15. Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu

81. Existenčná teoréma v prípade cauchyovských počiatočných podmienok

Uvažujme o lineárnej d. rovnici n-tého rádu

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = X_0 \qquad (A)$$

a predpokladajme, že koeficienty $X_0, \dots, X_n$ sú spojitými funkciami nezávisle premennej x v nejakom intervale j.

Na začiatku teórie d. rovnice (A) stojí existenčná teoréma o integráloch tejto d. rovnice, ktorá znie takto:

Nech $X_0 \in j$; $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ sú ľubovoľné čísla. Existuje práve jeden integrál $y(x)$ d. rovnice (A), definovaný v intervale j, ktorý má v čísle x_0 hodnotu y_0 a jeho derivácia rádu i (= 1, ..., n-1) hodnotu $y_0^{(i)}$, takže

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (1)$$

Dôkaz nebudeme uvádzať. Poznamenajme, že obsah tejto existenčnej teorémy stručne vyjadrujeme tým, že integrály d. rovnice (A) sú jednoznačne určené cauchyovskými počiatočnými podmienkami (1).

Zdôraznime, že integrál y, o ktorom je v uvedenej existenčnej teoréme reč, je najširší v tom zmysle, že existuje v celom intervale j; niekedy ho nazývame úplným.

82. Všeobecné počiatočné podmienky

V ďalšom predpokladajme, že interval j je kompaktný, $j = [a, b]$.

Podľa existenčnej teorémy je každé riešenie d. rovnice (A) definované v nejakom intervale $I \subset [a, b]$ jednoznačne určené hodnotami svojich derivácií rádu 0 až $n - 1$ v ľubovoľnom čísle $c \in I$. Budeme sa zaoberať otázkou, či možno jednoznačne určiť riešenie d. rovnice (A) aj inak než hodnotami jeho derivácie rádu 0 až $n - 1$ v danom čísle $c \in I$, napr. hodnotami niektorých jeho derivácií v niekoľkých číslach intervalu I, špeciálne hodnotami riešení v rôznych číslach intervalu I. Touto otázkou sa zaoberali

W. B. F i t e (Ann. of Math., 8 (1916)), C. de la V a l l é e - P o u s s i n (Jour. Math. p. et appl., 8(1926)) a R. B a l l i e u (1948). Hlavným výsledkom tejto teórie je zistenie, že riešenia sú jednoznačne určené n hodnotami niektorých ich derivácií v niekoľkých rôznych číslach intervalu I, pokiaľ sú tieto čísla dosť blízko k sebe.

Kvôli stručnejšimu vyjadrovaniu zavedieme najprv pojem počiatočných hodnôt pre riešenie d. rovnice (A).

Nech $c_1, \ldots, c_\ell$ $(\ell \geq 1)$ sú ľubovoľné rôzne čísla v nejakom intervale $I \subset [a, b]$ a nech ku každému c_i z nich je priradený určitý počet $(1 \leq) n_i$ $(\leq n+1)$ celých nezáporných čísel

$$0 \leq k_{i,1} < \ldots . < k_{i,n_i} \leq n$$

a ten istý počet ďalších ľubovoľných čísel

$$C_{i,1}, \ldots, C_{i,\, n_i}$$

Systém čísel

$$c_1, \ldots, c_\ell \;;\; k_{11}, \ldots, k_{\ell\, n_\ell};\; C_{11}, \ldots, C_{\ell\, n_\ell} \qquad (1)$$

sa nazýva systém počiatočných hodnôt d. rovnice (A), stručne: systém počiatočných hodnôt. Ak všetky čísla $C_{11}, \ldots, C_{\ell\, n_\ell}$ sa rovnajú nule, potom nazývame systém (1) nulový. Z týchto definícií vidíme, že ku každému systému počiatočných hodnôt (1) možno jednoznačne priradiť istý nulový systém, ktorý dostaneme ak nahradíme všetky čísla $C_{11}, \ldots, C_{\ell\, n_\ell}$ nulami:

$$c_1, \ldots, c_\ell \;;\; k_{11}, \ldots, k_{\ell\, n_\ell};\; 0, \ldots, 0 \qquad (2)$$

O tomto nulovom systéme hovoríme, že prináleží k systému počiatočných hodnôt (1). Súčasne je zrejmé, že ten istý nulový systém (2) prináleží k nekonečne mnohým systémom počiatočných podmienok, z ktorých každý dostaneme, ak v nulovom systéme (2) nahradíme posledných $n_1 + \ldots + n_\ell$ núl ľubovoľnými číslami $C_{11}, \ldots, C_{\ell\, n_\ell}$. Tak isto o každom takom systéme počiatočných podmienok hovoríme, že prináleží k nulovému systému (2).

Ak je daný nejaký systém počiatočných hodnôt (1), potom o ľubovoľnom riešení y d. rovnice (A) definovanom v intervale I, hovoríme, že má počiatočné hodnoty (1), alebo že spĺňa počiatočné podmienky (1), ak v každom čísle $c_i (i = 1, \ldots, \ell)$ je

$$y^{(k_{i1})}(c_i) = C_{i1}, \ldots, y^{(k_i n_i)}(c_i) = C_i n_i$$

83. Nech je daný nejaký systém počiatočných hodnôt (1) a predpokladajme, že existuje riešenie y_0 d. rovnice (A), ktoré je definované v intervale I a spĺňa počiatočné podmienky (1).

Uvažujme substitúciu

$$Y = y - y_0$$

Touto substitúciou sa diferenciálna rovnica (A) transformuje na d. rovnicu homogénnu

$$Y^{(n)} + X_1 Y^{(n-1)} + \dots + X_n Y = 0 \qquad (B)$$

a každé jej riešenie y, definované v intervale I, ktoré spĺňa tie isté počiatočné podmienky (1), zobrazí sa na určité riešenie Y d. rovnice (B), definované v tomže intervale I a spĺňa príslušné nulové počiatočné podmienky (2). Ľahko vidíme, že toto zobrazenie jednotlivých riešení d. rovnice (A), spĺňajúcich počiatočné podmienky (1) na riešenia d. rovnice (B) spĺňajúce príslušné nulové počiatočné podmienky (2) je prosté a že špeciálne riešenie y_0 d. rovnice (A) sa zobrazuje na riešenie 0 d. rovnice (B), t.j. riešenie, ktoré má všade v intervale I hodnotu 0.

Odtiaľ vidíme, že ak je y_0 jediné riešenie d. rovnice (A), definované v intervale I, ktoré spĺňa počiatočné podmienky (1), potom 0 je jediné riešenie d. rovnice (B), definované v intervale I, ktoré spĺňa príslušné nulové počiatočné podmienky (2). Naopak, ak je 0 jediné riešenie d. rovnice (B) definované v intervale I, ktoré má nulové počiatočné hodnoty (2), potom y_0 je jediné riešenie d. rovnice (A) definované v intervale I, ktoré spĺňa počiatočné podmienky (1) a všeobecnejšie existuje najviac jedno riešenie d. rovnice (A) definované v intervale I, ktoré spĺňa ľubovoľné počiatočné podmienky príslušné k nulovému systému (2). Vidíme teda, že riešenie d. rovnice (A), definované v intervale I, je jednoznačne určené hodnotami niektorých jeho derivácií v niekoľkých rôznych číslach intervalu I, ak 0 je jediné riešenie d. rovnice (B) definované v intervale I, ktorého derivácie týchto príslušných radov majú v týchto číslach korene. Pripomeňme, že deriváciou 0-tého rádu funkcie rozumieme funkciu samu.

84. Uvažujme teraz lineárnu d. rovnicu homogénnu

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = 0 \qquad (B)$$

pričom predpokladajme, že $X_1, \dots, X_n$ sú spojitými funkciami nezávisle premennej x v intervale $[a, b]$.

Nech y je ľubovoľné riešenie d. rovnice (B), ktoré je definované v nejakom intervale $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Označme najväčšiu hodnotu funkcie $|X_\nu|$ v intervale $[\alpha, \beta]$ M_ν ($\nu = 1, \dots, n$). Označme h dĺžku intervalu $[\alpha, \beta]$, takže je $h = \beta - \alpha$. Ďalej označme u_λ ($\lambda = 0, \dots, n$) maximum funkcie $y^{(\lambda)}$ v intervale $[\alpha, \beta]$ a ξ_λ číslo v intervale $[\alpha, \beta]$, v ktorom má funkcia $|y^{(\lambda)}|$ hodnotu u_λ, takže je $(0 \leq)\ u_\lambda = |y^{(\lambda)}(\xi_\lambda)|$.

Z toho, že funkcia y vyhovuje d. rovnici (B) vidíme, že platí nerovnosť

$$u_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu u_{n-\nu} \tag{3}$$

Predpokladajme v ďalšom o riešení y, že každá z funkcií $y, \dots, y^{(n-1)}$ má v intervale $[\alpha, \beta]$ aspoň jeden koreň[20]. Nech x_μ značí koreň funkcie $y^{(\mu)}$ ($\mu = 0, \dots, n-1$) v intervale $[\alpha, \beta]$.

Predovšetkým ukážeme, že pre $\mu = 0, \dots, n-1$ platí nerovnosť

$$u_\mu \leqq h\, u_{\mu+1} \tag{4}$$

a teda tiež pre $0 \leqq \mu \leqq \lambda \leqq n$

$$u_\mu \leqq h^{\lambda-\mu} \cdot u_\lambda \tag{5}$$

Vyplýva to z nasledujúcich vzťahov:

$$u_\mu = |y^{(\mu)}(\xi_\mu)| = \left|\int_{x_\mu}^{\xi_\mu} y^{(\mu+1)}(x)\, dx\right| \leqq \pm \int_{x_\mu}^{\xi_\mu} |y^{(\mu+1)}(x)|\, dx \leqq$$

$$\leqq |\xi_\mu - x_\mu|\, u_{\mu+1} \leqq h\, u_{\mu+1} \tag{6}$$

pričom platí znamienko + (-) v prípade $\xi_\mu \geqq x_\mu$ ($\xi_\mu < x_\mu$).

Ďalej ľahko zistíme, že funkcia y je v intervale $[\alpha, \beta]$ identicky nula vtedy a len vtedy, keď niektoré z čísel u_λ je nula.

Vskutku, ak je funkcia y v intervale $[\alpha, \beta]$ identicky nulou, sa zrejme všetky čísla u_λ rovnajú nule. Ak naopak je niektoré číslo u_λ nula, potom je $u_0 = 0$, ako vyplýva z nerovnosti (5), a teda funkcia y je v $[\alpha, \beta]$ identicky nula.

Všimnime si, že čísla u_λ sa buď všetky rovnajú nule (ak funkcia y je v intervale $[\alpha, \beta]$ identicky nula), alebo sú všetky kladné (ak y nie je v intervale $[\alpha, \beta]$ identicky nula).

Ak sa čísla u_λ rovnajú nule, potom vo vzorci (4) platí vždy rovnosť. Ak sú však čísla u_λ kladné, môže vo vzorci (4) platiť rovnosť len pre $\mu = n-1$ a teda vo vzorci (5) len pre $\mu = \lambda$ alebo $\mu = n-1, \lambda = n$.

Vskutku, v tom prípade je predovšetkým $u_n > 0$. Ak pre niektoré $\mu = 0, \dots, n-1$ je $u_\mu = h\, u_{\mu+1}$, potom v príslušných vzorcoch (6) platí vša-

---

[20] Koreňom funkcie $f(x)$ rozumieme koreň rovnice $f(x) = 0$

de znamienko =. Odtiaľ najmä vyplýva $|\xi_\mu - x_\mu| = h$, takže jedno z čísel ξ_μ x_μ je α a druhé β. Ďalej usudzujeme, podľa (6), že funkcia $y^{(\mu+1)}$ má v intervale $[\alpha, \beta]$ konštantnú hodnotu $u_{\mu+1}$, teda je $y^{(\mu+1)} = \pm u_{\mu+1} \neq 0$ konštanta. . y je teda v intervale $[\alpha, \beta]$ polynóm stupňa $\mu+1$. Ak je $\mu + 1 < n$, potom je polynóm stupňa nižšieho než n a vychádza $u_n = 0$, čo odporuje predpokladu. Máme teda $\mu = n - 1$.

Všimnime si niektoré jednoduché prípady, kedy riešenie y sa nutne rovná nule v intervale $[\alpha, \beta]$.

Je to predovšetkým vtedy, ak sú všetky koeficienty X_ν d. rovnice (B) identicky 0, teda ak sa všetky čísla M_ν rovnajú nule. Tento výsledok vyplýva zo vzorca (3). Ďalej je tomu tak vždy, ak $n = 1$, čo ľahko zistíme integráciou d. rovnice (B) majúc na mysli predpoklad, že riešenie y má v intervale $[\alpha, \beta]$ koreň.

Napokon dostaneme ten výsledok pre $n \geqq 2$ a $M_2 = \ldots = M_n = 0$, lebo potom je funkcia $y^{(n-1)}$ identicky 0 v intervale $[\alpha, \beta]$ a dostávame $u_{n-1} = 0$.

Vráťme sa teraz k vzorcom (3) a (5). Z druhého vyplýva pre $\nu = 1, \ldots, n$: $u_{n-\nu} \leqq h^\nu u_n$, kde rovnosť môže nastať v prípade $u_n > 0$ len pre $\nu = 1$ ako sme videli predtým. Odtiaľ a zo vzorca (3) vyplýva

$$u_n \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu h^\nu \right\} \leqq 0 \tag{7}$$

Ak teda funkcia y nie je v intervale $[\alpha, \beta]$ identicky 0, je $n \geqq 2$ a aspoň jedno z čísel $M_2, \ldots, M_n$ je kladné a platí nerovnosť

$$1 - \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu h^\nu < 0$$

ako vidíme zo vzorca (7). V tomto prípade je teda dĺžka h intervalu $[\alpha, \beta]$ väčšia než (jediný) koreň algebraickej rovnice

$$1 - M_1 t - \ldots - M_n t^n = 0 \tag{8}$$

ktorý je zrejme kladný.

Tým sme dokázali túto vetu:

Ak sa v intervale $[\alpha, \beta]$ všetky koeficienty X_ν d. rovnice (B) identicky rovnajú nule, alebo ak nie je dĺžka tohto intervalu väčšia než koreň algebraickej rovnice (8), potom 0 je jediné riešenie d. rovnice (B), definované v intervale $[\alpha, \beta]$, ktorého každá derivácia rádu 0 až n-1 má v ňom koreň.

Tento výsledok možno zlepšiť tým, že sa algebraická rovnica (8) nahradí inou, ktorej jediný koreň je prípadne väčší než koreň rovnice (8).

Dá sa ukázať najmä to, že predchádzajúca veta je správna v celom rozsahu aj vtedy, ak nie je dĺžka intervalu $[\alpha, \beta]$ väčšia než koreň algebraickej rovnice

$$1 - M_1 t - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{n} M_\nu t^\nu = 0$$

16. Lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu

85. Ú v o d

Diferenciálne lineárne rovnice 2. rádu sú významné preto, že sú najjednoduchším (netriviálnym) prípadom d. lineárnych rovníc vyšších rádov a ich vlastnosti sú vzorom pri štúdiu týchto všeobecnejších d. rovníc. Najmä však preto, že majú dôležité aplikácie v otázkach fyzikálnych a technických. Od najjednoduchších úvah klasickej mechaniky, ako je analýza harmonického pohybu, k omnoho zložitejším otázkam týkajúcim sa napr. vedenia tepla, chvenia tyčí a membrán alebo v problémoch nebeskej mechaniky, stretávame sa s d. lineárnymi rovnicami 2. rádu ako s ústrednými miestami obsahujúcimi spravidla úplné riešenie predložených otázok. K tomu pristupuje, že teória d. lineárnych rovníc 2. rádu je ovládaná neveľkým počtom pomerne jednoduchých teorém, takže je jednoduchá a prehľadná a pritom obsahove bohatá.

V ďalšom kvôli stručnosti obmedzíme sa na štúdium d. lineárnych rovníc 2. rádu homogénnych, t.j. tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \text{(a)}$$

pričom koeficienty d. rovnice (a) p, q sú funkcie definované v nejakom intervale j. Predpokladáme, že sú v intervale j spojité.

86. E l e m e n t á r n e t r a n s f o r m á c i e d. r o v n i c e (a)

K danej d. rovnici (a) môžeme priradiť ďalšie d. lineárne rovnice 2. rádu, ktorých integrály sú integrálmi d. rovnice (a) v známych vzťahoch. Také priradenie d. rovníc k d. rovnici (a) sa nazýva transformácia d. rovnice (a). Štúdium týchto transformácií tvorí dôležitú časť teórie d. lineárnych rovníc 2. rádu. Je účelné všimnúť si hneď na začiatku našej úvahy niektorých elementárnych transformácií, pretože potom sa môžeme obmedziť na štúdium d. rovníc,ktoré sú v niektorom smere vhodnejšie, napr. kratšie a prehľadné, bez toho, že by sme porušili všeobecnú platnosť výsledkov.

Najjednoduchšie transformácie d. rovnice (a) sú založené na násobení d. rovnice (a) alebo jej integrálov vhodnou funkciou alebo na novej voľbe nezávisle premennej.