$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

je funkcia f spojitá v otvorenej množine σ. Potom dolná (horná) peanovská funkcia je v každom bode svojho oboru zdola (zhora) spojitá.

Dôkaz tejto vety je obdobný dôkazu predchádzajúcej vety. Jediná podstatná zmena je v tom, že miesto nerovnosti (1) použijeme to, že najmenší (najväčší) integrál v ľubovoľnom bode dolného (horného) oboru vzhľadom na najmenší (najväčší) integrál v niektorom bode množiny σ leží celý v tomto obore.

8. Vety o jednoznačnosti riešení

47. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

v nejakom obore σ.

Z predchádzajúcich úvah vieme, že daným bodom $(\xi, \eta) \in \sigma$ môže prechádzať jedno alebo viac riešení d. rovnice (a), definovaných v tom istom intervale. Ak napr. je funkcia f v okolí bodu (ξ, η) spojitá, prechádza týmto bodom buď práve jedno alebo hneď nekonečne mnoho riešení d. rovnice (a) definovaných v tom istom intervale.

Obsahom tejto kapitoly je vyšetrovanie podmienok, za ktorých daným bodom z oboru σ prechádza najviac jedno riešenie, definované v istom intervale, alebo inými slovami, kedy riešenie d. rovnice (a) je v danom bode jednoznačné. Otázka jednoznačnosti riešenia prechádzajúceho daným bodom má veľkú dôležitosť v aplikáciách, kedy d. rovnice popisujú priebeh fyzikálneho, chemického, biologického alebo iného deja. V týchto prípadoch daný bod vyjadruje istý počiatočný stav deja a otázka jednoznačnosti riešenia v tomto bode značí, či priebeh deja je počiatočným stavom jednoznačne určený. V kladnom prípade umožňuje znalosť vlastností d. rovnice predvídať len z daného počiatočného stavu priebehu deja.

48. Za účelom stručnejšieho vyjadrovania zavedieme niekoľko definícií:

Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ je ľubovoľný bod.

Budeme hovoriť, že bod (ξ, η) je <u>sprava (zľava, obojstranne) lokálne pravidelný</u>, ak existuje kompaktné okolie čísla ξ sprava (zľava, obojstranné), vyznačujúce sa tým, že každé dve int. krivky d. rovnice (a), vychádzajúce z bodu (ξ, η) (vchádzajúce do bodu (ξ, η), prechádzajúce bodom (ξ, η)) splývajú v spoločnej časti svojich definičných intervalov a spomenutého okolia bodu (ξ, η).

Ďalej budeme hovoriť, že bod (ξ, η), je sprava (zľava, obojstranne) pravidelný, presnejšie: sprava (zľava, obojstranne) absolútne pravidelný, ak každé dve int. krivky d. rovnice (a), vychádzajúce z bodu (ξ, η), (vchádzajúce do bodu (ξ, η), prechádzajúce bodom (ξ, η)), v spoločnej časti svojich definičných intervalov splývajú.

K pojmu absolútnej pravidelnosti pripojujeme poznámku:

Ak bod (ξ, η) je absolútne pravidelný sprava (zľava, obojstranne) a ak z neho vychádza (do neho vchádza, ním prechádza) int. krivka d. rovnice (a), potom táto int. krivka je jediná v tom zmysle, že každá int. krivka, ktorá z bodu (ξ, η) vychádza (do neho vchádza, ním prechádza) je časťou pôvodnej int. krivky, alebo ju obsahuje.

Ľahko nahliadneme, že ak bod (ξ, η) je lokálne alebo absolútne pravidelný súčasne zľava i sprava, potom je pravidelný obojstranne a naopak.

Body oboru σ, ktoré nie sú lokálne alebo absolútne pravidelné, nazývame lokálne prípadne absolútne rozvetvovacie. Budeme hovoriť o bodoch lokálne, prípadne absolútne rozvetvovacích sprava, zľava alebo obojstranne.

Všimnime si, že bod (ξ, η) môže byť napr. sprava lokálne pravidelný a súčasne sprava absolútne rozvetvovací. Napr. ak ide o d. rovnicu (a), v ktorej funkcia f je definovaná v celej rovine takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \sqrt[3]{y} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Každý bod $(\xi, 0)$ so zápornou úsečkou ξ, $\xi < 0$, je sprava lokálne pravidelný, lebo v každom intervale $[\xi, \xi']$, $\xi < \xi' < 0$, existuje jediné riešenie d. rovnice (a) $y = 0$, vychádzajúce z bodu $(\xi, 0)$. Súčasne však je sprava absolútne rozvetvovací, lebo z neho vychádzajú napr. tieto tri sprava úplné riešenia d. rovnice (a):

$$y = 0 \quad \text{pre} \quad x \geq \xi$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad \xi \leq x \leq 0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad \xi \leq x \leq 0 \\ \left(-\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ľahko nahliadneme, že medzi lokálnou a absolútnou pravidelnosťou je táto súvislosť: Ak bod (ξ, η) je absolútne pravidelný sprava (zľava, obojstranne), potom každý bod každej int. krivky, ktorá z neho vychádza (do neho vchádza, ním prechádza), je lokálne pravidelný sprava (zľava, obojstranné).

Ak každý bod oboru σ je lokálne pravidelný sprava (zľava, obojstranne), potom je i absolútne pravidelný sprava (zľava, obojstranne).

Ak každý bod nejakej int. krivky, ktorá je sprava (zľava, obojstranne) úplná, je sprava (zľava, obojstranne) lokálne pravidelný, potom je i absolútne sprava (zľava, obojstranne) pravidelný.

49. **N u t n é a p o s t a č u j ú c e p o d m i e n k y p r e j e d n o z n a č n o s ť r i e š e n í** odvodil T. Yosie [Japanese Journal of mathematics. Vol. II. (1925).] . úvahami, ktoré sa primykajú k Perronovej existenčnej teoréme. V tomto odseku len stručne popíšeme myšlienku, z ktorej vychádzal T. Yosie v týchto úvahách. Zdá sa, že Yosieove výsledky nie sú dosť vhodné pre aplikácie, avšak majú prednosť, že popisujú súčasne nutné i postačujúce podmienky jednoznačnosti.

Obmedzíme sa na vyšetrovanie riešení d. rovnice (a), s ohraničenou a spojitou funkciou f(x, y), ktoré riešenia sú definované pre všetky $x \in [\xi, \xi + a]$, kde $a > 0$. Každé také riešenie leží, ako je známe z odseku 27 vo vhodnom klinovom obore R. Úsečky vychádzajúce z bodu (ξ, η) a ohraničujúce obor R majú vlastnosti funkcií u(x), v(x), o ktorých je reč v Perronovej existenčnej teoréme, a teda teorému môžeme aplikovať na obor R.

Podľa tejto teorémy existuje isté najväčšie riešenie G(x) a najmenšie riešenie g(x) d. rovnice (a), definované v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktoré v čísle ξ majú hodnotu η. Obidve tieto riešenia ležia zrejme v obore R. Bodom (ξ, η) prechádza len jedno riešenie d. rovnice (a) vtedy a len vtedy, ak obidve riešenia G(x) a g(x) splývajú.

Ďalej vieme, že najmenšie riešenie g(x) môžeme s ľubovoľnou presnosťou aproximovať dolnými funkciami, podobne najväčšie riešenie G(x) hornými funkciami.

Predpokladajme teda, že bodom (ξ, η) prechádza len jedno riešenie d. rovnice (a), potom pre $x \in [\xi, \xi + a]$ je

$$g(x) = G(x)$$

Zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Potom existuje dolná funkcia $\varphi(x)$ taká, že pre $x \in [\xi, \xi + a]$ je

$$g(x) - \varphi(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

a horná funkcia $\psi(x)$ taká, že

$$\psi(x) - G(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Z týchto nerovností vyplýva pre $x \in [\xi, \xi + a]$

$$\psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

Predpokladajme naopak, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje dolná funkcia $\varphi(x)$ a horná funkcia $\psi(x)$ vyznačujúca sa tým, že pre $x \in [\xi, \xi + a]$ platí nerovnosť:

$$\psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

Potom zo vzťahov

$$\psi(x) \geqq G(x) \geqq g(x) \geqq \varphi(x)$$

vyplýva nerovnosť

$$G(x) - g(x) < \varepsilon$$

a teda máme

$$G(x) = g(x)$$

lebo číslo $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné.

Tým sme došli k základnému výsledku Yosieových úvah, že bodom (ξ, η) prechádza jediné riešenie d. rovnice (a), definované pre $x \in [\xi, \xi + a]$ vtedy a len vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje dolná a horná funkcia, ktoré sa vyznačujú tým, že sa ich hodnoty v každom čísle intervalu $[\xi, \xi + a]$ líšia od seba o menej než ε.

Vychádzajúc z tohto poznatku, Yosie odvodil dve ďalšie vety, popisujúce nutné i postačujúce podmienky pre jednoznačnosť riešení, a to tým, že konštruoval dolné a horné funkcie zvláštneho druhu (polynómy a polygóny).

50. Postačujúce podmienky pre jednoznačnosť riešení

Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ je ľubovoľný bod. Odpoveď na otázku, či bod (ξ, η) je sprava (zľava, obojstranne), lokálne pravidelný, závisí od vlastností funkcie f v jeho okolí vpravo (vľavo, na oboch stranách) od priamky $x = \xi$. V prípade, že poznáme nejaký obor, v ktorom ležia všetky int. krivky d. rovnice (a) vychádzajúc z bodu (vchádzajúce do bodu, prechádzajúce bodom) (ξ, η), môžeme sa obmedziť len na vyšetrovanie vlastností funkcie f v prieniku príslušného okolia a spomenutého oboru.

Budeme sa teraz zaoberať vlastnosťami funkcie f, ktoré stačia na to, aby bod (ξ, η) bol lokálne pravidelný <u>sprava</u>. Z nájdených výsledkov dostaneme transformáciou premenných $X = -x$, $Y = y$ vlastnosti postačujúce na lokálnu pravidelnosť bodu (ξ, η) zľava a zhrnutím výsledkov o lokálnej pravidelnosti sprava a zľava, dostaneme postačujúce podmienky pre obojstrannú lokálnu pravidelnosť bodu (ξ, η).

Kvôli stručnejšiemu vyjadrovaniu používame v ďalších úvahách v tomto odseku tie názvy:

<u>Kompaktným (k.) okolím bodu</u> (ξ, η) rozumieme každý kompaktný dv. interval o strede v bode (ξ, η); niekedy používame podrobnejší názov: <u>obojstranné k. okolie bodu</u> (ξ, η). <u>Kompaktným (k.) okolím sprava (zľava) bodu</u> (ξ, η) rozumieme prienik ľubovoľného k. okolia bodu s polrovinou $x \geqq \xi$ $(x \leqq \xi)$.

51. Lipschitzova podmienka

Budeme hovoriť, že funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) <u>Lipschitzovu podmienku</u>, stručnejšie: <u>L. podmienku</u>, ak existuje k. okolie d bodu (ξ, η), v ktorom je funkcia f definovaná a číslo $L > 0$ také, že pre každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in d$ (všimnime si, že ich úsečka je rovnaká) platí nerovnosť:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq L\,|y_1 - y_2| \qquad (1)$$

Tú časť podmienky, ktorá sa týka existencie čísla L, môžeme tiež vyjadriť tým, že množina všetkých čísel

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

pričom $(x, y_1), (x, y_2) \in d$, $y_1 - y_2 \neq 0$, je ohraničená.

Predovšetkým si všimnime, že ak existuje k. okolie d bodu (ξ, η), v ktorom je funkcia f definovaná a má v ňom čiastočnú deriváciu f'_y podľa y a ak funkcia f'_y je v k. okolí d ohraničená, potom funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku. Toto tvrdenie sa ľahko dokáže s použitím vety o prírastku funkcie.

Okrem L. podmienky v bode (ξ, η) (obojstrannej), ktorú sme už definovali, je účelné zaviesť pojem L. podmienky v bode (ξ, η) <u>sprava a zľava</u>. Príslušné definície dostaneme, ak v uvedenej definícii L. podmienky vsunieme za slová podmienku a okolie vždy slovo sprava alebo zľava. Je zrejmé, že uvedené úvahy o L. podmienke platia obdobne o L. podmienke sprava a zľava.

Všimnime si, že ak funkcia f spĺňa L. podmienku v bode (ξ, η) súčasne sprava i zľava, potom ju spĺňa v pôvodnom zmysle (obojstranne) a naopak.

Ďalej si všimnime, že ak funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku, potom ju spĺňa v každom bode istého okolia tohto bodu. Podobná, avšak trochu zložitejšia situácia nastane v prípade, že funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku sprava alebo zľava. To ponechávame čitateľovi na uváženie.

Dokážme si teraz nasledujúcu vetu o lokálnej jednoznačnosti riešení:

Ak funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku sprava, potom je bod (ξ, η) sprava lokálne pravidelný.

<u>Dôkaz</u>: Predpokladajme, že funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku sprava, takže v istom dv. intervale $d: \xi \leq x \leq \xi + a$, $\eta - b \leq y \leq \eta + b$, $(a, b > 0)$ platí nerovnosť (1). Nech $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú dva integrály d. rovnice (a) vlastností $y_1(\xi) = y_2(\xi) = \eta$

Nech funkcia $y_1(x)$ je definovaná v okolí sprava čísla ξ, j_1, a podobne $y_2(x)$ v okolí sprava čísla ξ, j_2.

Nech $x_0 \in j_1 \cap j_2 \cap [\xi, \xi + a]$. Ukážeme, že $y_1(x) = y_2(x)$ pre $x \in [\xi, x_0]$.

Zvoľme si ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a ukážeme, že pre $x \in [\xi, x_0]$ platí:

$$y_1(x) - y_2(x) \leq \varepsilon\, e^{2L(x - \xi)} \tag{2}$$

K dôkazu tohto tvrdenia použime metódu indukcie v kontinuu.

1. Predovšetkým vidíme, že pre $x = \xi$ je nerovnosť (2) splnená.

2. Predpokladajme, že nerovnosť (2) neplatí pre všetky $x \in [\xi, x_0]$. Potom ale existuje $c \in [\xi, x_0]$ také, pre ktoré je:

$$y_1(c) - y_2(c) = \varepsilon\, e^{2L(c - \xi)}$$

$$y_1'(c) - y_2'(c) \geq 2L\varepsilon\, e^{2L(c - \xi)}$$

Z poslednej nerovnosti vyplýva

$$2L\varepsilon\, e^{2L(c-\xi)} \leq y_1'(c) - y_2'(c) = f[c, y_1(c)] - f[c, y_2(c)] \leq$$

$$\leq |f[c, y_1(c)] - f[c, y_2(c)]| \leq L\,|y_1(c) -$$

$$- y_2(c)| = L\varepsilon\, e^{2L(c-\xi)}$$

Teda

$$2L\varepsilon\, e^{2L(c-\xi)} \leq L\varepsilon\, e^{2L(c-\xi)}$$

a odtiaľ vyplýva, že $2 \leq 1$, čo je spor.

Teda pre $x \in [\xi, x_0]$ platí:

$$y_1(x) - y_2(x) \leq \varepsilon\, e^{2L(x-\xi)}$$

Nakoľko $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, máme $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, e^{2L(x-\xi)} = 0$

a teda

$$y_1(x) - y_2(x) \leq 0 \quad \text{pre} \quad x \in [\xi, x_0]$$

Z tých istých dôvodov platí pre $x \in [\xi, x_0]$:

$$y_2(x) - y_1(x) \leq 0$$

Z posledných dvoch nerovností vychádza pre $x \in [\xi, x_0]$

$$y_1(x) = y_2(x)$$

Nakoľko $x_0 \in j_1 \cap j_2 \cap [\xi, \xi + a]$ je ľubovoľné, tvrdenie vety je dokázané.

Poznámka. L. podmienka stačí na lokálnu jednoznačnosť riešení, ako sme práve ukázali, avšak nie je nutná. Jednoduchým príkladom funkcie, ktorá nespĺňa L. podmienku sprava v bode $(0,0)$ a pritom tento bod je sprava lokálne pravidelný, je

$$f(x, y) = - \sqrt[3]{y}$$

52. Osgoodova podmienka

Hovoríme, že funkcia f spĺňa v bode (ξ, η). Osgoodovu podmienku, stručne: O. podmienku, ak existuje k. okolie $(d \equiv)$ $[\xi - a, \xi + a] \times [\eta - b, \eta + b]$ bodu (ξ, η), v ktorom je funkcia f definovaná a ďalej existuje funkcia $\omega(t)$ definovaná v intervale $[0, 2b]$ taká, že pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in d$ platí nerovnosť

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq \omega(|y_1 - y_2|) \tag{1}$$

Pritom funkcia ω má tieto vlastnosti:

1. je spojitá v intervale $[0, 2b]$
2. $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ pre $t \in (0, 2b)$
3. Integrál $\int_0^{2b} \frac{dt}{\omega(t)}$ diverguje.

Podrobnejšie hovoríme, že funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) O. podmienku vzhľadom na funkciu ω.

O. podmienka je všeobecndjšia ako podmienka L., pretože ak spĺňa funkcia f L. podmienku, spĺňa i podmienku O. vzhľadom na funkciu $\omega(t) = L \cdot t$, kde L je konštanta L. podmienky. Iné funkcie, ktoré môžu slúžiť na realizáciu O. podmienky, sú napr. (pri dosť malom b):

$$\omega(t) = L \cdot t \cdot \log \frac{1}{t}; \quad L \cdot t \cdot \log \frac{1}{t} \cdot \log\log \frac{1}{t} \quad \text{atď.},$$

kde L je nejaké kladné číslo.

Podobne ako u L. podmienky možno zaviesť pojem O. podmienky sprava alebo zľava.

O. podmienka stačí na lokálnu jednoznačnosť riešení. Spôsobom, ktorý zovšeobecňuje predchádzajúci dôkaz v prípade platnosti L. podmienky, dá sa dokázať táto veta:

Ak funkcia f spĺňa v bode (ξ, η) O. podmienku sprava, potom bod (ξ, η) je sprava lokálne pravidelný.

53. Rosenblatt - Nagumova veta

A. Rosenblatt našiel [Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 3 (1909)] jednoduchú vetu o jednoznačnosti riešení, ktorej zvláštny prípad, ktorý o 17 rokov neskoršie popísal M. Nagumo [Japanese Journal od Mathematies, 3 (1927)] prešiel do literatúry pod názvom Nagumovej vety. Táto Rosenblatt-Nagumova veta znie:

Ak funkcia $f(x, y)$ v diferenciálnej rovnici (a) je v k. okolí sprava bodu (ξ, η)

$$(d \equiv) \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a, \qquad \eta - b \leqq y \quad \eta + b$$

spojitá a spĺňa pre každé dva rôzne body $(x, y_1), (x, y_2) \in d$ nerovnosť

$$(x - \xi) \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leqq 1 \qquad (1)$$

potom bod (ξ, η) je lokálne pravidelný sprava.

Táto formulácia R. - N. vety a nasledujúci jednoduchý dôkaz pochádza od Perrona [Math. Zeitschr., 28 (1928)], ktorý vetu rozšíril i na systémy d. rovníc.

Dôkaz. Predpokladajme, že funkcia $f(x, y)$ je spojitá v dv. intervale d a spĺňa tam vzťah (1).

Nech $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú ľubovoľné riešenia d. rovnice (a) definované v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktoré nadobúdajú v čísle ξ hodnotu η. Funkcia

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{x - \xi}$$

je definovaná v intervale $(\xi, \xi + a]$ a pre $x \to \xi +$ má limitu 0, lebo podľa l'Hospitalovho pravidla je

$$\lim_{x \to \xi +} \frac{y_1(x) - y_2(x)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi +} \frac{y_1'(x) - y_2'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x \to \xi +} \Big(f(x, y_1(x))\Big) - f(x, y_2(x)) = f(\xi, \eta) - f(\xi, \eta) = 0 .$$

Ak rozšírime definíciu tejto funkcie tak, že v čísle ξ jej prisúdime hodnotu 0, dostaneme funkciu spojitú v intervale $[\xi, \xi + a]$.

Vzhľadom na nerovnosť (1) dostaneme pre $x \in [\xi, \xi + a]$:

$$| y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_\xi^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\} dt \right| \leq$$

$$\leq \int_\xi^x \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{t - \xi} dt \qquad (2)$$

Ak v niektorom čísle $c \in (\xi, \xi + a]$ je $y_1(c) \neq y_2(c)$, potom funkcia

$$\frac{| y_1(x) - y_2(x)|}{x - \xi}$$

nie je v intervale $[\xi, c]$ konštanta a má tam určitú najväčšiu hodnotu M, ktorá zrejme je kladná. Odtiaľ vyplýva, že pre každé $x \in (\xi, c)$ je

$$\int_\xi^x \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{t - \xi} dt < M(x - \xi)$$

takže podľa (2) pre $x \in (\xi, c]$ je:

$$\frac{| y_1(x) - y_2(x)|}{x - \xi} \leq \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{t - \xi} dt < \frac{1}{x - \xi} M (x - \xi) = M$$

Tieto nerovnosti platia zrejme tiež v tom čísle $x \in (\xi, c]$, v ktorom funkcia na ľavej strane má najväčšiu hodnotu M, takže dostávame $M < M$, čo nie je možné. Teda skutočne je $y_1(x) = y_2(x)$ pre $x \in [\xi, \xi + a]$ a dôkaz je uskutočnený.

Poznámka. Z R.- N. vety tiež vyplýva, že bod (ξ, η) je lokálne pravidelný sprava, ak spojitá funkcia $f(x, y)$ spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku. Zmienený výsledok sme predtým dokázali priamo.

Z R.- N. vety vyplýva takto:

Ak spojitá funkcia $f(x, y)$ spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku, existuje k. okolie d bodu (ξ, η) a také číslo $L > 0$, že pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in d$ je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

takže pre $y_1 \neq y_2$ máme

$$(x - \xi)\,\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L\,(x - \xi)$$

Odtiaľ vyplýva, pre $x \in [\xi, \xi + a']$, kde $a' = \min\left(a, \frac{1}{L}\right)$, nerovnosť

$$(x - \xi)\,\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq 1$$

pretože pre také x je $L(x - \xi) \leq 1$.

Podľa Nagumovej vety je bod (ξ, η) lokálne pravidelný sprava.

Príklad. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y)$$

kde $f(x, y)$ značí funkciu definovanú pre všetky (x, y) takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{m\,x^3\,y}{x^4 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{pre } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

pričom m značí nejakú konštantu.

Zvláštny prípad tejto d. rovnice sme už mali (ods. 12), a to pre $m = 4$ a videli sme, že v tom prípade bodom $(0,0)$ prechádza nekonečne mnoho riešení príslušnej d. rovnice.

Nech teraz m značí ľubovoľnú konštantu.

Predovšetkým zistíme, že funkcia $f(x, y)$ je spojitá pre všetky (x, y). Vskutku, v každom bode $\neq (0,0)$ je spojitá ako racionálna funkcia, ktorej menovateľ nie je nula. Stačí teda zistiť, že je spojitá v bode $(0,0)$, t.j. že platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m\,x^3\,y}{x^4+y^2} = 0$$

To však vyplýva bezprostredne z nerovnosti

$$\left|\frac{m\,x^3\,y}{x^4+y^2}\right| \leqq \frac{|m\,x|}{2}$$

ktorá je správna, pretože $x^4 + y^2 \geqq 2\,x^2\,|y|$ (ods. 10).

Nech (ξ, η) značí ľubovoľný bod $\neq (0,0)$.

Ak zvolíme kladné čísla a, b dosť malé, dv. interval $d: \xi \leqq x \leqq \xi + a$, $|y - \eta| \leqq b$ neobsahuje bod $(0,0)$. V d má teda funkcia $f(x, y)$ všade parciálnu deriváciu podľa y, $f_y'(x, y)$, ktorá je zrejme racionálnou funkciou a jej menovateľ je rôzny od nuly: $f_y'(x, y)$ je teda ohraničená v d. V obore d je preto splnená L. podmienka a teda bod (ξ, η) je lokálne pravidelný sprava.

Nech $(\xi, \eta) = (0,0)$. Ukážeme, že ak zvolíme čísla a, b ľubovoľne malé, L. podmienka nie je splnená v obore $d: 0 \leqq x \leqq a$, $|y - 0| \leqq b$.

Vskutku, pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in d$ máme:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{m\,x^3}{(x^4+y_1^2)(x^4+y_2^2)}\left[x^4(y_1 - y_2) + y_1\,y_2\,(y_2 - y_1)\right]\right| \qquad (3)$$

pričom v prípade $x = y = 0$ treba rozumieť výrazom na pravej strane číslo 0. Z tohto vzorca pre $y_1 = 0$ vyplýva:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{m\,x^3}{x^4+y_2^2}(y_1 - y_2)\right|$$

a odtiaľ vidíme, že ak zvolíme $(0 \neq)\ y_2 = x^2$, je

$$\left|\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| = \left|\frac{m}{2\,x}\right|$$

a toto číslo je ľubovoľne veľké pre $x > 0$, dosť blízke k 0. Funkcia $f(x, y)$ teda v obore d L. podmienku nespĺňa.

Nakoľko teda na zistenie jednoznačnosti riešení v bode $(0,0)$ nemôžeme aplikovať L. podmienku, dôjdeme k cieľu aspoň pre niektoré m, ak použijeme R. - N. vetu.

Skúmajme preto, či funkcia $f(x, y)$ vyhovuje nerovnosti (1) v obore $d: 0 \leqq x \leqq a, |y| \leqq b$, kde a, b sú nejaké kladné čísla.

Zo vzťahu (3) vidíme, že pre každé dva rôzne body $(x; y_1)$, (x, y_2) $\in d$ je

$$x \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = \left| \frac{m\, x^4 (x^4 - y_1 y_2)}{(x^4 + y_1^2)(x^4 + y_2^2)} \right|$$

z nerovnosti $(|y_1| - |y_2|)^2 \geqq 0$ vyplýva $y_1^2 + y_2^2 \geqq 2 |y_1 \cdot y_2|$ a teda tiež $y_1^2 + y_2^2 \geqq |y_1 \cdot y_2|$, takže je

$$x^4 |x^4 - y_1 y_2| \leqq x^4 (x^4 + |y_1 y_2|) \leqq x^4 (x^4 + y_1^2 + y_2^2) \leqq x^4 (x^4 + y_1^2 +$$

$$+ y_2^2) + y_1^2 y_2^2 = (x^4 + y_1^2)(x^4 + y_2^2)$$

Z tejto úvahy vyplýva, že nerovnosť

$$\left| \frac{m\, x^4 - (x^4 - y_1 \cdot y_2)}{(x^4 + y_1^2)(x^4 + y_2^2)} \right| \leqq 1$$

je splnená, ak $|m| \leqq 1$ t. j. ak $-1 \leqq m \leqq 1$

Teda podľa R. - N. vety diferenciálna rovnica (a) má len jedno riešenie prechádzajúce bodom (0,0) vtedy, ak číslo m vyhovuje nerovnosti $-1 \leqq m \leqq 1$.

Vidíme, že hodnota konštanty m sa podstatne uplatňuje v tom, či riešenie diferenciálne rovnice (a) je v bode (0,0) jednoznačné alebo nie. Pre $-1 \leqq m \leqq 1$ je jednoznačné, avšak pre $m = 4$ je nekonečne mnohoznačné. Pre iné hodnoty m, bolo by treba ďalšie vyšetrovanie.

O. Perron doplnil R. - N. vetu touto poznámkou: Ak je rovnosť (1) nahradená nerovnosťou len o ľubovoľne málo miernejšou, a to v tom smere, že pre každé dva rôzne body (x, y_1), $(x, y_2) \in d$ platí

$$(x - \xi) \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leqq 1 + \varepsilon \qquad (4)$$

kde ε je nejaké kladné číslo, potom už jednoznačnosť riešení v bode (ξ, η) nie je zaručená.

Jeho príklad je tento:

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná pre $x \geqq 0$ a pre všetky y takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} (1+\varepsilon)^{\frac{y}{x}} & \text{pre } 0 < y < x^{1+\varepsilon} \\ (1+\varepsilon)\, x^{\varepsilon} & \text{pre } y \geqq x^{1+\varepsilon} \\ 0 & \text{pre } y \leqq 0 \end{cases}$$

kde $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo.

Ľahko nahliadneme, že funkcia $f(x, y)$ je všade spojitá.
Ďalej je:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{pre } y_1, y_2 \geqq x^{1+\varepsilon} \text{ lebo } y_1, y_2 \leqq 0 \\ (1+\varepsilon)\dfrac{y_1 - y_2}{x} & \text{pre } 0 < y_1, y_2 < x^{1+\varepsilon} \\ (1+\varepsilon)\left(\dfrac{y_1}{x} - x^{\varepsilon}\right) & \text{pre } 0 < y_1 < x^{1+\varepsilon} \leqq y_2 \\ (1+\varepsilon)\left(x^{\varepsilon} - \dfrac{y_2}{x}\right) & \text{pre } 0 < y_2 < x^{1+\varepsilon} \leqq y_1 \\ (1+\varepsilon)\dfrac{y_1}{x} & \text{pre } 0 < y_1 < x^{1+\varepsilon} \quad y_2 \leqq 0 \\ (1+\varepsilon)\, x^{\varepsilon} & \text{pre } y_1 \geqq x^{1+\varepsilon},\ y_2 \leqq 0 \\ -(1+\varepsilon)\dfrac{y_2}{x} & \text{pre } y_1 \leqq 0,\ 0 < y_2 < x^{1+\varepsilon} \\ -(1+\varepsilon)\, x^{\varepsilon} & \text{pre } y_1 \leqq 0,\ y_2 \geqq x^{1+\varepsilon} \end{cases}$$

Takže vo všetkých týchto jednotlivých prípadoch je pre $y_1 \neq y_2$:

$$x \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leqq 1 + \varepsilon$$

Vidíme, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa podmienku (4) pre všetky $x \geqq 0$ a $y_1 \neq y_2$ ľubovoľné. Pritom bodom (0,0) prechádza nekonečne mnoho riešení diferenciálnej rovnice (a), a to všetky riešenia $y = c \cdot x^{1+\varepsilon}$, pričom c značí ľubovoľnú konštantu vyhovujú nerovnosti: $0 \leqq c \leqq 1$.

54. Všeobecná veta o jednoznačnosti integrálov

V tomto odseku uvedieme vetu, ktorá je omnoho všeobecnejšia od predchádzajúcich kritérií lokálnej pravidelnosti bodov vzhľadom na d. rovnicu (a), a obsahuje ich ako špeciálne prípady. Z tejto vety sa dá odvodiť mnoho nových kritérií a čo je dôležité pre prax, pre každú špeciálnu d. rovnicu máme možnosť sa pokúsiť o určenie špeciálneho kritéria, ktoré by bolo vhodné práve pre danú d. rovnicu.

Uvažujme d. rovnicu (a).

Nech $f(x, y)$ je definované v obore

$$\Delta : \xi \leq x \leq \xi + a, \quad \eta - b \leq y \leq \eta + b \quad (a, b > 0)$$

Predpokladajme, že k d. rovnici (a) sú priradené dve funkcie φ, Φ troch premenných s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Funkcia $\varphi(x, u, v)$ je definovaná v obore

$$\omega : \xi < x \leq \xi + a, \quad \eta - b < u \leq v \quad \eta + b$$

a má tieto vlastnosti:

a) V každom bode $(x, u, v) \in \omega$ je jej hodnota > 0 alebo $= 0$ podľa toho, či $u < v$ alebo $u = v$;

b) je v obore ω spojitá a má v ňom spojité parciálne derivácie

$$\varphi'_x, \quad \varphi'_u, \quad \varphi'_v;$$

c) platí vzťah: $\lim\limits_{x \to \xi+} \varphi\left[x, u(x), v(x)\right] = 0$ pre každé dva integrály u, v d. rovnice (a), vychádzajúce z bodu (ξ, η), vyhovujúce nerovnostiam: $\eta - b < u(x) \leq v(x) < \eta + b$.

2. Funkcia $\Phi(X, u, z)$ je definovaná v obore

$$\Omega : \xi \leq X \leq \xi + a, \quad \eta - b \leq u \leq \eta + b, \quad 0 \leq z < \infty$$

a má tieto vlastnosti:

a) Je spojitá v obore Ω;

b) v obore ω spĺňa nerovnosť:

$$\varphi'_x(x, u, v) + \varphi'_u(x, u, v) \cdot f(x, u) + \varphi'_v(x, u, v) \, f(x, v) \leq$$

$$\leq \Phi\left(x, u, \varphi(x, u, v)\right)$$

Za týchto predpokladov dá sa ukázať, že ku každým dvom integrálom u, v d. rovnice (a), ktoré vychádzajú z bodu (ξ, η) sú definované v intervale $[\xi, \xi + a]$ a vyhovujú nerovnostiam

$$\eta - b < u(x) \leq v(x) < \eta + b$$

existuje také okolie sprava čísla ξ : $\langle \xi , \xi + \alpha]$ $(\alpha > 0)$, že v ňom existuje najväčší integrál $Z(x)$ d. rovnice

$$z' = \Phi [x, u(x) z] \qquad (\alpha)$$

ktorý vychádza z bodu $(\xi, 0)$ a v tomto okolí spĺňa nerovnosť:

$$\varphi [x, u, v(x)] \leq Z(x)$$

Ak funkcia φ je v obore ω zhora ohraničená, potom toto okolie nezávisí od voľby integrálov u, v.

Nech okrem vlastností a), b) má funkcia Φ vlastnosť.

c) Pre každý z bodu (ξ, η) vychádzajúci a v intervale $[\xi , \xi + a]$ definovaný integrál $u(x)$ d. rovnice (a), ktorý vyhovuje nerovnosti $\eta - b < u(x) < \eta + b$, je $Z(x) \equiv 0$ jediným integrálom d. rovnice (α), ktorý vychádza z bodu $(\xi, 0)$ a je definovaný v časti intervalu $[\xi , \xi + a]$.

Potom platí toto tvrdenie:

Každé dva integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré vychádzajú z bodu (ξ, η), splývajú v istom okolí sprava bodu ξ.

Ak funkcia $f(x, y)$ je v obore Δ spojitá, alebo funkcia φ je v obore ω (zhora) ohraničená, potom bod (ξ, η) je vzhľadom na rovnicu (a) sprava lokálne pravidelný.

Vetu uvádzame bez dôkazu.

Uvedieme teraz niektoré dôsledky predchádzajúcej vety. Za účelom docielenia obvyklého označenia v literatúre píšeme v ďalšom y_1, y_2 miesto u. v.

1. Nech $\varphi (x, y_1, y_2) = y_2 - y_1$, $\Phi = 0$

takže $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_{y_1} = -1$, $\varphi'_{y_2} = 1$

Z požiadavky b) o funkcii Φ vyplýva nerovnosť

$$- f(x, y_1) + f(x, y_2) \leq 0 \quad \text{t.j.} \quad f(x, y_2) \leq f(x, y_1)$$

Teda ak pre $y_1 \leq y_2$ je $f(x, y_2) \leq f(x, y_1)$, t.j. ak $f(x, y)$ vzhľadom na y nerastie, potom bod (ξ, η) je lokálne pravidelný sprava.

To však je tzv. Peanovo kritérium jednoznačnosti.

2. Nech $\varphi = y_2 - y_1$, $\Phi = L . z$, $L > 0$ konštanta.

Podľa vlastností b) funkcie Φ má byť:

$$- f(x, y_1) + f(x, y_2) \leq L (y_2 - y_1)$$

Vidíme, že nerovnosť

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq L(y_2 - y_1) \quad \text{pre} \quad y_1 \leq y_2$$

vyjadruje dostatočnú podmienku, aby bod (ξ, η) bol lokálne pravidelný sprava.

To je analógia L. podmienky.

3. Nech

$$\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x - \xi}, \quad \Phi \geqq 0$$

$$\varphi'_x = -\frac{y_2 - y_1}{(x - \xi)^2}, \quad \varphi'_{y_1} = -\frac{1}{x - \xi}, \quad \varphi'_{y_2} = \frac{1}{x - \xi}$$

Podľa vlastnosti b) funkcia Φ má byť:

$$-\frac{y_2 - y_1}{(x - \xi)^2} - \frac{1}{x - \xi} f(x, y_1) + \frac{1}{x - \xi} f(x, y_2) \leqq 0$$

a tak dochádzame k analógii Rosenblatt - Nagumovej podmienky:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \frac{y_2 - y_1}{x - \xi} \quad \text{pre } y_1 \leqq y_2$$

4. Ak $\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x - \xi}$, $\Phi = L(x - \xi)z$, ($L > 0$ konštanta)

dostaneme zovšeobecnenie R.- N. podmienky:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq (y_2 - y_1) \left[\frac{1}{x - \xi} + L(x - \xi) \right]$$

5. Utvorme si špeciálne kritérium pre skúmanie lokálnej pravidelnosti sprava bodu $(0,0)$ u d. rovnice

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad \text{(A)}$$

pritom predpokladajme:

Funkcie $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sú definované v obore

$$\Delta : 0 \leqq x \leqq a, \ -b \leqq y \leqq b; \ (a, b > 0).$$

funkcie $\dfrac{P}{Q}$, Q, Q'_x sú v obore Δ spojité a $Q > 0$ pre $0 < x \leqq a$, $-b \leqq y \leqq b$.

Zvoľme

$$\varphi = \frac{1}{x} \int_{y_1}^{y_2} Q(x, t)\, dt, \quad \Phi \equiv 0$$

Potom postačujúca podmienka pre lokálnu pravidelnosť bodu (0,0) pred d. rovnicu (A) znie:

$$x \left\{ P(x, y_2) - P(x, y_1) \right\} \leqq \int_{y_1}^{y_2} \left\{ Q(x, t) - Q'_x(x, t) \right\} dt \qquad (1)$$

Keď násobíme funkcie P, Q' funkciou $x\ \sigma(y)$, pričom funkcia σ je v intervale $[-b, b]$ spojitá a kladná, zmení sa predchádzajúci vzorec na

$$\sigma(y_2) \cdot P(x, y_2) - \sigma(y_1) P(x, y_1) \leqq - \int_{y_1}^{y_2} \sigma(t)\, Q'_x(x, t)\, dt \qquad (2)$$

Vidíme, že z bodu (0,0) vychádza lokálne práve jeden integrál d. rovnice (A), ak existuje v intervale $[-b, b]$ spojitá a kladná funkcia σ, ktorá spĺňa nerovnosť (2).

<u>Príklad</u>. Toto kritérium použijeme na d. rovnicu:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{m x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{pre } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

ktorej pravá strana spĺňa žiadané predpoklady.

V predchádzajúcich úvahách sme našli (ods. 53; 12), že bod (0,0) je lokálne pravidelný sprava, ak $-1 \leqq m \leqq 1$ a je lokálne rozvetvovací ak $m = 4$.

Aplikujme teraz vzorec (1). Položme $P(x, y) = m x^3 y$, $Q(x, y) = x^4 + y^2$. Dostaneme

$$\int_{y_1}^{y_2} Q(x, t)\, dt = x^4 (y_2 - y_1) + \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3) =$$

$$= (y_1 - y_2) \left[x^4 + \frac{1}{3} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \right]$$

$$\int_{y_1}^{y_2} x\, Q'_x (x, t)\, dt = 4\, x^4 (y_2 - y_1)$$

Vidíme, že bod (0,0) je lokálne pravidelný sprava, ak platí

$$m\, x^4 (y_2 - y_1) \leqq (y_2 - y_1) \cdot \left[- 3\, x^4 + \frac{1}{3} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \right]$$

Odtiaľ pre $y_2 - y_1 > 0$ vychádza

$$3\, (m + 3)\, x^4 \leqq y_1^2 + y_1\, y_2 + y_2^2$$

a vidíme, že táto nerovnosť je splnená vtedy, ak platí

$$3\, (m + 3)\, x^4 \leqq 0$$

Táto nerovnosť je ale splnená v tom prípade, keď $m \leqq - 3$. Bod (0,0) je teda lokálne pravidelný sprava vtedy, keď $m \leqq - 3$. Ak aplikujeme vzorec (2), dostaneme nerovnosť

$$m \cdot \left\{ y_2\, \sigma (y_2) - y_1\, \sigma (y_1) \right\} \leqq - 4 \int_{y_1}^{y_2} \sigma (t)\, dt$$

z ktorej pre $\sigma (y) = y^{2k}$, $k > 0$, vychádza

$$m \leqq - \frac{4}{2k + 1}$$

Vidíme, že lokálna pravidelnosť sprava bodu (0,0) pre d. rovnicu (A) je bezpečná pre všetky $m < 0$ a zrejme tiež pre $m = 0$.

9. Ukážka aplikácie predchádzajúcej teórie

55. Perronov príklad

Ako aplikáciu predchádzajúcich výsledkov, Perronovej existenčnej teórie a viet o jednoznačnosti riešení uvedieme v tomto odseku príklad, ktorý pochádza od O. Perrona.

Uvažujme o d. rovnici