I. MNOŽINY.

1. ZÁKLADNÍ POJMY O MNOŽINÁCH.

1.1. Pojem množiny.

V matematickém názvosloví užíváme slova *množina* náhradou za slovo množství, které má v šesti různých pádech stejnou koncovku, a proto je po jazykové stránce méně vhodné. V naší matematické literatuře slovo množina zdomácnělo a označuje jeden z nejdůležitějších pojmů moderní matematiky.

Množinou rozumíme souhrn nějakých věcí, které nazýváme prvky množiny.

Každá množina je svými prvky jednoznačně určena. Když dvě množiny A, B mají tytéž prvky, nazýváme je *identické* neboli *rovné* a píšeme $A = B$, kdežto v opačném případě je nazýváme *různé* a píšeme $A \neq B$.

Příklady množin jsou: [1] množina skládající se ze znaku: a; [2] množina slov otištěných v této knížce; [3] množina všech přirozených čísel $1, 2, 3, \ldots$ Ve svých úvahách budeme často jednat o množinách množin, t. j. o množinách, jejichž prvky jsou opět množiny; z jazykových důvodů říkáme raději *systém množin* místo *množina množin.* Příkladem je [4] množina, jejíž prvky jsou množiny přirozených čísel, z nichž jedna se skládá ze všech prvočísel $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, další ze všech součinů vždy dvou prvočísel, další ze všech součinů vždy tří prvočísel, atd.

1.2. Označení množin.

Nejčastějším obsahem našich úvah bude zkoumání vztahů mezi množinami a jejich prvky. Někdy bude účelné některé množiny a prvky od ostatních odlišit a pak si je pojmenujeme. K tomu si stanovíme povšechnou směrnici, že množiny budeme zpravidla označovat velkými latinskými písmeny, na př. A, a prvky množin latinskými písmeny malými, na př. a. V případě systémů množin vede toto pravidlo k označování jak systémů množin, tak i jejich prvků velkými latinskými písmeny, a proto se od něho odchýlíme; systémy množin budeme označovat velkými latinskými písmeny s pruhem, na př. $\bar{A}$, a jejich prvky, tedy opět množiny, malými latinskými písmeny s pruhem, na př. $\bar{a}$.

Pro některé pojmy a výroky, které se v našich úvahách vyskytnou, zavedeme vhodné názvy a symboly. Všeobecně řečeno, mohou se matematické spisy bez takových pomůcek obejíti jenom stěží, ale doporučuje se názvy a symboly zavádět s rozumem. Ostatně ani v denním životě nemáme na př. pro zetě syna bratrance nevlastní matky zvláštního názvu, kdežto symbolu *m* k označení metru užíváme napořád.

Když a, b značí tutéž věc, píšeme $a = b$, kdežto opačný případ vyjadřujeme symbolem $a \neq b$. Když nějaká věc a je prvkem množiny A, píšeme $a \in A$. Když nějaká množina A je souhrn věcí, které jsme označili $a, b, c, \ldots$, píšeme $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Na př. jest $\{a\}$ symbol hořejší množiny [1] a $\{1, 2, 3, \ldots\}$ je symbol množiny [3]. Také si jednou provždy stanovíme, že se zavedených názvů nebudeme držet vždycky doslovně, nýbrž — přihlížejíce k duchu jazyka — si dovolíme odchylky, pokud ovšem nebudou na újmu přesnosti výkladu. Tak na př. místo „množina A je souhrn prvků $a, b, c, \ldots$“ můžeme říci: „množina A se skládá z prvků $a, b, c, \ldots$“ anebo „množina A má prvky $a, b, c, \ldots$“; místo „a je prvek množiny A“ můžeme říci „a je prvek v množině A“ nebo „a patří do množiny A“, atp.

1.3. Další pojmy.

Jako množinu zavádíme také t. zv. *prázdnou množinu, která je charakterisována vlastností, že nemá vůbec žádných prvků.* Protože každá množina je svými prvky jednoznačně určena, jest jenom jedna prázdná množina. Budeme ji označovat symbolem $\emptyset$. Při další četbě poznáme, že zavedení pojmu prázdné množiny je výhodné při formulaci úvah.

Každá množina, jejíž prvky jsou nějaké symboly, na př. písmena, jejichž význam není blíže vymezen, nazývá se abstraktní; na př. hořejší množina [1] jest abstraktní.

Každá množina, která se skládá jenom z konečného počtu prvků, se nazývá konečná, kdežto v opačném případě nekonečná; na př. množiny [1], [2] jsou konečné, kdežto množiny [3], [4] jsou nekonečné.

Řádem libovolné konečné neprázdné množiny rozumíme počet jejích prvků; dále je pro náš účel vhodné přisoudit *každé nekonečné množině řád 0. Prázdné množině řád nepřisuzujeme.*

1.4. Podmnožina a nadmnožina.

Nechť A, B značí nějaké množiny. *Když každý prvek v A je současně prvkem v B, pravíme, že A je podmnožina v B nebo B je nadmnožina na A.* Někdy tento vztah vyjadřujeme také tím, že *A je část množiny B* nebo B *obsahuje* množinu A. Píšeme pak $A \subset B$ anebo $B \supset A$.

Když $A \subset B$, množina B může (ale nemusí) obsahovat prvky, které do A nepatří. Obsahuje-li B alespoň jeden prvek, který nepatří do A, vyjadřujeme tuto okolnost přívlastkem *vlastní* a říkáme, že A je *vlastní podmnožina* v B nebo, že B je *vlastní nadmnožina* na A. Na př. množina všech prvočísel je vlastní podmnožina v množině [3], neboť každé prvočíslo je prvkem množiny [3], a tato množina obsahuje také čísla, jako na př. číslo 4, která prvočísla nejsou. Když A je podmnožina v B, ale nikoli vlastní, pak nejenom je každý prvek v A také prvkem v B, nýbrž i každý prvek v B je prvkem v A, t. j. platí současně oba vztahy $A \subset B$, $B \subset A$; je zřejmé, že tyto vztahy dohromady vyjadřují rovnost $A = B$.

Vidíme, že každá podmnožina v B je buď vlastní nebo je identická s B. Při této příležitosti si všimněme, že rovnost $A = B$ je ekvivalentní se vztahy $A \subset B$, $B \subset A$, a to v tom smyslu, že když platí, pak platí současně tyto vztahy a naopak. Nejčastěji seznáme rovnost dvou množin právě tím způsobem, že o každé z nich zjistíme, že je podmnožinou v druhé.

1.5. Součet množin.

1.5.1. *Součtem množiny A a množiny B rozumíme množinu všech prvků, které patří do množiny A nebo do B.*

Protože touto definicí jsou vymezeny všechny prvky, které patří do součtu množiny A a množiny B, a protože každá množina je svými prvky jednoznačně určena, jest jenom jeden součet množiny A a množiny B; označujeme jej symbolem $A \vee B$. Z naší definice plyne, že jest $A \vee B = B \vee A$. Vzhledem k této skutečnosti mluvíme obvykle o součtu množin A, B, nerozlišujíce, zda jde o součet množiny A a množiny B nebo množiny B a množiny A. Vidíme, že součet množin A, B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich. Každá z obou množin A, B je podmnožinou v $A \vee B$, neboť každý prvek na př. množiny A patří alespoň do jedné z množin A, B, a to do A; můžeme tedy psát, $A \subset A \vee B$, $B \subset A \vee B$. Na př. součet množiny všech kladných sudých čísel a množiny všech kladných lichých čísel je množina [3]; je totiž $\{2, 4, 6, \ldots\} \vee \{1, 3, 5, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Součet množiny skládající se z jediného slova a a množiny [2] jest opět množina [2].

1.5.2. Pojem součtu dvou množin se dá snadno rozšířit na pojem součtu systému množin: *Součtem libovolného systému množin* $\bar{A}$ *rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin, které jsou prvky systému* $\bar{A}$.

Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden součet a že každá množina, která je prvkem systému $\bar{A}$, je podmnožinou v součtu systému $\bar{A}$. Součet systému $\bar{A}$ označujeme zpravidla symbolem $\mathbf{s}\bar{A}$ a jestliže jsme prvky systému $\bar{A}$ označili písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, označujeme jej symbolem $\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \ldots$, stručněji $\Sigma\bar{a}$, nebo podobně, jak vždycky bude z výkladu patrno.

1.6. Průnik množin. Množiny incidentní a disjunktní.

1.6.1. *Průnikem množiny A a množiny B rozumíme množinu všech prvků, které patří do množiny A a rovněž do množiny B.*

Podobně jako u součtu zjistíme, že jest jenom jeden průnik množiny A a B; označujeme jej symbolem $A \cap B$. Dále vidíme, že jest $A \cap B = B \cap A$. Vzhledem k této skutečnosti mluvíme obvykle o průniku množin A, B, nerozlišujíce, zda jde o průnik množiny A a množiny B nebo množiny B a množiny A. Vidíme, že průnik množin A, B je množina všech prvků, které patří do obou množin A, B. Průnik $A \cap B$ je částí každé z obou množin A, B, neboť každý prvek v $A \cap B$ patří na př. do množiny A. Všimněme si, že i když množiny A, B nemají společných prvků, má definice průniku množin A, B smysl, a to ten, že v tom případě je $A \cap B$ prázdná množina. Zde již poznáváme, že zavedení pojmu prázdné množiny je výhodné, neboť jinak bychom mohli mluvit o průniku jenom u některých množin. Přesto jest účelné, abychom měli zvláštní název pro množiny, které mají společné prvky, a pro množiny, které jich nemají.

1.6.2. *Mají-li množiny A, B společné prvky, nazývají se incidentní, kdežto v opačném případě se nazývají disjunktní.* První případ je charakterisován nerovností $A \cap B \neq \emptyset$, kdežto druhý rovností $A \cap B = \emptyset$. Příkladem incidentních množin je množina skládající se z jediného slova a a množina [2], jejichž průnikem je první množina. Příkladem disjunktních množin je množina všech kladných sudých čísel a množina všech kladných lichých čísel; jejich průnik je zřejmě $\emptyset$.

1.6.3. Pojem průniku dvou množin se dá opět rozšířit na pojem průniku systému množin: *Průnikem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří do každé z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$.*

Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden průnik, a že tento průnik je podmnožinou v každém prvku systému $\bar{A}$. Průnik systému $\bar{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{p}\bar{A}$; v případě, že jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, symbolem $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{a}$, atp.

1.7. Cvičení.

1.7.1. $A \vee \emptyset = A$; $A \vee A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.

1.7.2. $A \vee (A \cap B) = A$; $A \cap (A \vee B) = A$.

1.7.3. Když $A \subset B$, pak $A \vee B = B$, $A \cap B = A$; naopak, když platí jedna z těchto rovností, pak $A \subset B$.

1.7.4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.7.5. $(A \vee B) \cap C = (A \cap C) \vee (B \cap C)$; $(A \cap B) \vee C = (A \vee C) \cap \cap (B \vee C)$.

1.7.6. Když množina A má konečný počet $n \geqq 0$ prvků, pak má 2^n podmnožin.

2. O ROZKLADECH V MNOŽINÁCH.

2.1. Rozklad v množině.

Nechť G značí (všude v této knížce) libovolnou neprázdnou množinu. *Rozkladem v G rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní.*

Pojem rozkladu v množině je jedním z nejdůležitějších a snad i nejsložitějším pojmem, které se v této knížce vyskytují, a proto doporu-