II. DIFERENCIÁLNE ROVNICE VYŠŠÍCH RÁDOV

11. Základné pojmy

63. Obyčajnou d. rovnicou n-tého rádu ($n \geq 1$) rozumieme vzťah medzi hodnotami nezávisle premennej a príslušnými hodnotami nejakej funkcie tejto premennej a jej deriváciami rádu n a nižších rádov. Taká d. rovnica je obyčajne daná vzorcom tvaru

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

kde F značí určitú funkciu $n + 2$ premenných $x, y, y', \ldots y^{(n)}$ definovanú v nejakom obore.

<u>Systémom obyčajných d. rovníc</u> rozumieme určitý počet m (≥ 1) vzťahov medzi hodnotami nezávisle premennej a príslušnými hodnotami m funkcií tejto premennej $y_1, y_2, \ldots y_m$ a ich deriváciami určitých rádov. Taký systém je spravidla daný vzorcami tvaru:

$$\begin{aligned} &F_1 (x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m (x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

<u>Rádom systému d. rovníc</u> rozumieme rád najvyššej derivácie, ktorá sa v systéme vyskytuje. Napr. rádom systému (2) je najväčšie z čísel $n_1, \ldots, n_m$.

Všimnime si, že každá d. rovnica n-tého rádu je systémom d. rovníc n-tého rádu, ktorý má jedinú rovnicu.

<u>Riešením</u> alebo <u>integrálom systému</u> m (≥ 1) <u>d. rovníc</u> rozumieme m funkcií nezávisle premennnej, definovaných v istom intervale, ktoré systému vyhovujú, t.j. ktoré sa vyznačujú tým, že hodnoty nezávisle premennej a príslušné hodnoty funkcií a derivácií sú vo vzťahoch daných tým systémom. Napr. riešením systému (2) rozumieme každý systém m funkcií premennej x, $y_1(x), \ldots, y_m(x)$, definovaných v nejakom intervale j, ktoré vyhovujú systému (2), t.j. ktoré sa vyznačujú tým, že pre $x \in j$ platí

$$\begin{aligned} &F_1 \left[x, y_1(x), y_1'(x), \ldots, y_1^{(n_1)}(x), \ldots, y_m(x), y_m'(x), \ldots y_m^{(n_m)}(x)\right] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m \left[x, y_1(x), y_1'(x), \ldots, y_1^{(m_1)}(x), \ldots, y_m(x), y_m'(x), \ldots, y_m^{(n_m)}(x)\right. = 0 \end{aligned}$$

Jednotlivé funkcie tvoriace riešenie systému d. rovníc nazývame zložkami riešenia.

64. Explicitné d. rovnice a systémy explicitných d. rovníc

D. rovnica n-tého rádu sa nazýva explicitnou, ak je tvaru

$$y^{(n)} = f\left[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right]$$

kde f značí funkciu premenných $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ definovanú v nejakom $n + 1$ - rozmernom obore ω.

Podobne definujeme systémy explicitných d. rovníc.

Dôležité sú najmä systémy explicitných d. rovníc prvého rádu, ktoré majú tvar

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

kde $f_1, \ldots, f_n$ sú funkcie premenných $x, y_1, \ldots, y_n$, definované v nejakom $n + 1$ - rozmernom obore ω.

65. Určitý úsek teórie explicitných d. rovníc n-tého rádu je zahrnutý v teórii systémov explicitných d. rovníc prvého rádu. Vskutku, ku každej explicitnej d. rovnici n-tého rádu existuje určitý systém explicitných d. rovníc prvého rádu, ktorý sa vyznačuje tým, že jedna zložka každého jeho riešenia je riešením tej d. rovnice.

Nech je daná d. rovnica

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

v nejakom obore ω

Uvažujme o tomto systéme explicitných d. rovníc:

$$\begin{aligned} y' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\ldots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Predpokladajme, že existuje riešenie tohto systému $y(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_{n-1}(x)$ definované v nejakom intervale j. Potom pre $x \in j$ je

$$y'(x) = y_1(x),\ y''(x) = y_2(x),\ \dots,\ y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}(x)$$

$$y^{(n)}(x) = f\left[x,\ y(x),\ y'(x),\ \dots,\ y^{(n-1)}(x)\right]$$

Z posledného vzorca vidíme, že prvá zložka $y(x)$ nášho riešenia je riešením explicitnej d. rovnice (3), ktoré je definované v intervale j.

Naopak, nech je daný systém explicitných d. rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \end{aligned} \tag{4}$$

v nejakom obore ω. Potom za určitých predpokladov o funkciách f_1, ..., f_n vyhovuje každá zložka každého jeho riešenia vždy určitej d. rovnici n-tého rádu. Vskutku, predpokladajme, že každá funkcia f_i má v obore ω všetky parciálne derivácie až po rád $n-1$ včítame. Ak y_1, y_2, ..., y_n je ľubovoľné riešenie systému (4), definované v istom intervale j, potom máme pre $x \in j$

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_\nu} \cdot f_\nu$$

$$y_1''' = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \sum_{\nu=1}^{n} \left[2\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y_\nu}\ f_\nu + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x}\right] +$$

$$+ \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_\nu\ \partial y_\mu}\ f_\nu\ f_\mu + \frac{\partial f_1}{\partial y_\nu}\ \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu} \cdot f_\mu\right]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_1^{(n)} = \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x^{n-1}} + \dots$$

Vidíme, že derivácie rádov 1, ..., n zložky y_1 uvažovaného riešenia systému (4) spĺňajú v každom čísle $x \in j$ rovnice tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= \Phi_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)} &= \Phi_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \end{aligned} \tag{5}$$

pričom je samozrejme $\Phi_1 = f_1$. Vo zvláštnych prípadoch sa môže stať, že z prvých n-1 rovníc (5) možno vyjadriť premenné $y_2, \dots y_n$ pomocou veličín $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. V tom prípade dosadením týchto hodnôt do posledného vzorca (5) dostaneme explicitnú d. rovnicu n-tého rádu.

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}) \tag{6}$$

Tejto d. rovnici vyhovuje zložka y_1 uvažovaného riešenia systému d. rovníc (4). Ľahko vidíme, že d. rovnici (6) vyhovuje zložka y_1 každého riešenia systému d. rovníc (4).

Príklad. Uvažujme o systéme d. rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + x\, y_2 \\ y_2' &= x^2\, y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

v obore $x > 0, -\infty < y_1, y_2 < \infty$

Z prvej rovnice (1) dostaneme

$$y_1'' = (1 + x^3)\, y_1 + (1 + 2x)\, y_2$$

a okrem toho

$$y_2 = -\frac{1}{x}\, y_1 + \frac{1}{x}\, y_1' .$$

Dosadením tejto hodnoty y_2 do predchádzajúceho vzorca dostaneme d rovnicu 2. rádu

$$y''_1 = (x^3 - 1 - \frac{1}{x})\, y_1 + (2 + \frac{1}{x})\, y_1'$$

Tejto d. rovnici vyhovuje zložka y_1 každého riešenia systému d. rovníc (1).

Podobne dostaneme pre zložku y_2 každého riešenia systému d. rovníc (1) d. rovnicu 2. rádu

$$y_2'' = (x^3 - 1 - \frac{2}{x})\, y_2 + 2\,(1 + \frac{1}{x})\, y_2' .$$

Vidíme, že teória explicitných d. rovníc n-tého rádu je v určitom zmysle časťou teórie systémov explicitných d. rovníc 1. rádu. V mnohom smere je teória týchto systémov jednoduchšia než teória explicitných d. rovníc vyšších rádov.

Pravda, naopak, niektoré otázky týkajúce sa d. rovníc vyšších rádov možno riešiť jednoduchšie priamo než v rámci teórie zmienených systémov.

12. Základné vlastnosti systémov explicitných d. rovníc 1. rádu

66. Smerové pole

Budeme sa najskôr zaoberať najjednoduchšími vlastnosťami systémov explicitných d. rovníc 1. rádu.

Uvažujme o systéme explicitných d. rovníc 1. rádu:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \qquad (A)$$

kde $f_1, \dots, f_n$ značia dané funkcie $n + 1$ premenných $x, y_1, \dots, y_n$, definované v nejakom obore ω. ω, je tzv. definičný obor systému (1). O funkciách $f_1, \dots, f_n$ a o obore ω neurobíme zatiaľ žiadne predpoklady.

Funkcie $f_1, \dots, f_n$ priraďujú ku každému bodu $(x, y_1, \dots, y_n) \in \omega$ n čísel: $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$.

Usporiadaná skupina $2n + 1$ čísel $(x, y_1, \dots, y_n, f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n))$ sa nazýva lineárny element systému (A) v bode $(x, y_1, \dots, y_n)$; jednotlivé čísla spomenutej usporiadanej skupiny sú súradnice lineárneho elementu. Množina všetkých lineárnych elementov v jednotlivých bodoch oboru ω. je tzv. smerové pole systému (A). Množina bodov $(x, y_1, \dots, y_n) \in \omega$, v ktorých každá funkcia f_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ má tú istú hodnotu C_α nazýva sa izoklína systému (A). Rovnice každej izoklíny sa teda môžu napísať v tvare:

$$f_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1, \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n) = C_n$$

kde $C_1, \dots, C_n$ značia nejaké konštanty. V bodoch tejže izoklíny majú všetky lineárne elementy tú istú $(n + 2), \dots, (2n + 1)$-tú súradnicu.

Ľubcvoľný lineárny element $(x, y_1, \dots, y_n, f_1, \dots, f_n)$ si môžeme znázorniť malou úsečkou v $n + 1$ - rozmernom priestore vzhľadom na pravouhlý súradnicový systém. Táto úsečka prechádza bodom $(x, y_1, \dots, y_n)$, jej priemet do roviny $[x, y_\alpha]$, $\alpha = 1, \dots, n$, zviera s kladnou polosou x uhol, ktorého tangens je $f_\alpha(x, y_1, \dots, y_n)$. Takú úsečku si môžeme ľahko predstaviť, keď $n = 2$, t.j. keď ide o trojrozmerný priestor. Ak $n > 2$, máme do činenia s priestormi o vyššom počte rozmerov a bezprostrednú predstavu o príslušných geometrických útvaroch nemáme; matematik, ktorý je zbehlý vo viacrozmernej