souvisí s matematickým pojmem zobrazení. V nejjednodušším případě mají takové zjevy toto schema: Máme dvě neprázdné množiny G, G^* a mezi prvky obou množin nějaký vztah, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*.

Na př.: [1] Mezi diváky při určitém divadelním představení a mezi vstupenkami pro to představení vydanými je vztah daný tím, že každý divák je přítomen na základě právě jedné vstupenky.

[2] Mezi žáky určité školy a jejími třídami je vztah daný tím, že každý žák patří právě do jedné třídy.

[3] Určení počtu n nějakých věcí záleží v tom, že ke každé věci přiřadíme právě jedno přirozené číslo $1, 2, \ldots, n$, a to obvykle tím způsobem, že vezmeme vždy jednu z nich do rukou a současně ji označíme (znakem anebo jenom v mysli) jedním z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Nechť tedy G, G^* značí neprázdné množiny. *Zobrazením množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^**; jinak řečeno, *jímž je každý prvek množiny G zobrazen právě na jeden prvek množiny G^*.*

Zobrazení množiny G do G^* se nazývá také funkce na množině G do množiny G^*. Zobrazují-li nějaká zobrazení $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ množiny G do G^* každý prvek v G vždy na stejný prvek v G^*, nazýváme je *rovná* a píšeme $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. V opačném případě je nazýváme *různá* a píšeme $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{h}$.

Uvažujme o libovolném zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G do G^*. K libovolnému prvku $a \in G$ je zobrazením $\boldsymbol{g}$ přiřazen jistý prvek $a^* \in G^*$. Prvek a nazýváme *vzor prvku a^** a prvek a^* *obraz prvku a v zobrazení $\boldsymbol{g}$*, a pí-

šeme $a^* = \mathbf{g}(a)$ nebo jenom $a^* = \mathbf{g}a$; někdy také říkáme, že a^* je *hodnota* funkce $\mathbf{g}$ v prvku a. Jiný způsob označení je $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$; symbolem $\begin{pmatrix} a & b & \dots \\ a^* & b^* & \dots \end{pmatrix}$ pak vyjadřujeme rovnosti $a^* = \mathbf{g}a$, $b^* = \mathbf{g}b$, ...

Když A značí nějakou podmnožinu v G a A^* podmnožinu v G^*, skládající se z obrazů v zobrazení $\mathbf{g}$ jednotlivých prvků množiny A, píšeme $A^* = \mathbf{g}(A)$ nebo jenom $A^* = \mathbf{g}A$. Když $A \neq \emptyset$, můžeme ke každému prvku $a \in A$ přiřaditi prvek $\mathbf{g}a \in G^*$, a tím obdržíme jisté zobrazení množiny A do G^*. Toto zobrazení nazýváme *částečné zobrazení* (*funkce*) určené zobrazením $\mathbf{g}$ a označujeme je symbolem $\mathbf{g}_A$.

3.2. Zobrazení na množinu.

Podle definice zobrazení množiny G do G^* má sice v zobrazení $\mathbf{g}$ každý prvek v G jistý obraz v G^*, ale naopak nemá nutně každý prvek v G^* vzoru v G. *Když zobrazení $\mathbf{g}$ je takové, že každý prvek v G^* má vzor, pak pravíme, že $\mathbf{g}$ je zobrazení množiny G na množinu G^**, nebo že *funkce $\mathbf{g}$ zobrazuje množinu G na množinu G^**. Když $\emptyset \neq A \subset G$, je $\mathbf{g}_A$ zřejmě zobrazení množiny A na množinu $\mathbf{g}A$.

Výše jsme uvedli tři příklady zobrazení. Z nich [2] a [3] jsou příklady zobrazení množiny na množinu: ke každé třídě patří alespoň jeden žák, který je k ní v onom zobrazení přiřazen, a podobně, když máme n věcí, pak při určování jejich počtu byla každým z čísel 1, 2, ..., n jedna věc označena. Naproti tomu jest [1] příkladem zobrazení množiny na množinu jenom tehdy, když připustíme, že divadlo je vyprodáno. V opačném případě zbyly v pokladně vstupenky, pro které není diváků.

3.3. Zobrazení prosté.

V pojmu zobrazení množiny G do G^* je ještě další nesouměrnost vzhledem k oběma množinám: V zobrazení $\mathbf{g}$ má každý prvek v G právě jeden obraz v G^*, kdežto naopak týž prvek v G^* může míti několik a třeba i nekonečně mnoho vzorů v G.

Má-li každý prvek v G^* v zobrazení $\mathbf{g}$ nejvýše jeden vzor, pak se $\mathbf{g}$ nazývá prosté zobrazení množiny G do G^*.

Zřejmě je $\mathbf{g}$ prosté zobrazení množiny G na G^*, když a jen když má každý prvek v G^* právě jeden vzor.

Z hořejších příkladů je [3] příkladem prostého zobrazení množiny na množinu; [2] je příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom (v theoretickém případě), kdyby každá třída měla jenom jednoho žáka; [1] je příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom v tom případě, že divadlo je vyprodáno a v každé lóži sedí jenom jeden divák (obvykle lóžová vstupenka opravňuje k návštěvě představení několik diváků).

3.4. Inversní zobrazení. Ekvivalentní množiny. Uspořádané skupiny prvků.

K pojmu prostého zobrazení množiny na množinu se připínají dva důležité pojmy: pojem inversního zobrazení a pojem ekvivalentních množin.

3.4.1. *Inversní zobrazení.* Předpokládejme, že $\mathbf{g}$ je *prosté* zobrazení množiny G na G^*. V tom případě můžeme definovat jisté zobrazení množiny G^* na množinu G, které značíme symbolem $\mathbf{g}^{-1}$ a nazýváme *inversní zobrazení* vzhledem k $\mathbf{g}$, a to takto: Ke každému prvku $a^* \in G^*$ je v zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ přiřazen jeho vzor $a \in G$ v zobrazení $\mathbf{g}$.

Na př. když je divadlo vyprodáno a v každé lóži sedí jenom jeden divák, pak v zobrazení inversním vzhledem k tomu, o němž byla řeč, je přiřazen ke každé vstupence onen divák, který ji má v rukou.

Je zřejmé, že inversní zobrazení vzhledem ku $\mathbf{g}^{-1}$ jest opět zobrazení $\mathbf{g}$.

3.4.2. *Ekvivalentní množiny.* Když jsou dány neprázdné množiny G, G^*, pak vůbec nemusí existovat zobrazení množiny G *na* G^*, jak je zřejmé na př. v případě, že G má jeden a G^* dva prvky; a tudíž neexistuje vždycky ani prosté zobrazení jedné množiny na druhou.

Když mezi množinami G, G^* prosté zobrazení jedné na druhou existuje, pravíme, že množiny G, G^* jsou ekvivalentní.

Na př. každá množina A skládající se z n (> 0) prvků a množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ jsou ekvivalentní, neboť označíme-li prvky množiny A na př. symboly $a_1, a_2, \ldots, a_n$, při čemž libovolně stanovíme, který prvek označíme kterým symbolem, je tím dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, a to $\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ 1\ 2\ \ldots n \end{pmatrix}$.

Jiný významný příklad ekvivalentních množin je tento: *Libovolný rozklad $\overline{\overline{B}}$ na nějakém rozkladu $\overline{B}$ množiny G a zákryt $\overline{A}$ rozkladu $\overline{B}$ vynucený rozkladem $\overline{\overline{B}}$ jsou ekvivalentní množiny.* Prosté zobrazení rozkladu $\overline{\overline{B}}$ na rozklad $\overline{A}$ obdržíme, když ke každému prvku $\overline{\overline{b}} \in \overline{\overline{B}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a} \in \overline{A}$, jenž je součtem všech prvků rozkladu $\overline{B}$ ležících v $\overline{\overline{b}}$.

3.4.3. *Uspořádaná skupina prvků. Když se množina A skládá z n (> 0) prvků a je dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, pravíme, že množina A je uspořádaná, a ono zobrazení nazýváme uspořádáním množiny A.* Uspořádání množiny A obdržíme na př. tím, že její prvky seřadíme v jistém pořadí, t. j. jistý prvek $a_1 \in A$ označíme jako první, další jako druhý atd., poslední $a_n \in A$ jako n-tý. Potom pravíme, že A je *uspořádaná skupina prvků* $a_1, \ldots, a_n$. Tento pojem závisí tedy na pořadí, v němž jména jednotlivých prvků vyslovujeme nebo vypisujeme. *Opačně uspořádanou skupinou prvků* rozumíme pak uspořádanou skupinu prvků $a_n, \ldots, a_1$.

3.5. Rozklad množiny příslušný k zobrazení.

Nechť nyní **g** značí libovolné zobrazení množiny G na G^*. Všimli jsme si již, že libovolný prvek $a^* \in G^*$ může míti v zobrazení **g** několik vzorů v G.

Uvažujme o systému $\overline{G}$ všech podmnožin $\bar{a}$ v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení **g** vždy téhož prvku $a^* \in G^*$. Jednotlivé prvky systému $\overline{G}$ jsou tedy podmnožiny v G, skládající se ze všech prvků, které se v **g** zobrazí vždy na týž prvek množiny G^*. Protože množina G^* obsahuje alespoň jeden prvek a^*, není systém $\overline{G}$ prázdný, neboť obsahuje množinu $\bar{a}$ vzorů prvku a^*. Protože **g** je zobrazení množiny G *na* G^*, má každý prvek $a^* \in G^*$ alespoň jeden vzor, a tedy množina $\bar{a}$ vzorů libovolného prvku $a^* \in \overline{G}^*$ není prázdná. G je tedy neprázdný systém neprázdných podmnožin v G.

Dále je patrné, že systém $\overline{G}$ je disjunktní, t. j. každé jeho dva prvky jsou disjunktní, a že pokrývá G, neboť každý prvek $a \in G$ má právě jeden obraz $a^* \in G^*$ a tedy leží právě v jednom prvku $\bar{a} \in \overline{G}$, a to v množině vzorů prvku a^*. Vychází tedy, že *systém $\overline{G}$ všech podmnožin v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení **g** vždy téhož prvku v G^*,*

je rozklad množiny G. O tomto rozkladu pravíme, že *přísluší* nebo *patří* k zobrazení **g**.

Když ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{G}$ přiřadíme onen prvek $a^* \in G^*$, z jehož vzorů se skládá, obdržíme jisté zobrazení **g** rozkladu $\overline{G}$ na množinu G^*, a je zřejmé, že **g** je zobrazení prosté. Odtud plyne, že *rozklad $\overline{G}$ množiny G, příslušný k zobrazení* **g**, *a množina G^* jsou ekvivalentní množiny.*

Všimněme si zejména těchto krajních případů: Když množina G^* se skládá z jediného prvku, pak příslušný rozklad $\overline{G}$ jest $\overline{G}_{\max}$; když **g** je zobrazení prosté, pak příslušný rozklad je $\overline{G}_{\min}$. Na př. když jde o zobrazení, které jsme výše popsali v příkladě [2], skládá se rozklad příslušný k tomu zobrazení z jednotlivých množin žáků, kteří patří vždy do téže třídy.

3.6. Zobrazení množiny do sebe a na sebe.

V hořejších úvahách o zobrazeních nikterak nevylučujeme případ, že množina G^* jest identická s množinou G. Když $G^* = G$, pak mluvíme o zobrazení množiny G do sebe, po př. na sebe.

Přiřadíme-li na př. ke každému přirozenému číslu číslo o jedničku větší, obdržíme zobrazení množiny všech přirozených čísel do sebe.

Nejjednodušší zobrazení libovolné neprázdné množiny G na sebe obdržíme, když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme opět prvek a; to je t. zv. *identické zobrazení* množiny G a označujeme je symbolem **e**. O prostých zobrazeních konečných množin na sebe budeme podrobněji uvažovati v následujícím odstavci **4**.

3.7. Skládání zobrazení.

3.7.1. *Pojem složeného zobrazení.* Pro naše úvahy je důležitý pojem *skládání zobrazení.*

Nechť G, H, K značí nějaké neprázdné množiny, nechť **g** značí nějaké zobrazení množiny G do H a **h** nějaké zobrazení množiny H do K. Pak je ke každému prvku $a \in G$ v zobrazení **g** přiřazen jistý prvek $\boldsymbol{g}a \in H$ a k tomuto prvku $\boldsymbol{g}a$ je v zobrazení **h** přiřazen jistý prvek $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$. Když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme prvek $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$, máme jisté zobrazení množiny G do K. Toto zobrazení nazýváme *složené* ze zobrazení **g** a **h** (v tomto pořadí) a označujeme je symbolem

hg. Je tedy **hg** jakožto zobrazení množiny G do K charakterisováno tím, že pro $a \in G$ platí rovnost $(\boldsymbol{hg})a = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$.

Všimněme si několika zvláštních případů. Když **g** zobrazuje množinu G *na* H a **h** množinu H *na* K, pak **hg** je zřejmě zobrazení množiny G *na* K.

Když **g** *i* **h** *jsou zobrazení prostá, pak také zobrazení* **hg** *je prosté*, neboť pak dva různé prvky v G mají v zobrazení **g** dva různé obrazy v H a tyto mají v zobrazení **h** opět dva různé obrazy v K.

Dále je zřejmé, že je-li množina K identická s G, takže **h** je zobrazení množiny H do G, pak je **hg** zobrazení množiny G do sebe a v případě, že **g** zobrazuje množinu G na H a **h** množinu H na G, je **hg** zobrazení množiny G na sebe; je-li zejména zobrazení **g** prosté a **h** inversní zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$, pak jest **hg** identické zobrazení množiny G.

Dále si všimněme, že jsou-li množiny H, K obě identické s G, takže **g** a **h** jsou zobrazení množiny G do sebe, pak jest i **hg** zobrazení množiny G do sebe, a v případě, že **g**, **h** zobrazují množinu G na sebe, pak také **hg** zobrazuje množinu G na sebe.

Konečně si všimněme, že pro identické zobrazení **e** množiny G a pro libovolné zobrazení **g** množiny G do sebe platí tyto rovnosti: $\boldsymbol{eg} = \boldsymbol{ge} = \boldsymbol{g}$.

Jako příklad složeného zobrazení můžeme uvésti toto: Když **g** značí zobrazení množiny diváků do množiny vstupenek, které jsme popsali v hořejším příkladě **3.1.** [1], a **h** značí zobrazení této množiny vstupenek do množiny barev, které je dáno tím, že ke každé vstupence je přiřazena její barva, pak složené zobrazení **hg** přiřazuje ke každému diváku jistou barvu, a to barvu jeho vstupenky.

3.7.2. *Asociativní zákon o skládání zobrazení.* Uvažujme nyní o třech zobrazeních **g**, **h**, **k**, kde **k** značí libovolné zobrazení množiny K do nějaké další množiny L (při čemž opět nevylučujeme případ, že množina L jest identická s některou množinou G, H, K). Důležitá vlastnost skládání zobrazení záleží v tom, že platí rovnost

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg}) = (\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g},$$

kterou označujeme jako *asociativní zákon o skládání zobrazení.*

Tato rovnost vyjadřuje, že každý prvek v G má v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ týž obraz v L, jako v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$. Abychom dokázali, že platí, uvažujme o obrazu libovolného prvku $a \in G$ v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$.

Podle definice zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ jest obraz prvku a v tomto zobrazení obrazem prvku $(\boldsymbol{hg})a$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$, a tedy jej obdržíme, když k prvku $\boldsymbol{g}a \in H$ přiřadíme obraz $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ a k tomuto určíme obraz v $\boldsymbol{k}$. Avšak obraz prvku $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$ je podle definice zobrazení $\boldsymbol{kh}$ týž, jako obraz prvku $\boldsymbol{g}a$ v zobrazení $\boldsymbol{kh}$ a podle definice $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$ je tento současně obrazem prvku a v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$, takže skutečně platí hořejší rovnost. Zobrazení vyskytující se na obou stranách hořejší rovnosti označujeme stručněji $\boldsymbol{khg}$.

3.8. Zobrazení rozkladů.

Nechť $\boldsymbol{g}$ značí libovolné zobrazení množiny G na nějakou množinu G^*. Každý prvek $a \in G$ je tedy v $\boldsymbol{g}$ zobrazen na jistý prvek $a^* \in G^*$; a (a^*) je vzor (obraz) prvku a^* (a) v zobrazení $\boldsymbol{g}$. K zobrazení $\boldsymbol{g}$ patří jistý rozklad $\overline{G}$ na G, jehož prvky se skládají ze všech vzorů vždy téhož prvku v G^*. Tento rozklad je ekvivalentní s množinu G^* (viz odst. **3.5**).

3.8.1. *Rozšířené zobrazení.* Zobrazení $\boldsymbol{g}$ určuje jisté zobrazení $\bar{\boldsymbol{g}}$ systému všech podmnožin v G do systému všech podmnožin v G^*, t. zv. *rozšířené zobrazení*. Toto zobrazení $\bar{\boldsymbol{g}}$ je definováno tím, že pro $A \subset G$ je $\bar{\boldsymbol{g}}A \subset G^*$ množina obrazů v $\boldsymbol{g}$ všech prvků ležících v A. Zejména pro $\bar{a} \in \overline{G}$ se množina $\bar{\boldsymbol{g}}\bar{a}$ skládá z jediného prvku v G^*, a to z onoho, na nějž se v $\boldsymbol{g}$ zobrazí jednotlivé prvky v G ležící v $\bar{a}$.

Kvůli zjednodušení označení užíváme zpravidla pro rozšířené zobrazení $\bar{\boldsymbol{g}}$ rovněž označení $\boldsymbol{g}$. Symbol $\boldsymbol{g}$ tedy aplikujeme na prvky v G, na př. $a \in G$, a pak výsledek $\boldsymbol{g}a$ značí obraz prvku a v původním zobrazení $\boldsymbol{g}$, nebo jej aplikujeme na podmnožiny v G, na př. $A \subset G$, a pak výsledek $\boldsymbol{g}A$ označuje obraz podmnožiny A v rozšířeném zobrazení $\bar{\boldsymbol{g}}$.

Tohoto pravidla používáme i pro systémy podmnožin v G: Když $\boldsymbol{A}$ je nějaký neprázdný systém podmnožin v G, označujeme zpravidla systém obrazů v $\bar{\boldsymbol{g}}$ jednotlivých prvků v $\boldsymbol{A}$ symbolem $\boldsymbol{gA}$.

Na př. když $\overline{A}$ je rozklad množiny G, značí $\boldsymbol{g}\overline{A}$ systém obrazů v $\bar{\boldsymbol{g}}$ jednotlivých prvků rozkladu $\overline{A}$. Když zejména $\boldsymbol{g}\overline{A}$ je rozklad na G^*, pak rozšířeným zobrazením $\bar{\boldsymbol{g}}$ je určeno částečné zobrazení $\boldsymbol{g}_{\overline{A}}$ rozkladu

$\overline{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\overline{A}$, jímž je ovšem ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ přiřazen jeho obraz $\mathbf{g}\bar{a} \in \mathbf{g}\overline{A}$.

3.8.2. Nechť A, B značí libovolné podmnožiny v G.

Je zřejmé, že ze vztahu $A \subset B$ plyne $\mathbf{g}A \subset \mathbf{g}B$.

Dokážeme tuto větu:

Rovnost $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$ *platí tehdy a jen tehdy, když každý prvek v* $\overline{G}$, *který jest incidentní s jednou podmnožinou* A, B, *jest incidentní také s druhou.*

Důkaz. a) Nechť platí $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$. Když některý prvek $\bar{g} \in \overline{G}$ jest incidentní na př. s množinou A, pak existuje prvek $a \in A$ takový, že $\bar{g}$ je množinou všech vzorů v $\mathbf{g}$ prvku $\mathbf{g}a$. Protože $\mathbf{g}a \in \mathbf{g}A = \mathbf{g}B$, existuje prvek $b \in B$ takový, že $\mathbf{g}b = \mathbf{g}a$, takže $b \in \bar{g}$, a vidíme, že prvek $\bar{g}$ jest incidentní s B.

b) Nechť každý prvek v $\overline{G}$, který jest incidentní s jednou množinou A, B, jest incidentní i s druhou. Pak na př. pro $a^* \in \mathbf{g}A$ jest onen prvek $\bar{g} \in \overline{G}$, který se skládá ze všech vzorů v $\mathbf{g}$ prvku a^*, incidentní s A a tedy, podle předpokladu, i s B. Tedy existuje prvek $b \in B$ takový, že $a^* = \mathbf{g}b \in \mathbf{g}B$ a vychází $\mathbf{g}A \subset \mathbf{g}B$. Současně ovšem platí vztah $\mathbf{g}B \subset \mathbf{g}A$ a máme $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$.

Zřejmě můžeme předcházející větu vyjádřit také tím, že *rovnost* $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$ *platí tehdy a jen tehdy, když* $A \sqsubset \overline{G} = B \sqsubset \overline{G}$.

3.8.3. Nechť $\mathbf{A}$ značí systém podmnožin v G.

Když všechny prvky systému $\mathbf{A}$ *mají v rozšířeném zobrazení* $\mathbf{g}$ *týž obraz* $A^* \subset G^*$, *takže pro* $A \in \mathbf{A}$ *je* $\mathbf{g}A = A^*$, *pak také množina* $\mathbf{sA}$ *má obraz* A^*, *t. j.* $\mathbf{g}(\mathbf{sA}) = A^*$.

Vskutku, především pro každý prvek $A \in \mathbf{A}$ platí $A \subset \mathbf{sA}$ a odtud následuje $A^* = \mathbf{g}A \subset \mathbf{g}(\mathbf{sA})$. Dále každý prvek $a \in \mathbf{sA}$ leží v jisté podmnožině $A \in \mathbf{A}$ a platí vztahy: $\mathbf{g}a \in \mathbf{g}A = A^*$; odtud plyne $\mathbf{g}(\mathbf{sA}) \subset A^*$. Tím je důkaz ukončen.

3.8.4. Nechť nyní $\overline{A}$ značí libovolný rozklad na G.

Systém $\mathbf{g}\overline{A}$ podmnožin v G^* zřejmě pokrývá množinu G^*. Avšak tento systém není nutně rozkladem množiny G^*, neboť obrazy v $\mathbf{g}$ dvou různých prvků v $\overline{A}$ mohou býti incidentní, aniž splývají.

Následující věta popisuje nutnou a dostatečnou podmínku toho, aby se rozklad $\overline{A}$ zobrazil v $\mathbf{g}$ na rozklad množiny G^*:

$\mathbf{g}\overline{A}$ je rozkladem množiny G^* tehdy a jen tehdy, když rozklady $\overline{A}$, $\overline{G}$ jsou doplňkové.

Důkaz. a) Nechť $\mathbf{g}\overline{A}$ je rozkladem na G^*. Nechť prvky $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{g} \in \overline{G}$ leží v témže prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{G}]$. Máme ukázat, že $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$. Nechť $\bar{b} \in \overline{A}$ je libovolný prvek incidentní s $\bar{g}$. Pak $\bar{b} \subset \overline{u}$ a tedy existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{G}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{b}$:

$$(\bar{a} =)\ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\ (= \bar{b}).$$

Podle definice řetězce jsou každé jeho dva sousední prvky $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ ($\beta = 1, \ldots, \alpha - 1$) incidentní vždy s jistým prvkem rozkladu $\overline{G}$ a tedy oba obrazy $\mathbf{g}\bar{a}_\beta$, $\mathbf{g}\bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní. Protože $\mathbf{g}\overline{A}$ je rozklad na G^*, je $\mathbf{g}\bar{a}_\beta = \mathbf{g}\bar{a}_{\beta+1}$ a tedy také $\mathbf{g}\bar{a} = \mathbf{g}\bar{b}$. Odtud plyne podle **3.8.2:** $\bar{a} \sqsubset \overline{G} = \bar{b} \sqsubset \overline{G}$. Protože $\bar{g} \in \bar{b} \sqsubset \overline{G}$, máme tedy $\bar{g} \in \bar{a} \sqsubset \overline{G}$, takže $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$.

b) Nechť rozklady $\overline{A}, \overline{G}$ jsou doplňkové. Máme ukázat, že pro $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{A}$ jsou množiny $\mathbf{g}\bar{a}$, $\mathbf{g}\bar{b}$ buď disjunktní nebo splývají. Nejsou-li množiny $\mathbf{g}\bar{a}$, $\mathbf{g}\bar{b}$ disjunktní, existují prvky $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ takové, že $\mathbf{g}a = \mathbf{g}b \in \mathbf{g}\bar{a} \cap \mathbf{g}\bar{b}$. Prvek $\bar{g} \in \overline{G}$, který se skládá ze všech vzorů v $\mathbf{g}$ prvku $\mathbf{g}a$, je pak incidentní s oběma prvky $\bar{a}, \bar{b}$ a tyto prvky tedy leží v témže prvku rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$. Protože rozklady $\overline{A}, \overline{G}$ jsou doplňkové, platí podle **2.9.2.3** rovnost $\bar{a} \sqsubset \overline{G} = \bar{b} \sqsubset \overline{G}$ a odtud podle **3.8.2** plyne $\mathbf{g}\bar{a} = \mathbf{g}\bar{b}$.

3.8.5. Nechť rozklady $\overline{A}, \overline{G}$ jsou doplňkové.

Podle předcházející věty **3.8.4** je $\mathbf{g}\overline{A}$ rozklad na G. Rozšířeným zobrazením $\mathbf{g}$ je určeno částečně zobrazení rozkladu $\overline{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\overline{A}$, jímž jest ovšem ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ přiřazen jeho obraz $\mathbf{g}\bar{a} \in \mathbf{g}\overline{A}$. V dalším rozumíme zobrazením $\mathbf{g}$ rozkladu $\overline{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\overline{A}$ toto částečné zobrazení.

K zobrazení $\mathbf{g}$ rozkladu $\overline{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\overline{A}$ přísluší ovšem jistý rozklad $\overline{\overline{A}}$ rozkladu $\overline{A}$. Jeho prvky se skládají vždy ze všech prvků rozkladu $\overline{A}$, které mají v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ týž obraz.

3.8.5.1. Ukážeme, že *zákryt rozkladu $\overline{A}$ vynucený rozkladem $\overline{\overline{A}}$ je nejmenší společný zákryt $[\overline{A}, \overline{G}]$ rozkladů $\overline{A}, \overline{G}$.*

Vskutku, uvažujme o libovolném prvku $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{A}}$. Máme ukázat, že množina $\mathbf{s}\bar{\bar{a}}$ je prvkem rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$. Budiž $\overline{\bar{a}} \in \bar{\bar{a}}$ libovolný prvek a budiž $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{G}]$ onen prvek rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$, který obsahuje $\overline{a}$; máme tedy $\overline{a} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}} \cap \overline{u}$. Každý prvek $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ má v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ týž

obraz jako $\bar{a}$ a tedy podle věty **3.8.2** jest $\bar{a} \sqsubset \overline{G} = \bar{x} \sqsubset \overline{G}$; odtud plyne, že se prvek $\bar{x}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\overline{G}$ a tedy, že leží v prvku $\overline{u}$. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\mathbf{s}\bar{\bar{a}} \subset \overline{u}$. Naopak, každý prvek $\bar{x} \in \overline{A}$, který leží v $\overline{u}$, hoví podle věty **2.9.2.3** rovnosti $\bar{a} \sqsubset \overline{G} = \bar{x} \sqsubset \overline{G}$; z ní soudíme, přihlížejíce k větě **3.8.2**, že prvek $\bar{x}$ má v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{g}$ týž obraz jako prvek $\bar{a}$, takže $\bar{x} \in \overline{u}$, a platí vztah $\bar{x} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$. Tím jsme zjistili, že jest $\overline{u} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$, a důkaz je ukončen.

3.8.5.2. Když ke každému prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{G}]$ přiřadíme onen prvek $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{A}}$, který obsahuje prvky rozkladu $\overline{A}$ v něm ležící, obdržíme prosté zobrazení rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$ na rozklad $\overline{\overline{A}}$ (odst. **3.4.2**); když ke každému prvku $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{A}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a}^* \in \boldsymbol{g}\overline{A}$, jenž jest obrazem každého prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ ležícího v $\bar{\bar{a}}$, obdržíme prosté zobrazení rozkladu $\overline{\overline{A}}$ na rozklad $\boldsymbol{g}\overline{A}$ (odst. **3.5**). Složením těchto prostých zobrazení obdržíme prosté zobrazení rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$ na rozklad $\boldsymbol{g}\overline{A}$ (odst. **3.7.1**). V něm je ke každému prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{G}]$ přiřazen jistý prvek $\bar{a}^* \in \boldsymbol{g}\overline{A}$; prvek $\bar{a}^*$ je obrazem v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{g}$ každého prvku rozkladu $\overline{A}$, který leží v prvku $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{A}}$, obsahujícím všechny prvky rozkladu $\overline{A}$ ležící v $\overline{u}$. Protože je $\overline{u} = \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$ a pro $\bar{a} \in \bar{\bar{a}}$ máme $\boldsymbol{g}\bar{a} = \bar{a}^*$, soudíme, přihlížejíce k větě **3.8.3**, že prvek $\overline{u}$ má v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{g}$ obraz $\bar{a}^*$, t. j. $\boldsymbol{g}\overline{u} = \bar{a}^*$.

Tím jsme došli k tomuto výsledku:

Když se nějaký rozklad $\overline{A}$ na G zobrazí v zobrazení $\boldsymbol{g}$ na nějaký rozklad $\overline{A}^*$ na G^*, pak jsou rozklady $[\overline{A}, \overline{G}]$, $\overline{A}^*$ ekvivalentní; prosté zobrazení rozkladu $[\overline{A}, \overline{G}]$ na $\overline{A}^*$ obdržíme, když ke každému prvku prvního rozkladu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{g}$.

Důsledkem tohoto poznatku je, že *každý zákryt rozkladu $\overline{G}$ je ekvivaletní se svým obrazem v $\boldsymbol{g}$; zobrazení, které ke každému prvku zákrytu přiřazuje jeho obraz, je prosté.*

3.9. Zobecněné zobrazení.

Pojem zobrazení množiny G do množiny G^*, o němž jsme posud uvažovali, můžeme zobecnit touto definicí:

Zobecněným zobrazením množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen alespoň jeden prvek množiny G^*.

Budiž $\mathbf{g}$ libovolné zobecněné zobrazení množiny G do G^*. Pak má každý prvek $a \in G$ v tomto zobrazení alespoň jeden, obecně několik a třeba i nekonečně mnoho obrazů v množině G^*; tuto množinu obrazů označujeme $\mathbf{g}a$.

Když každý prvek $a^* \in G^*$ je v množině obrazů některého prvku $a \in G$, pravíme, že $\mathbf{g}$ je zobecněné zobrazení množiny G *na* množinu G^*.

V tomto případě je zobrazením $\mathbf{g}$ určeno jisté zobecněné zobrazení množiny G^* na G, které se nazývá *inversní vzhledem ku* $\mathbf{g}$ a označuje se $\mathbf{g}^{-1}$. Je definováno tím, že k libovolnému prvku $a^* \in G^*$ je přiřazen každý prvek $a \in G$, jehož množina obrazů v $\mathbf{g}$ obsahuje a^*. Podle této definice platí tedy oba vztahy $a^* \in \mathbf{g}a$, $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ současně, t. j. když platí jeden, platí i druhý.

Snadno ukážeme, že *zobrazení inversní vzhledem ku* $\mathbf{g}^{-1}$ *je původní zobrazení* $\mathbf{g}$, t. j. $(\mathbf{g}^{-1})^{-1} = \mathbf{g}$. Vskutku, ze vztahu $a^* \in \mathbf{g}a$ plyne $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ a odtud $a^* \in (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$, takže máme $\mathbf{g}a \subset (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$; naopak ze vztahu $a^* \in (\mathbf{g}^{-1})^{-1}a$ plyne $a \in \mathbf{g}^{-1}a^*$ a odtud $a^* \in \mathbf{g}a$, takže platí $(\mathbf{g}^{-1})^{-1}a \subset \mathbf{g}a$. Vychází tedy $(\mathbf{g}^{-1})^{-1}a = \mathbf{g}a$, a tím je důkaz proveden.

Přihlížejíce k této vlastnosti inversního zobrazení nazýváme obě zobrazení $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}$ inversní, nerozlišujíce, které je inversní vzhledem ke kterému.

Omezíme se na několik poznámek o případě, že množina G^* je identická s množinou G, a že jde o zobecněné zobrazení množiny G *na sebe*.

3.9.1. *Kongruence.*

Nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné prvky. *Zobecněné zobrazení* $\mathbf{g}$ *množiny* G *na sebe se nazývá kongruence na* G, *když má tyto vlastnosti*:

1. *Pro* $a \in G$ *jest* $a \in \mathbf{g}a$.
2. *Když* $b \in \mathbf{g}a$, $c \in \mathbf{g}b$, *pak* $c \in \mathbf{g}a$.

První vlastnost vyjadřujeme tím, že zobecněné zobrazení $\mathbf{g}$ je *reflexivní* a druhou, že je *transitivní*.

Kongruence na množině je tedy zobecněné zobrazení množiny na sebe vyznačující se tím, že je reflexivní a transitivní.

Předpokládejme, že $\mathbf{g}$ je kongruence.

Potom vztah $b \in \mathbf{g}a$ vyjadřujeme tím, že prvek b je kongruentní s prvkem a v kongruenci $\mathbf{g}$.

Snadno zjistíme, že inversní zobecněné zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ je rovněž kongruencí. Vskutku, zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ je zřejmě reflexivní. Dále ze vztaků $b \in \mathbf{g}^{-1}a$, $c \in \mathbf{g}^{-1}b$ plyne $a \in \mathbf{g}b$, $b \in \mathbf{g}c$, tedy $a \in \mathbf{g}c$, a odtud vychází, že $c \in \mathbf{g}^{-1}a$, takže zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ jest i transitivní.

Kongruenci $\mathbf{g}^{-1}$ nazýváme ovšem *inversní* vzhledem ku $\mathbf{g}$. Kongruence inversní vzhledem ke $\mathbf{g}^{-1}$ je kongruence $\mathbf{g}$.

Na př. když máme libovolné rozklady $\overline{A}$, $\overline{B}$ na množině G a když ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ přiřadíme všechny prvky rozkladu $\overline{A}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\overline{B}$, máme kongruenci $\mathbf{g}$ na rozkladu $\overline{A}$, jak plyne z **2.4.2.1a,b.** V tomto případě je s prvkem $\bar{a}$ kongruentní každý prvek $\bar{b} \in \overline{A}$, který se dá spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\overline{B}$. V inversní kongruenci $\mathbf{g}^{-1}$ jsou ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ přiřazeny všechny prvky rozkladu $\overline{A}$, s nimiž se prvek $\bar{a}$ dá spojit v rozkladu $\overline{B}$; podle **2.4.2.1c** soudíme, že jsou to právě prvky, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\overline{B}$. Odtud vychází, že v tomto zvláštním případě inversní kongruence $\mathbf{g}^{-1}$ je táž jako $\mathbf{g}$, t. j. $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$.

Jiné příklady kongruencí jsou tyto: Ke každému rozkladu $\overline{A}$ množiny G přiřadíme všechny jeho zákryty (zjemnění). Po každé máme kongruenci na množině všech rozkladů množiny G, jak plyne z **2.5.3.2 a, b.** S rozkladem $\overline{A}$ je kongruentní každý rozklad množiny G, který je zákrytem (zjemněním) rozkladu $\overline{A}$. Obě kongruence jsou vzájemně inversní. Zvláště důležité jsou kongruence *symetrické* a *antisymetrické.*

3.9.1.1. *Kongruence symetrické. Libovolná kongruence* $\mathbf{g}$ *na množině* G *se nazývá symetrická, když má tuto vlastnost:*

$$S. \quad \text{Když } b \in \mathbf{g}a, \text{ pak } a \in \mathbf{g}b.$$

Tato vlastnost vyjadřuje *symetrii* kongruence $\mathbf{g}$ v tom smyslu, že z každých dvou prvků v G buď žádný nebo každý je v množině obrazů druhého. Když pak platí $b \in \mathbf{g}a$, píšeme $b \equiv a$ $(\mathbf{g})$, stručněji: $b \equiv a$. Máme pak ovšem také $a \equiv b$ a pravíme, že *prvky* a, b *jsou kongruentní.*

Na př. kongruence na rozkladu $\overline{A}$, o níž byla řeč v prvním příkladě předcházejícího odstavce **3.9.1**, je symetrická, jak plyne z **2.4.2.1c.**

Budiž $\mathbf{g}$ libovolná symetrická kongruence na množině G.

Důležitá vlastnost kongruence $\mathbf{g}$ je ta, že *systém všech podmnožin v* G, *z nichž každá se skládá ze všech prvků, které vesměs jsou kongruentní s ně-*

kterým prvkem množiny G, je rozklad množiny G. O tomto rozkladu pravíme, že *přísluší* nebo *patří* ke kongruenci **g**; jeho prvky se nazývají *třídy kongruence* **g**.

Důkaz tohoto tvrzení je snadným zobecněním důkazu v odst. **2.6.1**, že systém $\overline{\overline{A}}$ všech podmnožin v rozkladu $\overline{A}$, o němž je tam řeč, je rozklad na rozkladu $\overline{A}$; přenecháváme čtenáři, aby si toto zobecnění provedl.

Rovněž snadno vidíme, že *každé dva prvky v G, které leží v téže třídě kongruence* **g**, *jsou kongruentní, kdežto žádné dva, které v téže třídě neleží, nejsou.* Libovolný výběr v rozkladu příslušném ke kongruenci **g**, t. j. podmnožina v G, mající s každým prvkem rozkladu společný právě jeden prvek množiny G, je tedy *systémem representantů kongruence* G v tom smyslu, že každý prvek v G je kongruentní právě s jedním representantem.

Naopak, *když je dán na množině G libovolný rozklad* $\overline{A}$, *existuje kongruence na množině G, k níž příslušný rozklad jest* $\overline{A}$. Tato kongruence je definována tím, že s každým prvkem $a \in G$ je kongruentní každý prvek v G, který leží v témže prvku rozkladu $\overline{A}$ jako prvek a, kdežto jiné prvky v G s prvkem a kongruentní nejsou.

Konečně ukážeme, že inversní kongruence $\mathbf{g}^{-1}$ je táž jako **g**, t. j. $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$. Vskutku, ze vztahu $b \in \mathbf{g}^{-1}a$ plyne $a \in \mathbf{g}b$ a tedy, podle předpokladu S, je $b \in \mathbf{g}a$, takže máme $\mathbf{g}^{-1}a \subset \mathbf{g}a$; naopak ze vztahu $b \in \mathbf{g}a$ plyne podle předpokladu S, že $a \in \mathbf{g}b$ a tedy také $b \in \mathbf{g}^{-1}a$, takže vychází $\mathbf{g}a \subset \mathbf{g}^{-1}a$. Máme tedy $\mathbf{g}^{-1}a = \mathbf{g}a$, a tím je důkaz proveden.

Mezi studiem symetrických kongruencí a studiem rozkladů množin není podstatného rozdílu.

Podotkněme, že se symetrické kongruence nazývají také *ekvivalence.*

3.9.1.2. *Kongruence antisymetrické. Libovolná kongruence* **g** *na množině G se nazývá antisymetrická, když má tuto vlastnost:*

$$AS. \quad \textit{Ze vztahů } b \in \mathbf{g}a,\ a \in \mathbf{g}b \textit{ plyne } a = b.$$

Tato vlastnost vyjadřuje *antisymetrii kongruence* **g** v tom smyslu, že z každých dvou různých prvků v G buď žádný nebo právě jenom jeden

je kongruentní s druhým. Když pak prvek b je kongruentní s prvkem a, t. j. když $b \in \mathbf{g}a$, píšeme $a \leqq b$ (**g**) nebo $b \geqq a$ (**g**), stručněji: $a \leqq b$, nebo $b \geqq a$.

Když kongruence **g** *jest antisymetrická, pak kongruence inversní* **g** *je rovněž antisymetrická.* Ze vztahů $b \in \mathbf{g}^{-1}a$, $a \in \mathbf{g}^{-1}b$ následuje totiž $a \in \mathbf{g}b$, $b \in \mathbf{g}a$ a tedy, podle předpokladu AS, je $a = b$.

Na př. obě kongruence na systému všech rozkladů množiny G, o nichž byla řeč na konci odst. **3.9.1**, jsou antisymetrické, jak plyne z **2.5.3.2c**; řekli jsme již, že každá z nich je inversní vzhledem k druhé.

Podotkněme, že *se antisymetrické kongruence nazývají také částečná uspořádání; inversní částečná uspořádání* se nazývají *také duální.*

3.9.1.3. *Horní a dolní hranice dvou prvků.* Důležitými pojmy založenými na pojmu antisymetrické kongruence jsou pojmy horní a dolní hranice dvou prvků.

Nechť je na množině G dána antisymetrická kongruence **g**.

Horní hranicí uspořádané dvojice prvků $a, b \in G$ *(vzhledem ke kongruenci* **g**) *rozumíme prvek* $c \in G$, *který se vyznačuje tím, že jest* $a \leqq c$, $b \leqq c$ *a současně pro každý prvek* $x \in G$ *vyhovující vztahům* $a \leqq x$, $b \leqq x$ *platí* $c \leqq x$. Horní hranice uspořádané dvojice prvků může býti nejvýše jedna; neboť značí-li c, c' horní hranice, máme $c \leqq c'$ a současně $c' \leqq c$, a tedy $c = c'$, podle předpokladu AS. Horní hranici uspořádané dvojice prvků a, b označujeme symbolem $a \smile b$.

Obdobně definujeme dolní hranici uspořádané dvojice prvků $a, b \in G$ (vzhledem ke kongruenci **g**): *Dolní hranicí rozumíme prvek* $c \in G$, *který se vyznačuje tím, že jest* $c \leqq a$, $c \leqq b$ *a současně pro každý prvek* $x \in G$, *vyhovující vztahům* $x \leqq a$, $x \leqq b$, *platí* $x \leqq c$. Dolní hranice uspořádané dvojice prvků a, b může býti nejvýš jedna; označujeme ji symbolem $a \frown b$.

Porovnáme-li definice horní a dolní hranice, vidíme, že *horní (dolní) hranice každých dvou prvků v* G *vzhledem ke kongruenci* **g** *jest jejich dolní (horní) hranicí vzhledem k inversní kongruenci* $\mathbf{g}^{-1}$.

Přenecháváme čtenáři, aby si rozmyslil, že pro každé tři prvky $a, b, c \in G$ platí následující rovnosti, kdykoli existují příslušné horní a dolní hranice:

a. $a \smile b = b \smile a$,	**a'.** $a \frown b = b \frown a$,
b. $a \smile a = a$,	**b'.** $a \frown a = a$,
c. $a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c$,	**c'.** $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c$,
d. $a \smile (a \frown b) = a$,	**d'.** $a \frown (a \smile b) = a$.

Vzhledem k tomu, že platí rovnosti **a**, **a'**, mluvíme obvykle o horní a dolní hranici dvou prvků, nerozlišujíce jejich uspořádání.

Abychom uvedli příklad horní a dolní hranice, všimněme si antisymetrické kongruence na systému všech rozkladů množiny G, v níž jsou ke každému rozkladu množiny G přiřazeny všechny jeho zákryty, příp. zjemnění. Každé dva rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ množiny G mají vzhledem k této kongruenci horní hranici $[\bar{A}, \bar{B}]$, příp. $(\bar{A}, \bar{B})$ a dolní hranici $(\bar{A}, \bar{B})$, příp. $[\bar{A}, \bar{B}]$.

3.10. Cvičení.

3.10.1. Čtenář nechť si uvědomí příklady funkcí, s nimiž se setkal na gymnasiu; na př. $y = ax + b$, $y = x^2$, atp.

3.10.2. Nechť $A \subset G$ a nechť $\mathbf{g}[A]$ značí zobrazení množiny G do množiny $\{0, 1\}$, definované takto: Pro $a \in G$ je $\mathbf{g}[A]a = 1$ nebo 0 podle toho, zda a leží anebo neleží v A. Dokažte, že platí tyto vztahy:

1. $\mathbf{g}[A \cap B]a = (\mathbf{g}[A]a) \,.\, (\mathbf{g}[B]a)$ = nejmenšímu z obou čísel $\mathbf{g}[A]a$, $\mathbf{g}[B]a$;

2. $\mathbf{g}[A \vee B]a$ = největšímu z obou čísel $\mathbf{g}[A]a$, $\mathbf{g}[B]a$;

3. když $A \cap B = \emptyset$, pak je $\mathbf{g}[A \vee B]a = \mathbf{g}[A]a + \mathbf{g}[B]a$.

3.10.3. Dvě konečné neprázdné množiny jsou ekvivalentní, když a jen když mají týž řád.

3.10.4. Nechť $\mathbf{g}$ značí nějaké zobrazení množiny G na G^* a $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ nějaký rozklad na G. Pak $\{\mathbf{g}\bar{a}, \mathbf{g}\bar{b}, \ldots\}$ je rozklad na G^*, když a jen když $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ je zákryt rozkladu příslušného ke $\mathbf{g}$.

3.10.5. Nechť $\mathbf{f}[a]$ značí zobrazení přímky na sebe, definované tím, že ke každému bodu na přímce o souřadnici x je přiřazen bod na přímce o souřadnici $x' = x + a$, při čemž a značí nějaké reálné číslo. Podobně nechť $\mathbf{g}[a]$ značí zobrazení přímky na sebe dané vzorcem $x' = -x + a$. Vzdálenost libovolných dvou bodů x_1, x_2 na přímce,

t. j. číslo*) $|x_1 - x|$, a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $f[a]$ a $g[a]$ jsou stejné. V zobrazení $f[a]$ se nezobrazí žádný bod na přímce na sebe, leč když $a = 0$, a v tomto případě máme identické zobrazení přímky na sebe; v zobrazení $g[a]$ se zobrazí na sebe právě jeden bod. Pro skládání zobrazení $f[a]$, $g[a]$ platí tyto vzorce:

$$f[b]\, f[a] = f[a + b]; \qquad g[b]\, f[a] = g[-a + b];$$
$$f[b]\, g[a] = g[a + b]; \qquad g[b]\, g[a] = f[-a + b].$$

Poznámka. Zobrazení $f[a]$ a $g[a]$ se nazývají *euklidovské pohyby na přímce.*

3.10.6. Nechť $f[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe, definované tím, že ke každému bodu v rovině o souřadnicích x, y je přiřazen bod v rovině o souřadnicích x', y', při čemž

$$x' = \quad x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a,$$
$$y' = -x \,.\, \sin\alpha + y \,.\, \cos\alpha + b,$$

kde α, a, b značí nějaká reálná čísla. Podobně, nechť $g[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe dané vzorci:

$$x' = x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a,$$
$$y' = x \,.\, \sin\alpha - y \,.\, \cos\alpha + b.$$

Vzdálenost libovolných dvou bodů $x_1, y_1; x_2, y_2$ v rovině, t. j. číslo $|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}|$, a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $f[\alpha; a, b]$ a $g[\alpha; a, b]$ jsou stejné. V zobrazení $f[\alpha; a, b]$, když α je celý násobek čísla 2π, se na sebe nezobrazí žádný bod v rovině, leč když $a = b = 0$, a v tomto případě máme identické zobrazení roviny na sebe. Když α není celý násobek čísla 2π, pak se na sebe zobrazí právě jeden bod v rovině. V zobrazení $g[\alpha; a, b]$ se nezobrazí na sebe žádný bod v rovině, vyjímajíc případ, že mezi čísly α, a, b je vztah

$$a \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha + b \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\alpha = 0.$$

V tomto případě tvoří všechny body v rovině, které se zobrazí na sebe, jistou přímku. Pro skládání zobrazení $f[\alpha; a, b]$, $g[\alpha; a, b]$ platí tyto vzorce:

---

*) Je-li x libovolné reálné číslo, pak $|x|$ značí t. zv. *absolutní hodnotu* čísla x, t. j. nezáporné z obou čísel: $x, -x$.

$$\mathbf{f}[\beta; c, d]\,\mathbf{f}[\alpha; a, b] =$$
$$= \mathbf{f}[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d],$$
$$\mathbf{g}[\beta; c, d]\,\mathbf{f}[\alpha; a, b] =$$
$$= \mathbf{g}[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d],$$
$$\mathbf{f}[\beta; c, d]\,\mathbf{g}[\alpha; a, b] =$$
$$= \mathbf{g}[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d],$$
$$\mathbf{g}[\beta; c, d]\,\mathbf{g}[\alpha; a, b] =$$
$$= \mathbf{f}[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d].$$

Poznámka. Zobrazení $\mathbf{f}[\alpha; a, b]$ a $\mathbf{g}[\alpha; a, b]$ se nazývají *euklidovské pohyby v rovině.*

3.10.7. Budiž n libovolné přirozené číslo. Když ke každému celému číslu a přiřadíme každé číslo $a + \nu n$, kde $\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, obdržíme symetrickou kongruenci na množině všech celých čísel. Příslušný rozklad má n tříd; čísla $0, 1, \ldots, n-1$ tvoří systém representantů této symetrické kongruence.*)

3.10.8. Když ke každému přirozenému číslu přiřadíme každý jeho přirozený násobek (každého jeho kladného dělitele), obdržíme antisymetrickou kongruenci na množině všech přirozených čísel. Každá dvě přirozená čísla mají vzhledem k této kongruenci horní hranici, kterou jest jejich nejmenší společný násobek (největší společný dělitel), a dolní hranici, kterou jest jejich největší společný dělitel (nejmenší společný násobek). Obě kongruence jsou vzájemně inversní.

3.10.9. Když ke každé části množiny G přiřadíme každou její nadmnožinu (podmnožinu), obdržíme antisymetrickou kongruenci na množině všech částí množiny G. Každé dvě části množiny G mají vzhledem k této kongruenci horní hranici, kterou jest jejich součet (průnik), a dolní hranici, kterou jest jejich průnik (součet). Obě kongruence jsou vzájemně inversní.

---

*) Nechť n je libovolné přirozené číslo. Z gymnasia víme, že ke každému celému číslu a můžeme jednoznačně přiřadit, a to dělením čísla a číslem n, jisté celé číslo q a dále jisté celé číslo r, vyhovující nerovnostem $0 \leqq r \leqq n - 1$, tak, že $a = qn + r$; číslo q se nazývá *podíl* a číslo r *zbytek* dělení čísla a číslem n. V dalších úvahách použijeme častěji této věty: *Když se dvě celá čísla a, b liší jenom o celý násobek čísla n, t. j. když $a - b = nk$, kde k značí nějaké celé číslo, pak jejich zbytky dělení r, s číslem n jsou stejné.* Z rovnic $a - b = nk$, $a = nq' + r$, $b = nq'' + s$ plyne totiž: $n(k - q' + q'') = r - s$, a protože platí nerovnosti: $0 \leqq r$, $s \leqq n - 1$, je tato rovnice splněna, jen když $r = s$.

3.10.10. Když $\mathfrak{g}$ je antisymetrická kongruence na G a některé prvky $a, b \in G$ mají horní hranici $a \smile b$, platí tyto vztahy:

1. $\mathfrak{g}(a \smile b) = \mathfrak{g}a \cap \mathfrak{g}b$ (pravá strana značí ovšem průnik množin $\mathfrak{g}a, \mathfrak{g}b$),

2. $\mathfrak{g}^{-1}(a \smile b) \supset \mathfrak{g}^{-1}a \vee \mathfrak{g}^{-1}b$.

4. O PERMUTACÍCH.

4.1. Definice.

Permutací množiny G rozumíme prosté zobrazení množiny G na sebe. V tomto odstavci se omezíme na úvahy o permutacích *konečné* množiny.

Nechť tedy G značí libovolnou množinu o konečném počtu n ($\geqq 1$) prvků. Z předpokladu, že množina G je konečná, vyplývá, že každé prosté zobrazení $\mathfrak{p}$ množiny G do sebe jest její permutace. Neboť pak množina G a její část $\mathfrak{p}G$, skládající se ze všech obrazů v $\mathfrak{p}$ jednotlivých prvků množiny G, jsou ekvivalentní množiny a tedy, protože jsou konečné, mají týž počet prvků; odtud plyne $G = \mathfrak{p}G$ a tato rovnost vyjadřuje, že každý prvek množiny G má v zobrazení $\mathfrak{p}$ vzor, takže $\mathfrak{p}$ je zobrazení množiny G na sebe.

Prvky množiny G si myslíme označeny písmeny $a, b, \ldots, m$. Ke každé permutaci $\mathfrak{p}$ množiny G můžeme pak jednoznačně přiřaditi symbol tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & m \\ a^* & b^* & \ldots & m^* \end{pmatrix},$$

při čemž $a^*, b^*, \ldots, m^*$ jsou písmena, jimiž jsou označeny prvky $\mathfrak{p}a$, $\mathfrak{p}b, \ldots, \mathfrak{p}m$; pod každým písmenem v prvním řádku stojí tedy v druhém řádku písmeno označující obraz toho prvku v permutaci $\mathfrak{p}$. Protože $\mathfrak{p}G = G$, jsou $a^*, b^*, \ldots, m^*$ opět písmena $a, b, \ldots, m$ napsaná v jistém pořadí. Naopak, každým symbolem toho tvaru, v němž $a^*, b^*, \ldots, m^*$ jsou opět písmena $a, b, \ldots, m$ napsaná v jistém pořadí, je dána jistá permutace množiny G, která každý prvek v prvním řádku zobrazí na prvek, stojící pod ním v druhém řádku. Všimněme si, že tutéž permutaci $\mathfrak{p}$ můžeme podobně vyjádřiti i jinými symboly, z nichž každý