Ak vektor f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku sprava, potom je tento bod sprava lokálne pravidelný.

Podobná je, tzv. veta Rosenblatt-Nagumova o lokálnej jednoznačnosti sprava bodu (ξ, η).

Znie takto:

Ak vektor f je v obore d spojitý a ak (pri prípadne zmenšených číslach a a zložkách vektora b) platí pre každé dva body (x, y_1), (x, y_2) $\in d$ nerovnosť

$$(x-\xi) \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq \max_{i=1,\dots,n} \left| y_{1i} - y_{2i} \right| 1 \quad ,$$

potom je bod (ξ, η) sprava lokálne pravidelný.

14. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

72. Základné pojmy a označenia

V ďalšom sa budeme zaoberať systémami lineárnych d. rovníc, t.j. systémami tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + a_{10}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (A) \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + a_{no} \end{aligned}$$

kde $n \geq 1$ a $a_{11}, \dots, a_{no}$ sú funkciami nezávisle premennaj x definovanými v nejakom intervale j.

Miesto názvu systém lineárnych d. rovníc budeme spravidla používať stručnejšie pomenovanie lineárny systém. Funkcie $a_{11}, \dots a_{no}$ sa nazývajú koeficienty lineárneho systému. Ak sa koeficienty $a_{10}, \dots, a_{no}$ identicky rovnajú nule, nazýva sa lineárny systém homogénny; v opačnom prípade nehomogénny, ktorý dostaneme, ak koeficienty $a_{10}, \dots a_{no}$ nahradíme nulami; naopak existuje nekonečne mnoho lineárnych systémov, ku ktorým patrí ten istý homogénny systém.

Ak označíme písmenom A štvorcovú maticu rádu n, ktorej členy sú koeficienty systému (A), teda $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1,\dots, n)$ a znakom a_o stĺpcový vektor o zložkách $a_{10}, \dots, a_{no}$, môžeme systém (A) písať v tvare

$$y' = Ay + a_o \qquad (A)$$

ktorý je východiskom ďalšej teórie.

73. V ďalšom budeme predpokladať, že interval j je kompaktný, $j = [a, b]$ a že koeficienty systému (A) sú spojitými funkciami nezávisle premennej x.

Potom pravé strany rovníc systému (A) sú spojitými funkciami premenných $x, y_1, \ldots, y_n$ v $(n + 1)$- rozmernom nekonečnom intervale:

$$(d \equiv)\ x \in [a, b]\ ,\ -\infty < y_i < \infty\ (i = 1, \ldots, n)$$

a vyhovujú v ňom L. podmienke, nakoľko majú všade ohraničené parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných y. Podľa existenčnej teorémy prechádza teda každým bodom $(\xi, \tau_1, \ldots \tau_n) \in d$ práve jedno riešenie systému (A), definované v celom intervale $[a, b]$. Tento výsledok môžeme vyjadriť tiež tým, že existuje práve jeden vektor y, ktorého zložky sú funkciami definovanými v intervale $[a, b]$, ktorý sa v ľubovoľne danom čísle tohto intervalu stotožní s ľubovoľne daným vektorom a okrem toho sa transformuje lineárnou substitúciou o matici A a transformáciou a_0 vo vektor y'.

74. Homogénne lineárne systémy

V nasledujúcich odsekoch (až po ods. 77 včítane) budeme študovať lineárne systémy homogénne.

Uvažujme o homogénnom lineárnom systéme

$$y' = Ay \qquad (A)$$

Predovšetkým si všimnime, že vektor 0 je jediné riešenie lineárneho systému (A), definované v $[a, b]$ prechádzajúce ľubovoľným bodom $(c, 0, \ldots, 0)$ kde $c \in [a, b]$. Vyplýva to z toho, že vektor, ktorého zložky sa identicky rovnajú nule, je riešením systému (A) prechádzajúcim bodom $(c, 0, \ldots, 0)$ a riešenie je (podľa predchádzajúceho) jediné.

Majme teraz ľubovoľný počet napr. j (≥ 1) riešení systému (A) definovaných v intervale $[a, b]$. Stanovme ľubovoľne ich poradie a označme príslušné (stĺpcové) vektory so zreteľom na poradie $y_1, \ldots, y_j$.

Jednotlivé zložky vektora y_i budeme značiť $y_{1i}, \ldots y_{ni}$. Označme ďalej symbolom Y_j maticu typu n/j, ktorej prvkom v $(1 \leq)\ \alpha\ (\leq n)$- tom riadku a v $(1 \leq)\ \beta\ (\leq j)$-tom stĺpci je α- tá zložka vektora y_β, takže

$$Y_j = (y_1, \ldots, y_j)$$

Pretože každý vektor y_i vyhovuje systému (A), platí:

$$Y_j' = (y_1', \ldots, y_j') = (Ay_1, \ldots, Ay_j) = A(y_1, \ldots, y_j) = AY_j$$

takže je

$$Y_j' = AY_j$$

Nech c značí ľubovoľný vektor o j konštantných zložkách. Z predchádzajúcej rovnosti vyplýva

$$(Y_j c)' = Y_j' c = (AY_j)c = A(Y_j c)$$

a odtiaľ vidíme, že je

$$(Y_j c) = A(Y_j c)$$

takže vektor $Y_j c$ je riešením systému (A). Tento výsledok môžeme vyjadriť tým, že každá lineárna kombinácia s konštantnými koeficientami ľubovoľného počtu riešení lineárneho homogénneho systému (A) je opäť jeho riešením.

Nech λ značí parameter nezávislý od premenných $x, y_1, \ldots, y_n$.

Pretože vektory $y_1, \ldots, y_j$ sú riešeniami systému (A), platia rovnosti $((A-\lambda E)y_1, \ldots, (A-\lambda E)y_j) = (y_1' - \lambda y_1, \ldots, y_j' - \lambda y_j) = (A - \lambda E)(y_1, \ldots, y_j)$, takže platí

$$(y_1' - \lambda y_1, \ldots, y_j' - \lambda y_j) = (A - \lambda E)\, Y_j \qquad (1)$$

E značí pritom jednotkovú maticu n-tého rádu, ktorej prvky označíme $\varepsilon_{\alpha\beta}$ takže

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \text{ pre } \alpha \neq \beta, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = 1 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

Ľubovoľný minor i-tého rádu $(1 \leq i \leq \min(n.j))$ v matici na ľavej strane rovnice (1) utvorený z prvkov v riadkoch o indexoch $\alpha_1 < \ldots < \alpha_i$ a v stĺpcoch o indexoch $\beta_1 < \ldots < \beta_i$ je, ako ukazuje pravá strana, súčin matíc $(a^*_{\alpha_1} - \lambda e^*_{\alpha_1}, \ldots, a^*_{\alpha_i} - \lambda e^*_{\alpha_i})^*$ a $y_{\beta_1}, \ldots, y_{\beta_i}$, pričom napr. $a^*_{\alpha_1}$ značí vektor v α_1-tom riadku matice A a podobne $e^*_{\alpha_1}$ vektor v α_1-tom riadku matice E. Odtiaľ vyplýva vzorec:

$$\begin{vmatrix} y'_{\alpha_1\beta_1} - \lambda y_{\alpha_1\beta_1}, \ldots, y'_{\alpha_1\beta_i} - \lambda y_{\alpha_1\beta_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{\alpha_i\beta_1} - \lambda y_{\alpha_i\beta_1}, \ldots, y'_{\alpha_i\beta_i} - \lambda y_{\alpha_i\beta_i} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\gamma_1 < \ldots < \gamma_i} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\gamma_1} - \lambda\varepsilon_{\alpha_1\gamma_1}, \ldots, a_{\alpha_1\gamma_i} - \lambda\varepsilon_{\alpha_1\gamma_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\alpha_i\gamma_1} - \lambda\varepsilon_{\alpha_i\gamma_1}, \ldots, a_{\alpha_i\beta_i} - \lambda\varepsilon_{\alpha_i\gamma_i} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} y_{\gamma_1\beta_1}, \ldots, y_{\gamma_1\beta_i} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{\gamma_i\beta_1}, \ldots, y_{\gamma_i\beta_i} \end{vmatrix}$$

v ktorom sa súčtové znamienko vzťahuje na všetky kombinácie bez opakovania j-tej triedy čísel 1, ..., n : $\gamma_1 < \ldots < \gamma_i$. V rozvoji determinantu na ľavej strane tejto rovnosti podľa celých nezáporných mocnín parametra λ je pri $(-\lambda)^{i-1}$ koeficient, ktorý je súčtom determinantov, ktoré dostaneme, ak v tom determinante podržíme vždy z jedného stĺpca prvé členy z ostatných stĺpcov koeficienty pri $-\lambda$ druhých členov dvojčlenov, ktoré sú prvkami toho determinantu. Odtiaľ vidíme, že tento koeficient je deriváciou determinantu utvoreného z prvkov v riadkoch o indexoch $\alpha_1 < \ldots < \alpha_i$ a stĺpcoch o indexoch $\beta_1 < \ldots < \beta_i$ matice Y_j. Podobne určíme koeficient pri $(-\lambda)^{i-1}$ v rozvoji výrazu na pravej strane predtým uvedenej rovnosti a porovnaním koeficientov dostávame vzťah

$$
\begin{vmatrix} y_{\alpha_1 \beta_1}, & \ldots, & y_{\alpha_1 \beta_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\alpha_i \beta_1}, & \ldots, & y_{\alpha_i \beta_i} \end{vmatrix}' = \qquad (2)
$$

$$
\sum_{\gamma_1 < \ldots < \gamma_i} \left(\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \gamma_1}, & \varepsilon_{\alpha_1 \gamma_2}, & \ldots, & \varepsilon_{\alpha_1 \gamma_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_i \gamma_1}, & \varepsilon_{\alpha_i \gamma_2}, & \ldots, & \varepsilon_{\alpha_i \gamma_i} \end{vmatrix} + \ldots + \right.
$$

$$
\left. + \ldots + \begin{vmatrix} \varepsilon_{\alpha_1 \gamma_1}, & \varepsilon_{\alpha_1 \gamma_2}, & \ldots, & a_{\alpha_1 \gamma_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{\alpha_i \gamma_1}, & \varepsilon_{\alpha_i \gamma_2}, & \ldots, & a_{\alpha_i \gamma_i} \end{vmatrix} \right) \cdot
$$

$$
\cdot \begin{vmatrix} y_{\gamma_1 \beta_1}, & \ldots, & y_{\gamma_1 \beta_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\gamma_i \beta_1}, & \ldots, & y_{\gamma_i \beta_i} \end{vmatrix} .
$$

Z tohto vzorca vidíme, že derivácia každého minoru i-tého rádu matice Y_j je lineárnou kombináciou minorov i-tého rádu utvorených z týchže stĺpcov matice Y_j ako ten minor. Koeficienty týchto lineárnych kombinácií sú lineárne funkcie s konštantnými koeficientami prvkov matice A obsiahnutých v riadkoch o rovnakých indexoch, ako majú riadky toho minoru. Odtiaľ vyplýva poznatok, že všetky minory ľubovoľného i-tého rádu matice Y_j $(1 \leq i \leq \min(n, j))$ sú riešením istého homogénneho lineárneho systému, ktorého koeficienty sú lineárne funkcie s konštantnými koeficientami koeficientov lineárneho systému (A).

Napokon možno ľahko bližšie popísať tieto lineárne funkcie. Za tým účelom uvažujme o koeficiente minoru utvoreného z prvkov v $\gamma_1 < \ldots < \gamma_i$-tom riadku a v $\beta_1 < \ldots < \beta_i$-tom stĺpci matice Y_j, ktorý je daný súčtom determinantov napísaných v zátvorke na pravej strane vzorca (2); označme ho $a_{(\gamma)}$

Predovšetkým vidíme, že ak sú medzi číslami kombinácie $\gamma_1 < \dots < \gamma_i$ aspoň dve čísla rôzne od každého čísla kombinácie $\alpha_1 < \dots < \alpha_i$, potom je hodnota každého determinantu v tej zátvorke nula alebo potom aspoň v jednom jeho stĺpci sú samé nuly. V tomto prípade je teda $a_{(\gamma)} = 0$.

Ak je medzi číslami kombinácie $\gamma_1 < \dots < \gamma_i$ práve jedno číslo γ_μ rôzne od každého čísla kombinácie $\alpha_1 < \dots < \alpha_i$, potom práve jedno číslo tejto kombinácie α_ν chýba v predchádzajúcej, takže obidve kombinácie $\alpha_1 < \dots < \alpha_{\nu-1} < \alpha_{\nu+1} < \dots < \alpha_i$ a $\gamma_1 < \dots < \gamma_{\mu-1} < \gamma_{\mu+1} < \dots$ $\dots < \gamma_i$ sú rovnaké. Každý determinant v tej zátvorke, s prípadnou výnimkou μ - tého, má hodnotu nula, pretože v jeho μ -tom stĺpci sú samé nuly. V μ--tom determinante sa všetky čísla $\varepsilon_{\alpha_\nu \gamma_1}, \dots, \varepsilon_{\alpha_\nu \gamma_{\mu-1}}, \varepsilon_{\alpha_\nu \gamma_{\mu+1}}, \dots, \varepsilon_{\alpha_\nu \gamma_i}$ rovnajú nule, pretože obidva indexy týchto symbolov sú rôzne. Hodnota μ -tého determinantu je teda $(-1)^{\mu+\nu} a_{\alpha_\nu \gamma_\mu}$, lebo subdeterminant prvku $a_{\alpha_\nu \gamma_\mu}$ má v hlavnej uhlopriečke samé 1 a všade inde nuly, lebo kombinácie $\alpha_1 < \dots < \alpha_{\nu-1} < \alpha_{\nu+1} < \dots < \alpha_i$ a $\gamma_1 < \dots$ $\dots < \gamma_{\mu-1} < \gamma_{\mu+1} < \dots < \gamma_i$ sú rovnaké. Vychádza teda

$$a_{(\gamma)} = (-1)^{\mu+\nu} \cdot a_{\alpha_\nu \gamma_\mu}$$

Ak konečne je kombinácia $\gamma_1 < \dots < \gamma_i$ tá istá ako $\alpha_1 < \dots$ $\dots < \alpha_i$, potom je zrejme $a_{(\gamma)} = a_{\alpha_1 \alpha_1} + \dots + a_{\alpha_i \alpha_i}$

Vidíme teda, že koeficienty homogénneho lineárneho systému, ktorému vyhovujú minory i-tého rádu matice Y_j, sú buď nuly, alebo prvky matice A s vhodným znamienkom alebo konečne súčty i-prvkov hlavnej uhlopriečky matice A.

Všimnime si najmä, že v prípade $j = n$ máme vzorec

$$|Y_n|' = (a_{11} + \dots + a_{nn}) \, |Y_n| \tag{3}$$

takže determinant matice ľubovoľných n riešení homogénneho lineárneho systému (A) vyhovuje d. rovnici (3). Jeho hodnota v ľubovoľnom čísle $x \in [a, b]$ je teda daná vzorcom:

$$|Y_n(x)| = |Y_n(c)| \, e^{\int_c^x (a_{11} + \dots + a_{nn})\, dt} \tag{4}$$

pričom c je ľubovoľné číslo v intervale $[a, b]$.

Z toho, že všetky minory ľubovoľného i-tého rádu matice Y_j $(1 \leq i \leq \min(n,j))$ sú riešením istého homogénneho lineárneho systému so spojitými koeficientami v intervale $[a, b]$, vyplýva, že hodnosť matice Y_j je tá istá vo všetkých číslach intervalu $[a, b]$. Vskutku, nech $c \in [a, b]$ značí ľubovoľné číslo a nech $(0 \leq)\ h\ (\leq \min(n,j))$ je hodnosť matice Y_j v čísle c. Potom je hodnota aspoň jedného minoru h-tého rádu matice Y_j v čísle c rôzna od nuly, naproti tomu všetky minory rádu h +1-tého, ak vôbec také existujú, majú v c hodnotu 0. Pretože všetky minory $h+1$-tého rádu sú riešením istého homogénneho lineárneho systému so spojitými koeficientami v intervale $[a, b]$ a v čísle c majú hodnoty 0, sa v intervale $[a, b]$ identicky rovnajú nule. Podobne usudzujeme, že všetky minory rádu h-tého matice Y_j nemajú v žiadnom čísle intervalu $[a, b]$ hodnoty samé nuly, pretože ich nemajú v čísle c. Tým je tvrdenie dokázané.

Vzhľadom na tento výsledok budeme stručne hovoriť o hodnosti matice Y_j bez ohľadu na hodnoty nezávisle premennej.

Špeciálne si všimnime, že determinant matice ľubovoľných n riešení $|Y_n|$ je všade v intervale $[a, b]$ rôzny od nuly, ak má túto vlastnosť v jednom čísle intervalu $[a, b]$ a je identicky nula, ak je nula v jednom čísle tohto intervalu.

75. Lineárne relácie medzi riešeniami

Ľubovoľné riešenia $y_1, \ldots, y_j$ $(j \geq 1)$ systému (A) definované v intervale $[a,b]$ sa nazývajú vzájomne lineárne nezávislé, stručne nezávislé, ak matica $(y_1, \ldots, y_j)$ má hodnosť j. V opačnom prípade, ak teda hodnosť tej matice je menšia než j, nazývajú sa vzájomne lineárne závislé, stručne: závislé.

Z tejto definície vyplýva najmä, že každý systém nezávislých riešení ich obsahuje najviac n. Ľahko zistíme, že existujú systémy riešení, ktoré skutočne tento maximálny počet nezávislých riešení n obsahujú.

Vskutku, podľa existenčnej teorémy existujú riešenia $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ktoré sa v ľubovoľne danom čísle $c \in [a, b]$ stotožňujú s vektormi $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ vytvárajúcimi jednotkovú maticu E; tieto riešenia sú nezávislé, lebo ich determinant $|z_1, \ldots, z_n| = 1$ je (v čísle c a teda) všade v intervale $[a, b]$ rôzny od nuly. Každý systém, ktorý sa skladá z n nezávislých riešení systému (A) definovaných v intervale $[a, b]$, nazýva sa fundamentálnym systémom riešení.

Ďalej si všimnime, že ak sú $y_1, \ldots, y_j$ $(j \geq 1)$ ľubovoľné nezávislé riešenia a $c_1, \ldots, c_j$ nezávislé konštantné vektory o j zložkách, potom tiež riešenia $Y_j c_1, \ldots, Y_j c_j$ sú nezávislé.

Vskutku, z rovnosti

$$(Y_j c_1, \ldots, Y_j c_j) = Y_j (c_1, \ldots, c_j)$$

vyplýva, že každý minor j-tého rádu matice na ľavej strane tohto vzorca je súčinom rovnoľahlého minoru matice Y_j a determinantu $|c_1, \ldots, c_j|$, ktorý je rôzny od nuly, lebo vektory $c_1, \ldots, c_j$ sú nezávislé. Pritom však Y_j značí opäť maticu $(y_1, \ldots, y_j)$. Vidíme, že ak je $y_1, \ldots, y_n$ ľubovoľný fundamentálny systém riešení lineárneho systému (A) a $c_1, \ldots, c_n$ sú nezávislé konštantné vektory o n zložkách, potom tiež $Y_n c_1, \ldots, Y_n c_n$ je fundamentálnym systémom riešení systému (A).

Uvažujme teraz o ľubovoľnom systéme závislých riešení lineárneho systému (A), $y_1, \ldots, y_j$ $(j \geq 1)$. Maticu $(y_1, \ldots, y_j)$ označme opäť Y_j.

Predovšetkým ukážeme, že existuje konštantný nenulový vektor C o j zložkách, tej vlastnosti, že je

$$Y_j\, C = 0$$

Vskutku, nech $c \in [a, b]$ je ľubovoľné číslo. Vektory $y_1(c), \ldots, y_j(c)$ sú zrejme závislé a teda existuje konštantný nenulový vektor o j zložkách C taký, že platí

$$(y_1(c), \ldots, y_j(c))\, C = 0$$

Vektor Y_jC je podľa predchádzajúceho riešením systému (A), ktorého hodnoty jeho zložiek v čísle c sú samé nuly. Z toho usudzujeme, že ten vektor je identicky 0, takže platí naše tvrdenie. Treba pripomenúť, že existencia konštantného nenulového vektora C s tou vlastnosťou charakterizuje závislé riešenia.

Nech $(1 \leq)$ h $(< j)$ je hodnosť matice Y_j. Potom po prípadnej zmene označenia sú vektory $y_1, \ldots, y_h$ nezávislé, avšak vektory $y_1, \ldots, y_h, y_\alpha$ kde $\alpha = h+1, \ldots, j$ sú závislé. Teda existuje konštantný nenulový vektor o $h+1$ zložkách c_α taký, že

$$(y_1, \ldots, y_h, y_\alpha)\, c_\alpha = 0$$

Odtiaľ vyplýva vzťah

$$(y_1, \ldots, y_h)\, b_\alpha + y_\alpha c_\alpha = 0$$

kde b_α je vektor, ktorý sa skladá z prvých h zložiek vektora c_α a c_α je posledná zložka vektora c_α. Zrejme je $c_\alpha \neq 0$, pretože v opačnom prípade je vektor b_α nenulový a spĺňa rovnicu $(y_1, \ldots, y_h)\, b_\alpha = 0$, čo je nemožné. Z predchádzajúceho vzorca teda vyplýva

$$y_\alpha = (y_1, \ldots, y_h)\left(-\frac{1}{c_\alpha}\, b_\alpha\right)$$

Tým sme došli k výsledku, že v každom systéme závislých riešení, pokiaľ nie sú všetky nulové, je určitý počet riešení nezávislých a všetky ostatné riešenia systému sú ich lineárnymi kombináciami s konštantnými koeficientami. Nezávislé riešenia sa vyznačujú tým, že ich počet sa rovná hodnosti matice daného systému riešení.

Dôsledkom tejto vety je, že každé riešenie lineárneho systému je lineárnou kombináciou s konštantnými koeficientami riešení ľubovoľného fundamentálneho systému. Vskutku, nech $z_1, \ldots, z_n$ je ľubovoľný fundamentálny systém riešení a y ľubovoľné riešenie lineárneho systému (A).

Potom zrejme riešenia $z_1, \dots, z_n$, y sú závislé a z predchádzajúcej vety vyplýva, že riešenie y je lineárnou kombináciou s konštantnými koeficientami riešenia $z_1, \dots, z_n$.

Predpokladajme, že poznáme nejaký fundamentálny systém riešení lineárneho systému (A), $z_1, \dots, z_n$. Je otázka, ako vypočítame to riešenie lineárneho systému (A), y, ktoré prechádza daným bodom $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Označme η vektor o zložkách $\eta_1, \dots, \eta_n$ a znakmi $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ vektory, ktorých zložky sú hodnoty zložiek vektorov $z_1, \dots, z_n$ v čísle ξ. Podľa predchádzajúceho výsledku je riešenie y lineárnou kombináciou s konštantnými koeficientami riešení fundamentálneho systému, takže máme:

$$y = (z_1, \dots, z_n)C$$

kde C je vhodný konštantný vektor. Z toho, že vektor y sa v čísle $\xi \in [a,b]$ stotožňuje s vektorom η usudzujeme, že platí rovnica

$$\eta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \cdot C$$

Pretože matica $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ má hodnosť n, vidíme, že touto rovnicou je vektor C jednoznačne určený, a to

$$C = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^{-1}\eta$$

Máme teda výsledok, že riešenie y je dané vzorcom

$$y = (z_1, \dots, z_n)\ (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^{-1}\eta$$

Vidíme, že ak poznáme nejaký fundamentálny systém riešení lineárneho systému (A), potom k výpočtu riešenia, ktoré prechádza daným bodom, stačia racionálne operácie, a to rozriešenie systému n nezávislých lineárnych rovníc o n neznámych (zložkách vektora C).

Treba pripomenúť, že množina všetkých riešení lienárneho systému (A) definovaných v intervale $[a,b]$ sa nazýva <u>všeobecné riešenie systému</u> (A) a každé jednotlivé riešenie z tejto množiny sa nazýva <u>partikulárne riešenie</u>. Z predchádzajúcich úvah vidíme, že všeobecné riešenie systému (A) je množina všetkých lineárnych kombinácií s konštantnými koeficientami riešení ľubovoľného fundamentálneho systému a ak je známy nejaký fundamentálny systém riešení, vypočíta sa partikulárne riešenie prechádzajúce daným bodom racionálnymi operáciami.

76. K tomu, aby sme vypočítali nejaký fundamentálny systém riešení systému (A), nemáme všeobecne iných metód, než metódy popísané v dôkazoch existenčných teorém o riešeniach systémov d. rovníc. Ak však poznáme $(1 \leq)\ j (< n)$ nezávislých riešení systému (A), potom ich môžeme použiť na uľahčenie výpočtu ďalších $n - j$ riešení systému, ktoré by aspoň vo vhodnom intervale $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tvorili spolu s týmito j riešeniami n nezávislých riešení, prípadne fundamentálny systém.

Vskutku predpokladajme, že poznáme j nezávislých riešení systému (A), $y_1, \ldots, y_j$, kde $j \geq 1 \leq j < n$. Pretože tieto riešenia sú nezávislé, má aspoň jeden minor ich matice utvorený z riadkov o istých indexoch $\alpha_1 < \ldots < \alpha_j$ v každom čísle istého intervalu $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ hodnotu rôznu od nuly. Nech $\beta_1 < \ldots < \beta_{n-j}$ značia zvyšujúce riadkové indexy tejto matice a ďalej označme

$$B = (y_1, \ldots, y_j, e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_{n-j}}),$$

kde napr. e_{β_1} značí β_1-tý jednotkový vektor, t.j. vektor, ktorého všetky zložky sú nuly okrem β_1-tej, ktorá je 1. Matica B má zrejme v každom čísle intervalu $[\alpha, \beta]$ hodnosť n a teda k nej existuje inverzná matica B^{-1}. Ďalej vidíme, že platí rovnica

$$B' = (y_1', \ldots, y_j', 0, \ldots, 0) = (Ay_1, \ldots, Ay_j, 0, \ldots, 0) =$$

$$= A\,(y_1, \ldots, y_j, 0, \ldots, 0)$$

takže je

$$B' = A(y_1, \ldots, y_j, 0, \ldots, 0)$$

Nech y je ľubovoľné riešenie systému (A) definované v intervale $[\alpha, \beta]$ a z vektor definovaný v tom istom intervale rovnicou

$$y = Bz$$

Vidíme, že platia vzorce

$$ABz = Ay = y' = B'z + Bz' = A(y_1, \ldots, y_j, 0, \ldots, 0)\,z + Bz'$$

Odtiaľ usudzujeme, že vektor z je riešením lineárneho systému

$$z' = B^{-1}A\,(0, \ldots, 0, e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_{n-j}})\,z \qquad (5)$$

Naopak, každé riešenie tohto lineárneho systému definované v intervale $[\alpha, \beta]$ sa transformuje uvedenou lineárnou substitúciou v určité riešenie lineárneho systému (A), definované v intervale $[\alpha, \beta]$.

Matica koeficientov systému (A) má zrejme v prvých j stĺpcoch samé nuly a ostatné stĺpce sú stĺpcami matice $B^{-1}A$ o indexoch $\beta_1, \ldots, \beta_{n-j}$.

Nech u je vektor o j zložkách, ktoré sa rovnajú prvým j zložkám vektora z a v vektor o $n-j$ zložkách, ktoré sa rovnajú $n-j$ posledným; nech ďalej U je matica typu $j/(n-j)$, zložená z prvkov v prvých j riadkoch matice $B^{-1}A$ a stĺpcoch o indexoch $\beta_1, \ldots, \beta_{n-j}$ a štvorcová matica rádu $n-j$ zložená z prvkov v posledných $n-j$ riadkoch matice $B^{-1}A$ a stĺpcoch s indexmi $\beta_1, \ldots, \beta_{n-j}$. Prvky matíc U a V sú teda spojitými funkciami v intervale $[\alpha, \beta]$. Vidíme, že systém (5) je tvaru

$$u' = U v, \quad v' = V v$$

takže vektor v je riešením systému $n-j$ homogénnych lineárnych rovníc s maticou koeficientov V definovaných v intervale $[\alpha, \beta]$ a zložky vektora u dostaneme kvadratúrami jednotlivých zložiek vektora $U v$, ktoré sú spojitými funkciami v tom istom intervale $[\alpha, \beta]$.

Nech teda $v_1, \ldots, v_{n-j}$ je ľubovoľný fundamentálny systém riešení tohto lineárneho systému a $u_1, \ldots, u_{n-j}$ ľubovoľné vektory, ktoré dostaneme kvadratúrami vektorov $Uv_1, \ldots, Uv_{n-j}$. Potom zrejme vektory

$$z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ z_{n-j} = \begin{pmatrix} u_{n-j} \\ v_{n-j} \end{pmatrix}$$

sú riešeniami systému (5) a teda vektory $Bz_1, \ldots, Bz_{n-j}$ sú riešeniami systému (A), definovanými v intervale $[\alpha, \beta]$. Ďalej platí

$$(y_1, \ldots, y_j, \quad Bz_1, \ldots, Bz_{n-j}) = (B e_1, \ldots, B e_j, Bz_1, \ldots, Bz_{n-j}) =$$
$$= B(e_1, \ldots, e_j, z_1, \ldots, z_{n-j})$$

a odtiaľ usudzujeme, že riešenia systému (A) $y_1, \ldots, y_j, Bz_1, \ldots, Bz_{n-j}$ sú nezávislé v intervale $[\alpha, \beta]$, lebo matica B má v každom čísle intervalu $[\alpha, \beta]$ hodnosť n a podobne matica $(e_1, \ldots, e_j, z_1, \ldots, z_{n-j})$, ktorej determinant je $|v_1, \ldots, v_{n-j}|$.

Tým sme došli k výsledku, že ak poznáme $(1 \leqq)\ j\ (< n)$ nezávislých riešení systému (A), definovaných v intervale $[a, b]$, potom k výpočtu n nezávislých riešení systému (A) definovaných vo vhodnom intervale $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ stačí výpočet fundamentálneho systému riešení určitého lineárneho systému o $n - j$ rovniciach a $(n - j).j$ kvadratúr.

Ak má aspoň jeden minor j-tého rádu matice $(y_1, \ldots, y_j)$ v každom čísle intervalu $[a, b]$ hodnotu rôznu od nuly, potom predchádzajúce úvahy môžeme aplikovať v tom zmysle, že interval $[\alpha, \beta]$ je $[a, b]$. Vidíme teda, že ak je známe $(1 \leqq)\ j\ (< n)$ nezávislých riešení systému (A) definovaných v intervale $[a, b]$ a ak má aspoň jeden minor j-tého rádu matice týchto riešení v každom čísle intervalu $[a, b]$ hodnotu rôznu od nuly, potom pre výpočet fundamentálneho systému riešení systému (A) stačí výpočet fundamentálneho systému riešení určitého lineárneho systému o $n-j$ rovniciach a $(n-j).j$ kvadratúr.

77. Kvadratické relácie medzi riešeniami

V teórii závislosti riešení lineárnych systémov, ktorú sme práve študovali, popisujú sa vlastnosti lineárnych kombinácií s konštantnými koeficientami niekoľkých riešení lineárneho systému. Všimnime si teraz kvadratické relácie s konštantnými koeficientami medzi riešeniami dvoch homogénnych lineárnych systémov.

Za tým účelom poznamenajme najprv toto:

Nech

$$(C \equiv)\quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\ y_{\alpha}\ z_{\beta},$$

je ľubovoľná bilineárna forma o konštantných koeficientoch $c_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ a 2 n premenných $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$. Označme písmenom C tiež maticu jej koeficientov a y, z vektory, ktorých zložky sú ľubovoľné hodnoty premenných $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$. Potom hodnotu γ formy C pre tieto hodnoty premenných môžeme vyjadriť vzorcom

$$\gamma = y^{*} C z \qquad (6)$$

zameňujúc kvôli jednoduchosti číslo γ s vektorom o jedinej zložke γ.

Nech teda v ďalšom C značí ľubovoľnú bilineárnu formu s konštantnými koeficientami. Uvažujme dva homogénne lineárne systémy

$$(A)\quad y' = Ay, \quad z' = Bz \quad (B)$$

a nech y, z sú nejaké ich riešenia definované v intervale [a, b]. Hodnota γ formy C pre zložky týchto riešení je daná vzorcom tvaru (6). Ak berieme do úvahy rovnice (A) a (B), odtiaľ vyplýva:

$$\gamma' = y^{*\prime} C z + y^{*} C z' = y^{*} A^{*} C z + y^{*} C B z =$$

$$= y^{*} (A^{*} C + C B) z,$$

takže máme

$$\gamma' = y^{*} (A^{*} C + CB)\ z$$

Odtiaľ vidíme, že ak je medzi maticami koeficientov obidvoch lineárnych systémov (A), (B) vzťah

$$A^{*} C + CB = 0 \qquad (7)$$

potom je medzi každými dvoma ich riešeniami y, z kvadratická relácia

$$y^{*} C z = \text{konšt.} \qquad (8)$$

V tom prípade, ak platí vzťah (7), nazýva sa systém (B) <u>adjungovaný k systému A vzhľadom na maticu C</u>.

Z tejto definície predovšetkým vidíme, že ak je systém (B) adjungovaný k systému (A) vzhľadom na maticu (C), potom je systém (A) adjungovaný k systému (B) vzhľadom na maticu C^*. Ďalej je zrejmé, že ak je matica C symetrická a ak je vzhľadom na ňu jeden lineárny systém adjungovaný k druhému, potom je tiež tento adjungovaný vzhľadom na ňu k prvému. V tomto prípade je teda vlastnosť adjunkcie jedného lineárneho systému k druhému symetrická a hovoríme, že lineárne systémy (A), (B) sú vzhľadom na maticu C adjungované.

Dôležitý zvláštny prípad je ten, kedy lineárny systém (A) je adjungovaný sám k sebe vzhľadom na (symetrickú) maticu C. To je vtedy a len vtedy, ak jeho matica koeficientov A súvisí s maticou C vzťahom

$$A^* C + C A = 0$$

V tom prípade je teda medzi každými dvoma riešeniami systému (A), y_1, y_2 kvadratická relácia s konštantnými koeficientami

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} c_{\alpha\beta} \quad y_{\alpha 1} \quad y_{\beta 2} = \text{konšt.},$$

kde $y_{11}, \ldots, y_{n1}$ sú zložkami vektora y_1 a $y_{12}, \ldots, y_{n2}$ sú zložky vektora y_2.

Všimnime si ešte zvláštny prípad, keď matica C je regulárna. Zo vzorca (7) usudzujeme, že ak je matica C regulárna, je systém (B) vzhľadom na ňu adjungovaný k systému (A) vtedy a len vtedy, ak matica B koeficientov systému (B) je daná vzorcom

$$B = - C^{-1} \; A^* C \tag{9}$$

V tomto prípade je teda matica B podobná s maticou $-A^*$. Ak je naopak matica B podobná s maticou $-A^*$ v tom zmysle, že existuje matica čísel C, ktorá spĺňa identicky rovnicu (9), potom je systém (B) adjungovaný k systému (A) vzhľadom na maticu C.

Vzhľadom na jednotkovú maticu E sú systémy (A) a (B) adjungované vtedy a len vtedy, ak matice ich koeficientov A, B spĺňajú vzťah

$$B = - A^*$$

takže systémy sú tvaru

$$\begin{array}{llll} & y_1' = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n, & z_1' = - a_{11} z_1 - \ldots - a_{n1} z_n & \\ (A) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (B) \\ & y_n' = a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n, & z_n' = - a_{1n} z_1 - \ldots - a_{nn} z_n & \end{array}$$

V tomto prípade je teda medzi každými dvoma riešeniami y, z obidvoch systémov kvadratická relácia

$$y_1 z_1 + \dots + y_n z_n = \text{konšt.},$$

kde $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ sú zložkami vektorov y a z.

Napokon treba pripomenúť, že vzhľadom na maticu E je systém (A) adjungovaný sám k sebe vtedy a len vtedy, ak matica jeho koeficientov A spĺ- na rovnicu

$$A = - A^*$$

t.j. je polosymetrická. V tom prípade je medzi zložkami každého riešenia y systému (A) splnená kvadratická relácia

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 = \text{konšt.}$$

Dôležitým výsledkom teórie adjungovaných systémov je to, že znalosť fundamentálneho systému riešení nejakého lineárneho systému umožňuje výpočet fundamentálneho systému riešení každého lineárneho systému, ktorý je k tomuto systému adjungovaný vzhľadom na nejakú regulárnu maticu, a to len racionálnymi operáciami.

Vskutku predpokladajme, že matica C je regulárna a lineárny systém (B) je adjungovaný k systému (A) vzhľadom na maticu C. Ďalej predpokladajme, že poznáme nejaký fundamentálny systém riešení systému (A), $y_1, \dots, y_n$. Označme písmenom Y maticu tohto fundamentálneho systému. Potom medzi každým riešením y_i a každým riešením z systému (B) definovaným v intervale $[a, b]$ platí vzťah (8), takže máme

$$z^* C^* y_i = k_i$$

kde k_i značí vhodnú konštantu $(i = 1, \dots, n)$.
Odtiaľ vyplývajú vzorce

$$z^* C^* Y = z^* C^* (y_1, \dots, y_n) = k^*$$

kde k^* značí riadkový vektor o zložkách $k_1, \dots, k_n$.

Vidíme, že platí

$$z^* C^* Y = k^* \qquad (10)$$

a teda tiež

$$z = C^{-1} \; Y^{*-1} \; k \qquad (11)$$

Vidíme teda, že každé riešenie z systému (B) definované v intervale $[a, b]$ je dané vzorcom (11), pričom k značí vhodný konštantný vektor. Naopak, ak zvolíme konštantný vektor k akokoľvek, potom vektor z daný pravou stranou vzorca (11) je zrejme definovaný v intervale $[a, b]$ a je riešením systému (B), lebo zo vzorca (11) vyplýva vzťah (10) a odtiaľ rovnice

$$z^{*\prime} C Y + z^{*} C^{*} Y' = z^{*\prime} C^{*} Y + z^{*} C^{*} A Y = z^{*} C^{*} Y = z^{*} B^{*} C^{*} Y =$$

$$= (z^{*\prime} - z^{*} B^{*}) C^{*} Y = 0$$

takže je

$$z^{*\prime} = z^{*} B^{*}$$

a vektor z je skutočne riešením systému (B). Ak zvolíme teda ľubovoľne n nezávislých konštantných vektorov $k_1, \ldots, k_n$, sú vektory

$$C^{-1} Y^{*-1} k_1, \ldots, C^{-1} Y^{*-1} k_n$$

definované v intervale $[a, b]$ a sú riešeniami systému (B). Okrem toho sú nezávislé lebo matica z nich utvorená je súčinom regulárnych matíc C^{-1}, Y^{*-1}, $(k_1, \ldots, k_n)$.

Tým sme došli k výsledku, že ak lineárny systém (B) je adjungovaný k systému (A) vzhľadom na nejakú regulárnu maticu C a ak poznáme nejaký fundamentálny systém riešení lineárneho systému (A) a zvolíme n nezávislých konštantných vektorov $k_1, k_2, \ldots, k_n$, potom vektory

$$C^{-1} Y^{*-1} k_1, \ldots, C^{-1} Y^{*-1} k_n$$

kde Y^{*} je združenou maticou s maticou daného fundamentálneho systému, tvoria fundamentálny systém riešení systému (B).

78. Lineárne systémy s konštantnými koeficientami

1. K integrácii systémov lineárnych d. rovníc s konštantnými koeficientami sa obyčajne používa klasická Weierstrassova metóda, ktorá spočíva na redukcii matice koeficientov systému na kanonický tvar. Tento spôsob umožňuje najmä poznanie funkčnej štruktúry hľadaných integrálov. Pri numerických výpočtoch sa táto metóda spravidla kombinuje s metódou neurčitých koeficientov za účelom ľahšieho docielenia numerickej náplne príslušných vzorcov. Podstatne iná je metóda Peano - Bakerova, založená na postupných kvadratúrach, ktorá vedie k vyjadreniu integrálov daného systému hodnotou exponenciálnej funkcie matice koeficientov tohto systému a počiatočnými podmienkami.

Našou úlohou bude vyložiť integračnú metódu založenú na Weyrovej teórii matíc. Táto metóda sa vyznačuje tým, že vedie k prehľadným explicitným vzorcom pre integrály vyjadrujúce algebraickú povahu problému. Nižšie popísanú metódu možno previesť i na riešenie iných problémov, napr. na riešenie analogického problému pre diferenčné rovnice.

V prehľade uvedieme výsledky Weyrovej teórie, pokiaľ sú potrebné v ďalšom výklade.

Nech A je ľubovoľná štvorcová matica ($1 \leqq$) n-tého rádu v telese komplexných čísel. Nulitou matice A rozumieme rozdiel čísla n a hodnosti matice A. Charakteristickou rovnicou matice A rozumieme algebraickú rovnicu, ktorá vznikne anulovaním determinantu $|A - \lambda E|$; pritom λ značí premennú a E jednotkovú maticu n-tého rádu. Korene charakteristickej rovnice sa nazývajú koreňmi matice A.

Nech a je ľubovoľný koreň matice A a α ($\geqq 1$) jeho násobnosť. Uvažujme o postupnosti matíc:

$$(E =)\quad (A - aE)^0,\ (A-aE)^1,\ (A-aE)^2,\ \ldots,\ (A-aE)^r,\ (A-aE)^{r+1},\ \ldots$$

a označme ich nulity:

$$(0 =)\quad \nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_r,\ \nu_{r+1},\ \ldots$$

Tieto nulity spočiatku rastú, až pri určitej mocnine $(A - aE)^r$ dosiahnu hodnotu α a potom všetky ďalšie sa rovnajú α ; platia teda vzťahy:

$$(0=)\quad \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r = \nu_{r+1} = \ldots \quad (=\alpha)$$

Čísla

$$\alpha_1 = \nu_1,\quad \alpha_2 = \nu_2 - \nu_1,\ \ldots,\quad \alpha_r = \nu_r - \nu_{r-1}$$

sú tzv. charakteristické čísla matice A príslušné ku koreňu a. Vyznačujú sa tým, že nerastú, takže platia nerovnosti:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_r$$

Ďalej existuje tzv. normálna sústava vektorov, príslušná ku koreňu, a ktorá sa skladá z $\alpha_r + \alpha_{r-1} + \ldots + \alpha_1 = \alpha$ nezávislých vektorov o n zložkách. Takáto sústava je charakterizovaná týmito vlastnosťami:

1. Jej vektory sú rozložené do r skupín a systém týchto skupín a tiež systém vektorov v každej skupine sú usporiadané;

2. ρ-tá skupina obsahuje $\alpha_{r-\rho+1}$ vektorov $a_{\rho 1}, \ldots, a_{\rho, \alpha_{r-\rho+1}}$;

3. maticou $A - aE$ sa transformuje σ-tý vektor $a_{\rho\sigma}$ v ρ-tej skupine buď v σ-tý vektor, $a_{\rho+1, \sigma}$ v nasledujúcej skupine, alebo vo vektor nulový, podľa toho, či je $\rho \leqq r - 1$, alebo $\rho = r$ ($\rho = 1, \ldots, r$; $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\rho+1}$).

Normálnu sústavu vektorov príslušnú ku koreňu môžeme teda vyjadriť schémou:

$$a_{11}, \ldots, a_{1,\alpha_r}$$

$$a_{21}, \ldots, a_{2,\alpha_r}; a_{2,\alpha_{r+1}}, \ldots, a_{2,\alpha_{r-1}} \tag{1}$$

$$a_{31}, \ldots, a_{3,\alpha_r}, a_{3,\alpha_{r+1}}, \ldots, a_{3,\alpha_{r-1}}, a_{3,\alpha_{r-1}1}, \ldots, a_{3,\alpha_{r-2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{r1}, \ldots, a_{r,\alpha_r}, a_{r,\alpha_r+1}, \ldots, a_{r,\alpha_{r-1}} \quad a_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, a_{r\,\alpha_{r-2}},$$

$$\ldots, a_{r,\alpha_1}$$

a vzorcami

$$\begin{aligned} (A - aE)a_{\rho\sigma} &= a_{\rho+1,\sigma} \quad \text{pre } 1 \leq \rho \leq r-1,\ \sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\rho+1} \\ &= 0 \qquad\quad \text{pre } \rho = r \end{aligned} \tag{2}$$

Treba pripomenúť, že vektory, ktoré tvoria ρ-tú skupinu, $1 \leq \rho \leq r$, transformujú sa maticou $(A - aE)^{r-\rho}$ v (nezávislé) vektory r-tej skupiny a maticou $(A - aE)^{r-\rho+1}$ vo vektor nulový. Toto používame na určenie normálnej sústavy vektorov v konkrétnych prípadoch.

Za vektory prvej skupiny zvolíme ľubovoľné nezávislé vektory $a_{11}, \ldots, a_{1,\alpha_r}$, ktoré sa maticou $(A - aE)^{r-1}$ transformujú vo vektory nezávislé a maticou $(A - aE)^r$ vo vektor nulový. Ak sú už určené vektory $a_{\rho 1}, \ldots, a_{\rho\,\alpha_{r-\rho+1}}$, $1 \leq \rho \leq r-1$, dostaneme vektory $a_{\rho+1,1}, \ldots, a_{\rho+1,\alpha_{r-\rho+1}}$ podľa vzorcov: $a_{\rho+1,\sigma} = (A - aE)\, a_{\rho\sigma}$, $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\rho+1}$ a v prípade $\alpha_{r-\rho} > \alpha_{r-\rho+1}$ ďalej tým, že za vektory $a_{\rho+1,\alpha_{r-\rho+1}}, \ldots, a_{\rho+1,\alpha_{r-\rho}}$ zvolíme ľubovoľné, od vektorov $a_{\rho+1,\sigma}$ nezávislé vektory, ktoré sa maticou $(A - aE)^{r-\rho-1}$ transformujú vo vektory nezávislé a maticou $(A - aE)^{r-\rho}$ vo vektor nulový.

Ak ku každému koreňu matice A priradíme príslušnú normálnu sústavu vektorov, dostaneme práve n (= súčtu násobností jednotlivých korenov) vektorov. Tieto vektory sú nezávislé a tvoria tzv. <u>normálnu sústavu vektorov príslušnú k matici A</u>.

Ak matica A je reálna, potom ku každému reálnemu koreňu matice A existuje príslušná normálna sústava reálnych vektorov. Ku každým dvom komplexne združeným koreňom matice A existujú príslušné normálne sústavy vektorov, ktoré sú komplexne združené; z každej sústavy dostaneme druhú tým, že jej vektory nahradíme komplexne združenými vektormi.

3. Nech je daný systém n (≥ 1) d. rovníc lineárnych s konštantnými koeficientami:

$$y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (A)$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n$$

Vo vektorovom označení ho môžeme vyjadriť vzorcom:

$$y' = Ay \qquad (A)$$

v ktorom A značí maticu (a_{ik}). Nezávisle premenná nech je x.

Nech a je α-násobným koreňom matice (A) s charakteristickými číslami $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r$ a nech vektory (1) tvoria k nemu príslušnú normálnu sústavu vektorov. Potom vektory $y_{\rho\sigma}$ $(\rho = 1, \dots, r; \sigma = 1, \dots, \alpha_{r-\rho+1})$ v počte α, definované vzorcom:

$$y_{\rho\sigma} = e^{ax}\left(a_{\rho\sigma} + \frac{x}{1!}a_{\rho+1,} + \dots + \frac{x^{r-\rho}}{(r-\rho)!}a_{r\sigma}\right) \qquad (3)$$

sú nezávislé a každý z nich je integrálom systému (A).

Vskutku, každý minor α-tého rádu matice (typu n/α).

$$(y_{r1}, \dots, y_{11}; y_{r2}, \dots, y_{12}; \dots, y_{r\alpha_1})$$

v ľubovoľnom čísle x sa rovná, ako je zrejmé, súčinu čísla $\exp \alpha a x$ a rovnoľahlého minoru matice

$$(a_{r1}, \dots, a_{11}; a_{r2}, \dots, a_{12}; \dots, a_{r\alpha_1})$$

Z toho usudzujeme, že vektory $y_{\rho\sigma}$ sú nezávislé.

Ďalej platí rovnica pre $1 \leq \rho \leq r$, $\sigma = 1, \dots, \alpha_{r-\rho+1}$

$$y_{\rho\sigma}' = ae^{ax}\sum_{k=0}^{r-\rho}\frac{x^k}{k!}a_{\rho+k,\sigma} + e^{ax}\sum_{k=1}^{r-\rho}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}a_{\rho+k,\sigma}$$

kde v prípade $\rho = r$ značí druhý výraz na pravej strane vektor nulový. Odtiaľ vyplývajú vzhľadom na vzorce (2) vzťahy:

$$y_{\rho\sigma}' = ae^{ax}\sum_{k=0}^{r-\rho}\frac{x^k}{k!}a_{\rho+k,\sigma} + e^{ax}\sum_{k=1}^{r-\rho+1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(A -$$

$$- aE)\,a_{\rho+k-1\sigma} = A\left(e^{ax}\sum_{k=0}^{r-\rho}\frac{x^k}{k!}a_{\rho+k,\sigma}\right) = Ay_{\rho\sigma}$$

Z nich vidíme, že vektor $y_{\rho\sigma}$ je integrálom systému (A).

Nech a, b,..., f sú jednotlivé korene matice A a α, β, ..., φ ich násobnosti. Ak ku každému koreňu priradíme podľa vzorcov (3) sústavu integrálov systému (A), dostaneme práve $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ integrálov systému A. Tieto integrály sú nezávislé, lebo determinant ich matice v ľubovoľnom čísle x sa rovná súčinu čísla $\exp(\alpha a + \beta b + \ldots + \varphi f($ x a determinantu normálnej sústavy vektorov, príslušnej k matici A, takže je rôzny od nuly. Tým je určený fundamentálny systém integrálov systému (A).

Všimnime si najmä prípad, kedy matica (A) a tiež nezávisle premenná x sú reálne. Potom ku každému reálnemu koreňu matice A existuje príslušná normálna sústava vektorov reálnych a k nemu podľa vzorcov (3) priradené integrály systému (A) sú tiež reálne. K dvom komplexne združeným koreňom $a = a_1 + i\,a_2$, $\bar{a} = a_1 - i\,a_2$ matice A existujú príslušné normálne sústavy vektorov komplexne združených $a_{\rho\sigma} = a_{\rho\sigma 1} + i\,a_{\rho\sigma 2}$, $\bar{a}_{\rho\sigma} = a_{\rho\sigma 1} - i\,a_{\rho\sigma 2}$ a k nim podľa vzorcov (3) priradené integrály $y_{\rho\sigma}$, $\bar{y}_{\rho\sigma}$ systému A sú komplexne združené. Vektory $y_{\rho\sigma 1} = (y_{\rho\sigma} + \bar{y}_{\rho\sigma}) : 2$, $y_{\rho\sigma 2} = (y_{\rho\sigma} - \bar{y}_{\rho\sigma}) : 2i$, vyjadrené vzorcami:

$$y_{\rho\sigma 1} = e^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\rho} \frac{x^k}{k!} (\cos a_2 x\; a_{\rho+k,\,1} - \sin a_2 x\; a_{\rho+k,\sigma 2})$$

$$y_{\rho\sigma 2} = e^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\rho} \frac{x^k}{k!} (\sin a_2 x\; a_{\rho+k,\sigma 1} + \cos a_2 x\; a_{\rho+k,\sigma 2}) \tag{4}$$

sú reálne, nezávislé a sú zrejme integrálmi systému (A). Vidíme, že ak matica A je reálna, existuje fundamentálny systém integrálov systému (A), ktoré sú tvaru (3) alebo vždy po dvoch tvaru (4). Treba pripomenúť, že vzorce (3) a (4) vyjadrujú integrály systému (A) zrejme i pre komplexné hodnoty premennej x.

4. <u>Príklad</u>. Uvažujme lineárny systém

$$\begin{aligned}
y_1' &= \quad\; - y_2 + y_3 \\
y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \qquad (A) \\
y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\
y_4' &= \quad\; 2y_2 - 2y_3
\end{aligned}$$

Matica koeficientov je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a jej charakteristická rovnica

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 = 0$$

Vidíme, že matica $A - \lambda E$ má len štvornásobný koreň 0. Utvoríme postupnosť mocnín matice

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

a vidíme, že ich hodnosti sú

4, 2, 1, 0, ...

a teda ich nulity

0, 2, 3, 4, ...

Vychádza teda, že ku koreňu 0 prináležia tri charakteristické čísla:

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1$

takže príslušná normálna sústava vektorov má tvar:

a_{11},

a_{21},

a_{31}, a_{32}

Aby sme určili vektor a_{11}, stačí zvoliť ľubovoľný vektor, ktorý sa transformuje maticou A^3 vo vektor 0 a maticou A^2 vo vektor nenulový, teda napr.

$$a_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor a_{21} je potom $A\ a_{11}$, takže

$$a_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor a_{31} je $A\ a_{21}$, takže

$$a_{31} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Zostáva určiť vektor a_{32} tak, aby $Aa_{32} = 0$ a aby vektory a_{31}, a_{32} boli nezávislé; takým vektorom je napr.:

$$a_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tým máme určenú normálnu sústavu vektorov, ktorá patrí k matici A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a môžeme hned napísať fundamentálny systém riešení daného lineárneho systému (A)

$$y_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x}{1!} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$y_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x}{1!} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$y_{31} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad y_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že všeobecné riešenie systému (A) je dané vzorcami:

$$y_1 = C_1(1 + 2x^2) + 2C_2x + C_3 + C_4$$

$$y_2 = -2C_1x - C_2 + C_4$$

$$y_3 = 2C_1x + C_2 + C_4$$

$$y_4 = -4C_1x^2 - 4C_2x - 2C_3$$

v ktorých C_1, C_2, C_3, C_4 značia ľubovoľné konštanty.

79. Nehomogénne lineárne systémy

Nech

$$y' = Ay + a \qquad (\bar{A})$$

je ľubovoľný lineárny systém, ktorého koeficienty sú spojitými funkciami v intervale $j = [a, b]$. Ako sme už spomenuli v ods. 72, patrí k nemu práve jeden lineárny systém homogénny

$$y' = Ay \qquad (A)$$

Nech y a y_0 sú ľubovoľné dve riešenia systému $(\bar{A})$ definované v intervale j. Potom ich rozdiel $y - y_0$ vyhovuje zrejme systémum (A), t.j. je

$$(y - y_0)' = A(y - y_0)$$

Nech Y je ľubovoľný fundamentálny systém riešení systému (A) definovaný v intervale j. Potom podľa ods. 75 existuje konštantný vektor c taký, že platí

$$y - y_0 = Yc$$

t.j.

$$y = y_0 + Yc \tag{1}$$

Naopak, ľahko sa presvedčíme o tom, že ak konštantný vektor c je akýkoľvek, vektor y daný vzorcom (1) je riešením systému ($\bar{A}$), ak y_0 je riešením systému ($\bar{A}$) a Y je fundamentálnym systémom riešení systému (A). Tým sme došli k tomuto výsledku:

Všetky riešenia y systému ($\bar{A}$) dostaneme z jedného z nich y_0 a z ľubovoľného fundamentálneho systému riešení Y, príslušného homogénneho systému (A), podľa vzorca (1), kde c je nejaký konštantný vektor.

80. Riešenie nehomogénneho systému ($\bar{A}$)

a) Variáciou konštánt.

Nech $z = Zc$ je všeobecným riešením homogénneho systému

$$z' = Az$$

Utvorme si vektor $y = Zc(x)$, kde $c = c(x)$ je vektor, ktorého zložky sú funkciami premennej x, ktoré majú deriváciu v j.

Nájdime podmienku, ktorú musí spĺňať vektor $c(x)$, aby $Zc(x)$ bolo riešením systému ($\bar{A}$).

Musí platiť

$$Z'c(x) + Zc'(x) = AZc(x) + a$$

Nakoľko platí

$$Z' = AZ$$

je

$$AZc(x) + Zc'(x) = AZc(x) + a$$

t.j.

$$Zc'(x) = a$$

t.j.

$$c'(x) = Z^{-1}a$$

$$c(x) = \int_{\xi}^{x} Z^{-1}(t)\, a(t)dt + k_0$$

kde k_0 značí ľubovoľný konštantný vektor.

Teda

$$y(x) = Z(x)\left\{ \int_{\xi}^{x} Z^{-1}(t)\, a(t)\, dt + k_0 \right\}$$

je riešením systému $(\bar{A})$.

Nech $k_0 = 0$, potom máme partikulárne riešenie systému $(\bar{A})$:

$$y_0(x) = Z(x) \int_{\xi}^{x} Z^{-1}(t)\, a(t)\, dt$$

Všeobecné riešenie systému $(\bar{A})$ je teda

$$y(x) = Z(x)k + Z(x) \int_{\xi}^{x} Z^{-1}(t)\, a(t)\, dt$$

t.j.

$$y(x) = Z(x) \left\{ \int_{\xi}^{x} Z^{-1}(t)\, a\,(t)\, dt + k \right\}$$

kde k značí ľubovoľný konštantný vektor.

b) Pomocou adjungovaného lineárneho systému.

Nech $C = (c_{\alpha\beta})$ je regulárna matica n-tého rádu.

Utvorme hodnotu γ bilineárnej formy $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, z$ z nejakého riešenia y nehomogénneho systému $(\bar{A})$ a riešenia z systému

$$z' = Bz \tag{B}$$

Dostaneme

$$\gamma = y^{*}\, C\, z \tag{2}$$

a ďalej

$$\gamma' = y^{*'} Cz + y^{*} Cz' = (y^{*} A^{*} + a^{*})\, Cz + y^{*} CBz$$

$$\gamma' = y^{*} (A^{*} C + CB)\, z + a^{*} Cz \qquad (3)$$

Predpokladajme, že matica B je adjungovaná k A vzhľadom na C, takze

$$A^{*} C + CB = 0$$

Zvoľme ľubovoľný fundamentálny systém riešení systému (B), $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ a označme symbolom γ_α hodnotu bilineárnej formy (2) pre $z = z_\alpha$ a symbolom γ riadkový vektor o zložkách $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Potom máme

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = y^{*} CZ$$

takže

$$y^{*} = \gamma\, Z^{-1} C^{-1} \qquad (4)$$

Zo vzorca (3) súčasne vyplýva

$$\gamma(x) = \int_{\xi}^{x} a^{*}(t)\, C\, Z(t)\, dt + k^{*}$$

kde k je konštantný vektor. Z tohto vzorca a zo (4) máme

$$y^{*}(x) = \left\{ \int_{\xi}^{x} a^{*}(t)\, C\, Z(t)\, dt + k^{*} \right\} Z^{-1}(x) C^{-1}$$

a teda

$$y(x) = C^{-1} Z^{*-1}(x) \left\{ \int_{\xi}^{x} Z^{*}(t)\, C^{*} a(t)\, dt + k \right\}$$

Ak $C = E$ vychádza

$$y(x) = Z^{*-1}(x) \left\{ \int_{\xi}^{x} Z^{*}(t)\, a(t)\, dt + k \right\}$$