1.6.2. *Mají-li množiny A, B společné prvky, nazývají se incidentní, kdežto v opačném případě se nazývají disjunktní.* První případ je charakterisován nerovností $A \cap B \neq \emptyset$, kdežto druhý rovností $A \cap B = \emptyset$. Příkladem incidentních množin je množina skládající se z jediného slova a a množina [2], jejichž průnikem je první množina. Příkladem disjunktních množin je množina všech kladných sudých čísel a množina všech kladných lichých čísel; jejich průnik je zřejmě $\emptyset$.

1.6.3. Pojem průniku dvou množin se dá opět rozšířit na pojem průniku systému množin: *Průnikem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří do každé z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$.*

Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden průnik, a že tento průnik je podmnožinou v každém prvku systému $\bar{A}$. Průnik systému $\bar{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{p}\bar{A}$; v případě, že jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, symbolem $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{a}$, atp.

1.7. Cvičení.

1.7.1. $A \vee \emptyset = A$; $A \vee A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.

1.7.2. $A \vee (A \cap B) = A$; $A \cap (A \vee B) = A$.

1.7.3. Když $A \subset B$, pak $A \vee B = B$, $A \cap B = A$; naopak, když platí jedna z těchto rovností, pak $A \subset B$.

1.7.4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.7.5. $(A \vee B) \cap C = (A \cap C) \vee (B \cap C)$; $(A \cap B) \vee C = (A \vee C) \cap \cap (B \vee C)$.

1.7.6. Když množina A má konečný počet $n \geqq 0$ prvků, pak má 2^n podmnožin.

2. O ROZKLADECH V MNOŽINÁCH.

2.1. Rozklad v množině.

Nechť G značí (všude v této knížce) libovolnou neprázdnou množinu. *Rozkladem v G rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní.*

Pojem rozkladu v množině je jedním z nejdůležitějších a snad i nejsložitějším pojmem, které se v této knížce vyskytují, a proto doporučujeme, aby si jej čtenář dobře osvojil. Podle definice má tedy každý rozklad v G alespoň jeden prvek, každý prvek rozkladu je neprázdná podmnožina v G a zejména si zapamatujme, že průnik každých dvou prvků rozkladu je prázdná množina. Jednoduchým příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel je systém skládající se z jednoho prvku, jímž je množina všech kladných sudých čísel. Obecněji je příkladem rozkladu v G systém skládající se z jednoho prvku, jímž je libovolná neprázdná podmnožina v G. Systém množin [4] v odst. **1.1** je příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel ≥ 2.

2.2. Rozklad na množině.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad v G. Libovolný prvek v G může býti nejvýše v jednom prvku rozkladu $\bar{A}$, protože každé dva prvky v $\bar{A}$ jsou disjunktní; může se ovšem stát, že není vůbec v žádném prvku rozkladu $\bar{A}$.

Když však rozklad $\bar{A}$ je takový, že každý prvek v G je v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, pak pravíme, že rozklad $\bar{A}$ pokrývá množinu G, nebo že je na množině G nebo že je rozkladem množiny G.

Je-li tedy $\bar{A}$ rozklad množiny G, existuje ke každému prvku $a \in G$ prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že $a \in \bar{a}$. Na př. v hořejších příkladech je poslední příkladem rozkladu *na* množině všech přirozených čísel ≥ 2, neboť každé přirozené číslo ≥ 2 je buď prvočíslo nebo je součinem několika prvočísel, a tedy se vyskytuje v některém prvku toho rozkladu.

Důležitými příklady rozkladů na množině G jsou oba t. zv. *krajní rozklady* množiny G: *největší* a *nejmenší* rozklad množiny G. Největší rozklad množiny G, který označujeme symbolem $\bar{G}_{\max}$, se skládá z jediného prvku, G. Nejmenší rozklad, $\bar{G}_{\min}$, je systém všech množin skládajících se vždy z jednoho prvku množiny G.

Na př. množina, jejímž jediným prvkem je množina všech přirozených čísel, je největší rozklad množiny všech přirozených čísel, a systém všech množin, z nichž každá se skládá z jednoho přirozeného čísla, jest její nejmenší rozklad. Všimněme si, že libovolný rozklad $\bar{A}$ v množině G je rozkladem na množině $\mathbf{s}\bar{A}$.

2.3. Obal a průsek podmnožiny s rozkladem.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad a B libovolnou podmnožinu v G.

2.3.1. *Obal podmnožiny v rozkladu.*

Množina všech prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ incidentních s B je jistá podmnožina v $\bar{A}$; nazýváme ji *obal podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ a označujeme symbolem $B \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset B$.* Množina $B \sqsubset \bar{A}$ může ovšem býti prázdná a tento případ nastane, když a jen když každý prvek v rozkladu $\bar{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní. Ale i jinak se dá tento případ $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ charakterisovat. Jestliže každý prvek v rozkladu $\bar{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní, pak $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$, poněvadž $\mathbf{s}\bar{A}$ obsahuje jenom prvky, které jsou v některém prvku rozkladu $\bar{A}$; jestliže naopak $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$, pak každý prvek rozkladu $\bar{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní, neboť každý prvek v $\bar{A}$ je částí množiny $\mathbf{s}\bar{A}$. Můžeme tedy říci, že rovnost $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ platí, když a jen když $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$. Je-li $B \sqsubset \bar{A} \neq \emptyset$, pak jest ovšem $B \sqsubset \bar{A}$ rozkladem v G.

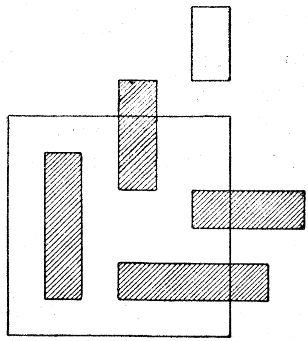
2.3.2. *Průsek podmnožiny s rozkladem.*

Průsek rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B nebo podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$, je množina neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\bar{A}$ s podmnožinou B; označujeme jej symbolem $\bar{A} \sqcap B$ nebo $B \sqcap \bar{A}$.

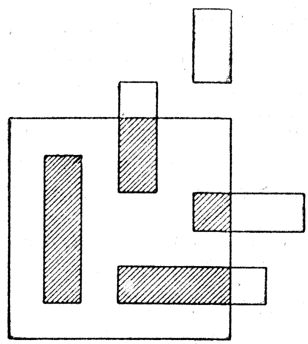
Také průsek $\bar{A} \sqcap B$ může být prázdná množina a je zřejmé, že tento případ opět nastane, když (a jen když) každý prvek v rozkladu $\bar{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní nebo, podle hořejší úvahy, když (a jen když) $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$. Jinak je ovšem $\bar{A} \sqcap B$ rozklad v G a dokonce rozklad v B.

Všimněme si, že když $\bar{A}$ je rozklad *na* množině G a $B \neq \emptyset$, pak $B \sqsubset \bar{A}$ i $\bar{A} \sqcap B$ jsou neprázdné systémy množin, z nichž první je podmnožina v $\bar{A}$ a druhý je rozklad na B. Každý rozklad $\bar{A}$ na G a neprázdná podmnožina B v G určují tedy jednak jistou neprázdnou podmnožinu v $\bar{A}$, totiž obal $B \sqsubset \bar{A}$, jednak jistý rozklad na B, totiž průsek $\bar{A} \sqcap B$.

Příklady obalu a průseku rozkladu s podmnožinou jsou znázorněny na obr. 1 a 2, v nichž G je množina všech bodů v nákresné rovině, B je množina všech bodů uvnitř a na obvodě čtverce a rozklad $\bar{A}$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech jednotlivých obdélníků. Vyčárkováním jsou vyznačeny v obr. 1 prvky obalu $B \sqsubset \bar{A}$ a v obr. 2 prvky průseku $\bar{A} \sqcap B$.



Obr. 1.



Obr. 2.

2.4. Řetězce v rozkladu.

Nechť $\overline{A}, \overline{B}$ jsou libovolné rozklady na G.

2.4.1. *Definice.* Nechť $\bar{a}, \overline{p} \in \overline{A}$ jsou libovolné prvky.

Konečná neprázdná podmnožina v rozkladu $\overline{A}$, jejíž prvky lze označit symboly majícími určité pořadí, na př.

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha, \quad (\alpha \geqq 2),$$

a to tak, že $\bar{a}_1 = \bar{a}$, $\bar{a}_\alpha = \overline{p}$, a že prvky označené vždy dvěma sousedními symboly $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$ jsou incidentní s některým prvkem $b_\beta \in \overline{B}$, nazývá se řetězec v rozkladu $\overline{A}$ od $\bar{a}$ do $\overline{p}$, určený rozkladem $\overline{B}$. Stručněji mluvíme o *řetězci* v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ *od* $\bar{a}$ do $\overline{p}$.

Poznamenejme, že dva různé symboly, na př. $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, mohou značit týž prvek řetězce.

Když existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\overline{p}$, pravíme, že se prvek $\overline{p}$ dá *spojit* s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\overline{B}$, nebo stručněji, že se prvek $\overline{p}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$.

2.4.2. *Vlastnosti řetězců.*

2.4.2.1. *O libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \overline{A}$ platí tyto výroky:*

a. *Prvek $\bar{a}$ se dá spojit s prvkem $\bar{a}$.*

b. *Když se prvek $\bar{b}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$ a prvek $\bar{c}$ s $\bar{b}$, pak se prvek $\bar{c}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$.*

c. *Když se prvek $\bar{b}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$, pak se $\bar{a}$ dá spojit s $\bar{b}$.*

Platnost těchto výroků plyne snadno z definice řetězce a přenecháváme čtenáři, aby si provedl příslušné důkazy.

Přihlížejíce k platnosti výroku **c**, mluvíme zpravidla o řetězci mezi dvěma prvky nebo o tom, že se dva prvky dají spojit, nevyzdvihujíce, který z nich se dá spojit s kterým.

2.4.2.2. *Když se prvky $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ dají spojit s některým prvkem $\bar{c} \in \bar{A}$, pak se dají spojit navzájem.*

Vskutku, když je předpoklad splněn, dá se spojit prvek $\bar{a}$ s $\bar{c}$ a podle **2.4.2.1c** prvek $\bar{c}$ s $\bar{b}$; přihlížejíce k výroku **2.4.2.1b** soudíme, že se prvek $\bar{a}$ dá spojit s $\bar{b}$.

2.4.2.3. Nechť $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$, $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ jsou libovolné prvky a předpokládejme, že prvky $\bar{a}, \bar{b}$ a rovněž prvky $\bar{p}, \bar{q}$ jsou incidentní. *Když se dají spojit prvky $\bar{a}, \bar{p}$ v rozkladu $\bar{B}$, pak se dají spojit prvky $\bar{b}, \bar{q}$ v rozkladu $\bar{A}$.*

Vskutku, když existuje řetězec v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha, \ (\bar{a}_1 = \bar{a}, \ \bar{a}_\alpha = \bar{p}),$$

jsou každé dva sousední prvky $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ incidentní s jistým prvkem $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$, a tedy prvky $\bar{b}_\beta, \bar{b}_{\beta+1}$ jsou incidentní s prvkem $\bar{a}_{\beta+1}$. Mimo to je prvek $\bar{b}$ incidentní s $\bar{a}_1$ a prvek $\bar{q}$ s $\bar{a}_\alpha$. Z toho vidíme, že

$$\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_\alpha \ (\bar{b}_0 = \bar{b}, \ \bar{b}_\alpha = \bar{q})$$

je řetězec v $\{\bar{B}, \bar{A}\}$ od $\bar{b}$ do $\bar{q}$.

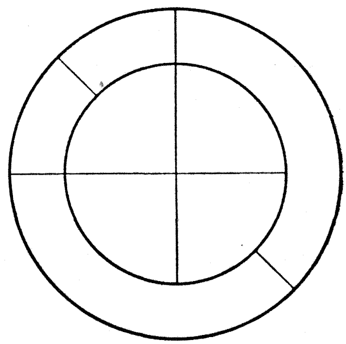
2.5. Zákryt a zjemnění rozkladu.

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ jsou libovolné rozklady na G.

2.5.1. *Definice.* Mezi rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ může být takový vztah, že každý prvek jednoho z nich, na př. rozkladu $\bar{A}$, je součtem některých prvků rozkladu $\bar{B}$. V tom případě pravíme, že $\bar{A}$ *je zákryt rozkladu* $\bar{B}$ nebo že $\bar{B}$ *je zjemnění rozkladu* $\bar{A}$, a tento vztah vyjadřujeme symbolem $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$. Zřejmě na př. platí vztahy: $\bar{G}_{\max} \geqq \bar{A} \geqq \bar{G}_{\min}$.

Předpokládejme, že mezi rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ platí vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$. Pak je každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ součtem některých prvků v $\bar{B}$ a je zřejmé, že systém těchto prvků je rozkladem prvku $\bar{a}$. Rovněž je zřejmé, že systém všech podmnožin v rozkladu $\bar{B}$, z nichž každá se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{B}$, které jsou části vždy téhož prvku v $\bar{A}$, je jistý rozklad $\bar{\bar{B}}$ rozkladu $\bar{B}$; pravíme, že tento rozklad $\bar{\bar{B}}$ *vynucuje* zákryt $\bar{A}$. Můžeme tedy říci, že rozklad $\bar{B}$ obdržíme z rozkladu $\bar{A}$, když každý prvek rozkladu $\bar{A}$ nahradíme vhodným jeho rozkladem; a rozklad $\bar{A}$ získáme z rozkladu $\bar{B}$, když na $\bar{B}$ zvolíme vhodný rozklad $\bar{\bar{B}}$ a utvoříme součty všech prvků rozkladu $\bar{B}$, které leží vždy v témže prvku rozkladu $\bar{\bar{B}}$.

2.5.2. *Příklad.* Na obr. 3 je znázorněn příklad zákrytu $\bar{A}$ a zjemnění $\bar{B}$. G je množina všech bodů na obvodě a uvnitř větší kružnice. $\bar{A}$ se skládá ze dvou prvků, totiž z množiny bodů na obvodě větší kružnice a uvnitř mezikruží a z množiny bodů na obvodě a uvnitř menší kružnice a konečně $\bar{B}$ se skládá z množin bodů ve výsecích mezikruží a ve výsecích menší kružnice, při čemž body na hranicích se počítají vždy jenom k jednomu výseku.



Obr. 3.

2.5.3. *Vlastnosti zákrytu a zjemnění.* Nechť $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ jsou libovolné rozklady na G.

2.5.3.1. Především ukážeme, že *vztah* $\bar{A} \geqq \bar{B}$ *platí tehdy a jen tehdy, když pro každé dva incidentní prvky* $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ *je* $\bar{a} \supset \bar{b}$.

Vskutku, předpokládejme, že je $\bar{A} \geqq \bar{B}$. Buďte $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ libovolné incidentní prvky, takže $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Potom $\bar{a}$ je součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\bar{B}$. Jednou z nich je $\bar{b}$, neboť $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ a prvky rozkladu $\bar{B}$ jsou disjunktní. Odtud plyne $\bar{a} \supset \bar{b}$. — Nechť naopak pro každé dva incidentní prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ platí vztah $\bar{a} \supset \bar{b}$. Potom $\bar{a}$ je součtem těch podmnožin v G, které jsou prvky rozkladu $\bar{B}$ a jsou incidentní s $\bar{a}$. Z toho vidíme, že platí vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

2.5.3.2. *Dále platí tyto výroky:*

a. $\bar{A} \geqq \bar{A}$.

b. *Ze vztahů* $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{C}$ *plyne* $\bar{A} \geqq \bar{C}$.

c. *Ze vztahů* $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$ *plyne* $\bar{A} = \bar{B}$.

Platnost výroků **a** a **b** je zřejmá. Pokud jde o výrok **c** soudíme takto: Předpokládejme, že platí vztahy $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$. Budiž $\bar{b} \in \bar{B}$ libovolný prvek. Potom existují prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ takové, že jest $\bar{a}_1 \supset \bar{b} \supset \bar{a}_2$. Vidíme, že množiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ jsou incidentní a tudíž identické, neboť jsou prvky téhož rozkladu. Máme tedy $\bar{a}_1 = \bar{b} = \bar{a}_2$ a vychází $\bar{b} \in \bar{A}$. Tím je zjištěno, že rozklad $\bar{B}$ je částí rozkladu $\bar{A}$, t. j. $\bar{B} \subset \bar{A}$, a podobně vidíme, že rozklad $\bar{A}$ je částí rozkladu $\bar{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$. Odtud vychází $\bar{A} = \bar{B}$.

2.5.4. *Společný zákryt a společné zjemnění dvou rozkladů.* Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

Společným zákrytem, stručněji: *zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$, rozumíme každý rozklad na G, který je zákrytem každého rozkladu $\bar{A}, \bar{B}$.*

Podobně rozumíme společným zjemněním, stručněji *zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$, každý rozklad na G, který je zjemněním každého rozkladu $\bar{A}, \bar{B}$.*

Na př. největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ je společným zákrytem a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

Z věty **2.5.3.2b** vyplývá, že *každý zákryt každého společného zákrytu rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je opět jejich zákrytem*; *podobně je každé zjemnění každého společného zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ opět zjemněním těchto rozkladů.*

Významný pokrok ve směru těchto úvah, který má odezvu v mnoha důležitých výsledcích, o nichž v dalším výkladu uslyšíme, je dán pojmem nejmenšího společného zákrytu a největšího společného zjemnění dvou rozkladů. O těchto pojmech pojednáme v odstavcích **2.6**, **2.7**, **2.8**.

2.6. Nejmenší společný zákryt dvou rozkladů.

V odst. **2.5.4** jsme viděli, že každý zákryt každého společného rozkladu dvou rozkladů je opět jejich zákrytem. Důležitý poznatek je ten, že mezi všemi společnými zákryty dvou rozkladů jest jeden nejmenší; nejmenší v tom smyslu, že každý společný zákryt obou rozkladů jest jeho zákrytem. Tento význačný společný zákryt se nazývá *nejmenší společný zákryt*, stručněji: *nejmenší zákryt* obou rozkladů.

Buďte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ libovolné rozklady na G.

2.6.1. *Konstrukce rozkladu* $[\bar{A}, \bar{B}]$. V tomto odstavci popíšeme konstrukci jistého rozkladu na G, který značíme $[\bar{A}, \bar{B}]$ a o němž v dalším zjistíme (odst. **2.6.2.3**), že je nejmenším společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

Budiž $\bar{\bar{A}}$ systém všech podmnožin v rozkladu $\bar{A}$ vyznačujících se touto vlastností: Každá podmnožina $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se vesměs dají spojit v rozkladu $\bar{B}$ s některým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$.

Ukážeme, že $\bar{\bar{A}}$ je rozklad na rozkladu $\bar{A}$.

Především vidíme, že každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ leží v některé podmnožině $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$. To plyne z toho, že se prvek $\bar{a}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$, jak jsme zjistili v **2.4.2.1 a**, a tedy leží v jisté podmnožině $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$, skládající se ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$.

Dále ukážeme, že každé dva prvky systému $\bar{\bar{A}}$ jsou buď disjunktní nebo identické. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{A}}$, z nichž $\bar{\bar{a}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s jistým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$, a $\bar{\bar{b}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s jistým prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$. Předpokládejme, že prvky $\bar{\bar{a}}$ a $\bar{\bar{b}}$ jsou incidentní, takže mají společný jistý prvek $\bar{c} \in \bar{A}$. Prvek $\bar{c}$ leží v $\bar{\bar{a}}$ a proto se dá spojit s prvkem $\bar{a}$; leží v $\bar{\bar{b}}$ a tedy se dá spojit s prvkem $\bar{b}$. Odtud soudíme, přihlížejíce k výroku **2.4.2.1c**, že se prvky $\bar{a}, \bar{b}$ dají spojit s prvkem $\bar{c}$, a dále, přihlížejíce k větě **2.4.2.2**, že se dají spojit navzájem. Každý prvek $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ se dá spojit s prvkem $\bar{a}$ a ten opět s prvkem $\bar{b}$, jak jsme právě viděli. Z toho plyne, podle **2.4.2.1b**, že se prvek $\bar{x}$ dá spojit s prvkem $\bar{b}$, takže vychází $\bar{\bar{a}} \subset \bar{\bar{b}}$. Podobně zjistíme, že je $\bar{\bar{b}} \subset \bar{\bar{a}}$, a máme $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$.

Tím jsme zjistili, že systém podmnožin $\bar{\bar{A}}$ v rozkladu $\bar{A}$ je rozkladem na $\bar{A}$.

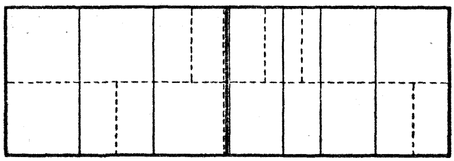
Všimněme si, že každé dva prvky v $\bar{A}$, které jsou v témže prvku rozkladu $\bar{\bar{A}}$, se dají navzájem spojit, kdežto žádné dva, které v témže prvku nejsou, se spojit nedají.

Rozklad $\bar{\bar{A}}$ vynucuje jistý zákryt rozkladu $\bar{A}$, který označíme $[\bar{A}, \bar{B}]$. Máme tedy

$$[\bar{A}, \bar{B}] \geq \bar{A}.$$

Připomeňme, že každý prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ je součtem všech prvků rozkladu $\overline{A}$, které leží v některém prvku rozkladu $\overline{\overline{A}}$, takže je součtem všech prvků rozkladu $\overline{A}$, které se dají spojit v rozkladu $\overline{B}$ s některým prvkem $\overline{a} \in \overline{A}$, který je částí prvku $\overline{u}$.

Na obr. 4 je znázorněna množina G, skládající se ze všech bodů ležících na obvodě a uvnitř velkého obdélníka, a na ní dva rozklady $\overline{A}$, $\overline{B}$.



Obr. 4.

Prvky rozkladu $\overline{A}$ ($\overline{B}$) jsou množiny bodů ležících na obvodech a uvnitř svislých (vodorovných) obdélníků vyznačených plnými (čárkovanými) čarami. Body na hranicích prvků každého rozkladu se ovšem počítají vždy jenom k jednomu prvku. Prvky rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$ jsou množiny bodů na obvodech a uvnitř větších obdélníků vyznačených silnějšími čarami.

2.6.2. *Vlastnosti rozkladu* $[\overline{A}, \overline{B}]$.

2.6.2.1. *Rovnost* $[\overline{A}, \overline{B}] = \overline{A}$ *a vztah* $\overline{A} \geqq \overline{B}$ *platí současně.*

Důkaz. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$ jsou libovolné incidentní prvky. Neplatí-li $\overline{a} \supset \overline{b}$, existuje prvek $\overline{p} \in \overline{A}$, který je incidentní s $\overline{b}$ a je různý od $\overline{a}$. Prvky $\overline{a}$, $\overline{p}$, seřazené v tomto pořadí, tvoří řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$, a tedy množina $\overline{a} \vee \overline{p}$ je částí jistého prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$. Prvek $\overline{u}$ je tedy součtem alespoň dvou různých prvků rozkladu $\overline{A}$, a tudíž není prvkem rozkladu $\overline{A}$, což odporuje předpokladu. Máme tedy $\overline{a} \supset \overline{b}$, a vychází $\overline{A} \geqq \overline{B}$ (podle **2.5.3.1**).

b) Nechť platí vztah $\overline{A} \geqq \overline{B}$. Nechť $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ je libovolný prvek. Z definice rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$ plyne, že existuje prvek $\overline{a} \in \overline{A}$, vyznačující se tím, že $\overline{u}$ je součtem všech prvků $\overline{p} \in \overline{A}$, k nimž existuje řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\overline{a}$ do $\overline{p}$:

$$\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\alpha \quad (\overline{a}_1 = \overline{a},\ \overline{a}_\alpha = \overline{p}).$$

Podle definice řetězce existuje ke každým dvěma sousedním prvkům $\overline{a}_\beta$, $\overline{a}_{\beta+1}$ prvek $\overline{b}_\beta \in \overline{B}$ incidentní s $\overline{a}_\beta$, $\overline{a}_{\beta+1}$. Podle předpokladu a podle věty **2.5.3.1** máme $\overline{b}_\beta \subset \overline{a}_\beta \cap \overline{a}_{\beta+1}$ a odtud plyne $\overline{a}_\beta = \overline{a}_{\beta+1}$, takže $\overline{a} = \overline{p}$. Vychází tedy $\overline{u} = \overline{a}$ a tudíž $[\overline{A}, \overline{B}] \leqq \overline{A}$. Protože současně platí vztah $\geqq$, jak jsme viděli v odst. **2.6.1**, platí hořejší rovnost (podle **2.5.3.2c**).

2.6.2.2. *Platí tyto rovnosti:*

a. $[\bar{A}, \bar{B}] = [\bar{B}, \bar{A}]$;
b. $[\bar{A}, \bar{A}] = \bar{A}$;
c. $[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$.

Důkaz. a) Nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, $\bar{v} \in [\bar{B}, \bar{A}]$ jsou libovolné incidentní prvky. Protože $\bar{u}$ ($\bar{v}$) je součtem jistých prvků rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{B}$), existují prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ takové, že $\bar{a} \in \bar{u}$, $\bar{b} \in \bar{v}$ a že jsou incidentní. Protože rozklad $\bar{A}$ pokrývá G, leží každý prvek $p \in \bar{u}$ v jistém prvku $\bar{p} \in \bar{A}$. Podle **2.5.3.1** máme $\bar{u} \supset \bar{p}$ a z toho, že prvky $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, soudíme, že se prvek $\bar{p}$ dá spojit v rozkladu $\bar{B}$ s prvkem $\bar{a}$. Protože rozklad $\bar{B}$ pokrývá G, leží p v jistém prvku $\bar{q} \in \bar{B}$, který je ovšem incidentní s $\bar{p}$. Přihlížejíce k větě **2.4.2.2**, soudíme, že se prvek $\bar{q}$ dá spojit v rozkladu $\bar{A}$ s prvkem $\bar{b}$. Odtud plyne $\bar{v} \supset \bar{q}$, a tedy také $\bar{v} \supset \bar{u}$. Máme tedy $[\bar{B}, \bar{A}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$, podle **2.5.3.1.** Současně však z obdobných důvodů platí vztah $\leqq$, a tak vychází $[\bar{A}, \bar{B}] = [\bar{B}, \bar{A}]$, podle **2.5.3.2c**.

b) Protože platí $\bar{A} \geqq \bar{A}$, platí také $[\bar{A}, \bar{A}] = \bar{A}$, podle **2.6.2.1.**

c) Když některé prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ jsou incidentní s některým prvkem $\bar{z} \in [\bar{B}, \bar{C}]$, pak leží v témže prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$. Neboť pak existují prvky $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ takové, že $\bar{b}, \bar{q} \subset \bar{z}$, $\bar{a}_1$ a $\bar{b}$ jsou incidentní a rovněž $\bar{a}_2$ a $\bar{q}$, a existuje řetězec v $\{\bar{B}, \bar{C}\}$ od $\bar{b}$ do $\bar{q}$:

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\gamma \quad (\bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\gamma = \bar{q}).$$

Každý prvek $\bar{b}_\delta$ tohoto řetězce je částí jistého prvku $\bar{u}_\delta \in [\bar{B}, \bar{A}] = [\bar{A}, \bar{B}]$, kde $\delta = 1, \ldots, \gamma$. Z toho, že prvek $\bar{a}_1$ ($\bar{a}_2$) je incidentní s $\bar{b}_1$ ($\bar{b}_\gamma$) a $\bar{b}_1$ ($\bar{b}_\gamma$) je částí prvku $\bar{u}_1$ ($\bar{u}_\gamma$), plyne, že $\bar{a}_1$ ($\bar{a}_2$) je incidentní s $\bar{u}_1$ ($\bar{u}_\gamma$), a odtud soudíme, podle **2.5.3.1**: $\bar{a}_1 \subset \bar{u}_1$, $\bar{a}_2 \subset \bar{u}_\gamma$. Protože každé dva sousední prvky $\bar{b}_\delta, \bar{b}_{\delta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem $\bar{c}_\delta \in \bar{C}$, platí totéž o každých dvou prvcích $\bar{u}_\delta, \bar{u}_{\delta+1}$, a tedy $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_\gamma$ je řetězec v $\{[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}\}$ od $\bar{u}_1$ do $\bar{u}_\gamma$. Odtud plyne, že prvky $\bar{u}_1, \bar{u}_\gamma$, a tedy i prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, leží v témže prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$.

Nuže, nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$, $\bar{v} \in [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$ jsou libovolné incidentní prvky. Pak existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{a} \subset \bar{u} \cap \bar{v}$ a $\bar{u}$ je součtem všech prvků $\bar{p} \in \bar{A}$, k nimž existuje řetězec v $\{\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$:

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}).$$

Každé dva sousední prvky $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem rozkladu $[\bar{B}, \bar{C}]$ a tedy leží, jak jsme právě zjistili, v témže prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$. Odtud a ze vztahu $\bar{v} \supset \bar{a}_1$ plyne $\bar{v} \supset \bar{a}_\alpha$, t. j. $\bar{v} \supset \bar{p}$. Vychází tedy $\bar{v} \supset \bar{u}$ a podle věty **2.5.3.1** soudíme, že je $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] \geqq$ $\geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$. Odtud a z hořejšího výsledku **a** máme dále:

$$[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{B}, \bar{C}], \bar{A}] \geqq [\bar{B}, [\bar{C}, \bar{A}]] = [[\bar{C}, \bar{A}], \bar{B}] \geqq$$
$$\geqq [\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] \geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]],$$

takže máme, podle **2.5.3.2b, c**:

$$[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$$

a tím je důkaz ukončen.

2.6.2.3. *Rozklad* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *je nejmenším společným zákrytem rozkladů* $\bar{A}, \bar{B}$.

Vskutku, podle své konstrukce je rozklad $[\bar{A}, \bar{B}]$ zákrytem rozkladu $\bar{A}$ a podle **2.6.2.2a** je zákrytem rozkladu $\bar{B}$. Je tedy společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Dále buďiž $\bar{X}$ libovolný společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$, takže máme podle **2.6.2.1**:

$$[\bar{X}, \bar{A}] = \bar{X}, \qquad [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X}.$$

Odtud a z **2.6.2.2c** vychází:

$$[\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{X}, \bar{A}], \bar{B}] = [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X},$$

a tím je zjištěno, že $\bar{X}$ je zákrytem rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$.

Každý společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je tedy zákrytem jejich společného zákrytu $[\bar{A}, \bar{B}]$. Tím je ukázáno, že rozklad $[\bar{A}, \bar{B}]$ je nejmenším společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

2.7. Největší společné zjemnění dvou rozkladů.

V odst. **2.5.4** jsme viděli, že každé zjemnění každého společného zjemnění dvou rozkladů je opět jejich zjemněním. Důležitý poznatek je ten, že mezi všemi společnými zjemněními dvou rozkladů jest jedno největší; největším v tom smyslu, že každé společné zjemnění obou rozkladů jest jeho zjemněním. Toto význačné společné zjemnění se nazývá *největší společné zjemnění*, stručněji: *největší zjemnění*, obou rozkladů.

Buďte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ libovolné rozklady na G.

2.7.1. *Konstrukce rozkladu* $(\overline{A}, \overline{B})$. V tomto odstavci popíšeme konstrukci jistého rozkladu na G, který označíme $(\overline{A}, \overline{B})$ a o němž v dalším zjistíme (odst. **2.7.2.3**), že je největším společným zjemněním rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$.

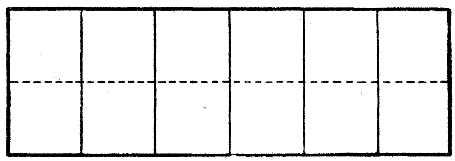
Když každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ nahradíme jeho rozkladem $\bar{a} \sqcap \overline{B}$, obdržíme jistý rozklad na G, který označujeme $(\overline{A}, \overline{B})$.

Rozklad $(\overline{A}, \overline{B})$ je tedy systém všech neprázdných průniků vždy některého prvku $\bar{a} \in \overline{A}$ s některým prvkem $\bar{b} \in \overline{B}$.

Rozklad $(\overline{A}, \overline{B})$ je zřejmě zjemněním rozkladu $\overline{A}$, t. j.

$$(\overline{A}, \overline{B}) \leqq \overline{A}.$$

Na obr. 5 je znázorněna množina G, skládající se ze všech bodů ležících na obvodě a uvnitř velkého obdélníka, a na ní dva rozklady $\overline{A}, \overline{B}$. Prvky rozkladu $\overline{A}$ $(\overline{B})$ jsou množiny bodů ležících na obvodech a uvnitř svislých (vodorovných) obdélníků vyznačených plnými (čárkovanými) čarami. Body na hranicích prvků každého rozkladu se ovšem počítají vždy jenom k jednomu prvku. Prvky rozkladu $(\overline{A}, \overline{B})$ jsou množiny bodů na obvodech a uvnitř čtverců vytvořených svislými a vodorovnými obdélníky.



Obr. 5.

2.7.2. *Vlastnosti rozkladu* $(\overline{A}, \overline{B})$.

2.7.2.1. *Rovnost* $(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$ *a vztah* $\overline{A} \leqq \overline{B}$ *platí současně.*

Důkaz. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$ jsou libovolné incidentní prvky. Pak platí vztahy: $\bar{a} \cap \bar{b} \in \bar{a} \sqcap \overline{B} \subset (\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$ a z nich plyne $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Odtud vychází $\bar{a} \subset \bar{b}$ a dále $\overline{A} \leqq \overline{B}$, podle **2.5.3.1.**

b) Nechť platí vztah $\overline{A} \leqq \overline{B}$. Pak každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ je částí jistého prvku rozkladu $\overline{B}$, a tedy $\bar{a} \sqcap \overline{B}$ se skládá z jediného prvku $\bar{a}$. Odtud plyne $(\overline{A}, \overline{B}) \geqq \overline{A}$. Protože současně platí vztah $\leqq$, jak jsme viděli v odst. **2.7.1**, platí hořejší rovnost podle **2.5.3.2c.**

2.7.2.2. *Platí tyto rovnosti:*

a. $(\bar{A}, \bar{B}) = (\bar{B}, \bar{A})$;

b. $(\bar{A}, \bar{A}) = \bar{A}$;

c. $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) = ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$.

Důkaz. a) Každý prvek $\bar{v} \in (\bar{A}, \bar{B})$ je prvkem rozkladu $\bar{a} \sqcap \bar{B}$, kde $\bar{a}$ značí některý prvek v $\bar{A}$, takže je $\bar{v} = \bar{a} \cap \bar{b}$, kde $\bar{b} \in \bar{B}$ značí vhodný prvek. Odtud plyne: $\bar{v} \in \bar{b} \sqcap \bar{A} \subset (\bar{B}, \bar{A})$. Máme tedy $(\bar{A}, \bar{B}) \subset (\bar{B}, \bar{A})$ a z obdobných důvodů platí vztah $\supset$. Tím je zjištěna platnost rovnosti **a**.

b) Protože platí $\bar{A} \leq \bar{A}$, platí také $(\bar{A}, \bar{A}) = \bar{A}$, podle **2.7.2.1.**

c) Nechť $\bar{v} \in (\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C}))$, takže je $\bar{v} = \bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c})$, kde $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ jsou vhodné prvky. Protože platí $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c}$ (**1.7.4**) a dále $(\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c} \in ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$, vidíme, že platí vztah $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) \subset$ $\subset ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$. Odtud a z hořejšího výsledku **a** plyne snadno, že současně platí vztah $\supset$. Tím je zjištěna platnost rovnosti **c**.

2.7.2.3. *Rozklad $(\bar{A}, \bar{B})$ je největším společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.*

Vskutku, podle své konstrukce je rozklad $(\bar{A}, \bar{B})$ zjemněním rozkladu $\bar{A}$ a podle **2.7.2.2a** je zjemněním rozkladu $\bar{B}$. Je tedy společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Dále budiž $\bar{Z}$ libovolné společné zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$, takže máme, podle **2.7.2.1**:

$$(\bar{Z}, \bar{A}) = \bar{Z}, \qquad (\bar{Z}, \bar{B}) = \bar{Z}.$$

Odtud a z **2.7.2.2c** vychází:

$$(\bar{Z}, (\bar{A}, \bar{B})) = ((\bar{Z}, \bar{A}), \bar{B}) = (\bar{Z}, \bar{B}) = \bar{Z}$$

a tím je zjištěno, že $\bar{Z}$ je zjemněním rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$.

Každé společné zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je tedy zjemněním jejich společného zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$. Tím je ukázáno, že zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ je největším společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

2.8. Vztahy mezi nejmenším společným zákrytem a největším společným zjemněním dvou rozkladů.

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

Platí tyto rovnosti:

$$[\bar{A}, (\bar{A}, \bar{B})] = \bar{A}, \qquad (\bar{A}, [\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{A}.$$

Vskutku, ze vztahu $\overline{A} \geqq (\overline{A}, \overline{B})$ a z věty **2.6.2.1** plyne první rovnost a podobně ze vztahu $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{A}$ a z věty **2.7.2.1** druhá.

2.9. Doplňkové rozklady.

Ze vztahů mezi dvěma rozklady na množině zasluhuje vedle vztahů daných pojmem zákrytu a zjemnění zvláštní pozornosti případ, že oba rozklady jsou doplňkové.

Nechť $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ jsou libovolné rozklady na G.

2.9.1. *Definice.* Podle definice nejmenšího společného zákrytu $[\overline{A}, \overline{B}]$ je každý prvek $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ součtem jistých prvků $\overline{a} \in \overline{A}$ a současně součtem jistých prvků $\overline{b} \in \overline{B}$. *Rozklad $\overline{A}$ nazýváme doplňkový k rozkladu $\overline{B}$, když každý prvek $\overline{a} \in \overline{A}$ je incidentní se všemi prvky rozkladu $\overline{B}$, které leží v témže prvku $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ jako prvek $\overline{a}$.*

Když na př. rozklad $\overline{A}$ je zákryt rozkladu $\overline{B}$, je rozklad $\overline{A}$ doplňkový k $\overline{B}$.

Na př. rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ znázorněné na obr. 5 mají nejmenší společný zákryt $\overline{G}_{\max}$, který se skládá z jediného prvku $\overline{u}$ $(= G)$. Vidíme, že každý prvek $\overline{a} \in \overline{A}$ je incidentní se všemi prvky rozkladu $\overline{B}$, které leží v témže prvku $\overline{u}$ jako prvek $\overline{a}$. Rozklad $\overline{A}$ je tedy doplňkový k $\overline{B}$.

2.9.2. *Vlastnosti doplňkových rozkladů.*

2.9.2.1. *Platí tyto výroky:*

a. *Rozklad $\overline{A}$ je doplňkový k $\overline{A}$.*

b. *Když rozklad $\overline{A}$ je doplňkový k $\overline{B}$, pak rozklad $\overline{B}$ je doplňkový k $\overline{A}$.*

Vskutku, platnost výroku **a** je zřejmá. Abychom zjistili platnost výroku **b**, připusťme předpoklad a odmítněme tvrzení. Pak existuje prvek $\overline{b} \in \overline{B}$, ležící v jistém prvku $\overline{u} \in [\overline{B}, \overline{A}]$, který není incidentní se všemi prvky rozkladu $\overline{A}$ ležícími v $\overline{u}$. Z toho soudíme, že prvek $\overline{b}$ není incidentní s jistým prvkem $\overline{a} \in \overline{A}$ ležícím v $\overline{u}$. Odtud plyne, že prvek $\overline{a}$ není incidentní se všemi prvky rozkladu $\overline{B}$ ležícími v $\overline{u}$, což odporuje předpokladu, že rozklad $\overline{A}$ je doplňkový k $\overline{B}$. Tím je platnost výroku **b** zjištěna.

Přihlížejíce k platnosti výroku **b** mluvíme obvykle o doplňkových rozkladech, aniž vyzdvihujeme, který z nich je doplňkový ku kterému.

Na následujícím příkladě poznáme, že *když jsou doplňkovými rozklady* $\overline{A}, \overline{B}$ *a současně rozklady* $\overline{B}, \overline{C}$, *nemusí býti doplňkovými rozklady* $\overline{A}, \overline{C}$.

Nechť $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ je množina skládající se ze šesti prvků. Označme dále:

$$\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\},\ \bar{a}_2 = \{a_3, a_4\},\ \bar{a}_3 = \{a_5, a_6\};$$
$$\bar{b}_1 = \{a_1, a_3, a_5\},\ \bar{b}_2 = \{a_2, a_4, a_6\};$$
$$\bar{c}_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ \bar{c}_2 = \{a_4, a_5, a_6\},$$

takže na G máme rozklady

$$\overline{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\},\ \overline{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\},\ \overline{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}.$$

Každý prvek $\bar{a}_\alpha$ je incidentní s každým prvkem $\bar{b}_\beta$ a každý prvek $\bar{b}_\beta$ je incidentní s každým prvkem $\bar{c}_\gamma$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $\beta, \gamma = 1, 2$). Odtud plyne $[\overline{A}, \overline{B}] = \overline{G}_{\max}$, $[\overline{B}, \overline{C}] = \overline{G}_{\max}$ a vidíme, že rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ a současně rozklady $\overline{B}, \overline{C}$ jsou doplňkové. Dále jsou oba prvky $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ incidentní s prvkem $\bar{a}_2$, takže $[\overline{A}, \overline{C}] = \overline{G}_{\max}$, avšak na př. prvky $\bar{a}_1, \bar{c}_2$ incidentní nejsou. Z toho vidíme, že rozklady $\overline{A}, \overline{C}$ nejsou doplňkové.

2.9.2.2. *Když každé dva prvky* $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$, *ležící v témže prvku nějakého společného zákrytu* $\overline{C}$ *rozkladů* $\overline{A}, \overline{B}$, *jsou incidentní, pak* $\overline{C} = [\overline{A}, \overline{B}]$, *a tudíž rozklady* $\overline{A}, \overline{B}$ *jsou doplňkové.*

Vskutku, nechť $\overline{C}$ je nějaký společný zákryt rozkladů $\overline{A}, \overline{B}$ a nechť $\bar{c} \in \overline{C}$. Pak $\overline{C}$ je součtem jistých prvků rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$. Nechť $\bar{u}, \bar{v}$ jsou prvky rozkladu $[\overline{A}, \overline{B}]$ ležící v $\bar{c}$. Každý prvek $\bar{a}_1 \in \overline{A}$ ležící v $\bar{u}$ je incidentní s některým prvkem $\bar{b} \in \overline{B}$, který pak nutně leží v $\bar{u}$ a tedy v $\bar{c}$. Mají-li rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ výše popsanou vlastnost, pak prvek $\bar{b}$ je incidentní s každým prvkem $\bar{a}_2 \in \overline{A}$ ležícím v prvku $\bar{v}$, a tedy prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, seřazené v tomto pořadí, tvoří řetězec v $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_2$. Odtud plyne $\bar{v} = \bar{u}$ a tedy $\bar{c} = \bar{u}$.

2.9.2.3. *Rozklady* $\overline{A}, \overline{B}$ *jsou doplňkové tehdy a jen tehdy, když pro každé dva prvky* $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \overline{A}$, *ležící v témže prvku* $\bar{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$, *platí rovnost:* $\bar{a}_1 \sqsubset \overline{B} = \bar{a}_2 \sqsubset \overline{B}$.

Důkaz. a) Nechť rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ jsou doplňkové. Když některý prvek $\bar{b} \in \overline{B}$ je incidentní s $\bar{a}_1$, pak leží v $\bar{u}$, a tedy je incidentní s $\bar{a}_2$. Odtud vychází $\bar{a}_1 \sqsubset \overline{B} \subset \bar{a}_2 \sqsubset \overline{B}$ a obdobně plyne $\bar{a}_2 \sqsubset \overline{B} \subset \bar{a}_1 \sqsubset \overline{B}$.

b) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť prvky $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$ leží v témže prvku $\bar{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$. Prvek $\bar{b}$ je incidentní s některým prvkem $\bar{x} \in \overline{A}$ a tento prvek leží v $\bar{u}$. Tedy máme $\bar{b} \in \bar{x} \sqsubset \overline{B} = \bar{a} \sqsubset \overline{B}$ a odtud vychází, že prvky $\bar{a}, \bar{b}$ jsou incidentní.

2.10. Cvičení.

2.10.1. $\mathbf{s}\overline{A} \sqsubset \overline{A} = \overline{A} = \mathbf{s}\overline{A} \sqcap \overline{A}$.

2.10.2. $\mathbf{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqsubset \overline{A} = B \sqsubset \overline{A}$;

$\mathbf{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$;

$\mathbf{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqsubset \overline{A} = \mathbf{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqsubset \overline{A}$.

2.10.3. Když $B \sqsubset \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$, pak pro každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ platí buď $\bar{a} \subset B$ nebo $\bar{a} \cap B = \emptyset$; a naopak.

2.10.4. Když $B \supset C$, pak $(C \sqsubset \overline{A}) \sqcap B = C \sqsubset (\overline{A} \sqcap B)$;

$(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap C = \overline{A} \sqcap C$.

2.10.5. Pro každé tři rozklady $\overline{A}, \overline{B}, \overline{X}$, při čemž $\overline{X} \geqq \overline{A}$, platí: 1. $[\overline{X}, \overline{B}] \geqq [\overline{A}, \overline{B}]$, $(\overline{X}, \overline{B}) \geqq (\overline{A}, \overline{B})$; 2. $(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) \geqq [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})]$.

2.10.6. Vymyslete příklad, na němž ukážete, že za předpokladů uvedených v předcházejícím cvičení, nemusí ve vzorci 2. platit rovnost.

2.10.7. Když rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ jsou doplňkové, pak ze vztahů $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$, $\bar{a} \subset \bar{u}$ plyne: $\bar{u} = \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \overline{B})$.

2.10.8. Když rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ jsou doplňkové, pak každý z nich, na př. $\overline{A}$, je doplňkový: 1. k největšímu společnému zjemnění rozkladu $\overline{B}$ a libovolného zákrytu rozkladu $\overline{A}$; 2. k nejmenšímu společnému zákrytu rozkladu $\overline{B}$ a libovolného zjemnění rozkladu $\overline{A}$.

2.10.9. Pro každé tři rozklady $\overline{A}, \overline{B}, \overline{X}$, při čemž $\overline{X} \geqq \overline{A}$ a $\overline{A}, \overline{B}$ jsou doplňkové, platí rovnost: $(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) = [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})]$.

2.10.10. Vymyslete příklad, na němž ukážete, že platí-li pro nějaké rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ a pro každý zákryt $\overline{X} \geqq \overline{A}$ rovnost uvedená v předcházejícím cvičení, nemusí býti rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ doplňkové.

2.10.11. Ukažte, že na množině o čtyřech prvcích jsou vedle dvojic, skládajících se vždy ze zákrytu a zjemnění, jenom tyto dvojice doplňkových rozkladů: 1. Dvojice, jejichž každý rozklad má dva prvky, z nichž každý se skládá ze dvou prvků množiny. 2. Dvojice, jejichž jeden rozklad má dva a druhý tři prvky a oba rozklady mají společný prvek, který se skládá z jednoho prvku množiny. 3. Dvojice, jejichž každý rozklad má tři prvky, avšak žádný prvek není v obou rozkladech.

3. O ZOBRAZENÍCH.

3.1. Zobrazení do množiny.

V denním životě se napořád setkáváme se zjevy, které souvisí s matematickým pojmem zobrazení. V nejjednodušším případě mají takové zjevy toto schema: Máme dvě neprázdné množiny G, G^* a mezi prvky obou množin nějaký vztah, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*.

Na př.: [1] Mezi diváky při určitém divadelním představení a mezi vstupenkami pro to představení vydanými je vztah daný tím, že každý divák je přítomen na základě právě jedné vstupenky.

[2] Mezi žáky určité školy a jejími třídami je vztah daný tím, že každý žák patří právě do jedné třídy.

[3] Určení počtu n nějakých věcí záleží v tom, že ke každé věci přiřadíme právě jedno přirozené číslo $1, 2, \ldots, n$, a to obvykle tím způsobem, že vezmeme vždy jednu z nich do rukou a současně ji označíme (znakem anebo jenom v mysli) jedním z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Nechť tedy G, G^* značí neprázdné množiny. *Zobrazením množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^**; jinak řečeno, *jímž je každý prvek množiny G zobrazen právě na jeden prvek množiny G^**.

Zobrazení množiny G do G^* se nazývá také funkce na množině G do množiny G^*. Zobrazují-li nějaká zobrazení $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ množiny G do G^* každý prvek v G vždy na stejný prvek v G^*, nazýváme je *rovná* a píšeme $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. V opačném případě je nazýváme *různá* a píšeme $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{h}$.

Uvažujme o libovolném zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G do G^*. K libovolnému prvku $a \in G$ je zobrazením $\boldsymbol{g}$ přiřazen jistý prvek $a^* \in G^*$. Prvek a nazýváme *vzor prvku a^** a prvek a^* *obraz prvku a v zobrazení $\boldsymbol{g}$*, a pí-