Závislosť integrálov od parametra

In: Otakar Borůvka (author): Diferenciálne rovnice. [Vysokoškolské učebné texty. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta]. (Slovak). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1961. pp. 73--82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401393

$$D\pm u(x) \leq f[x, u(x)] \ , \quad D\pm v(x) \geq f[x, v(x)]$$

V dôkaze vyšiel od prirodzeného rozšírenia $y' = F(x, y)$ d. rovnice (a) na neohraničený dv. interval $[\xi, \xi + a] \times (-\infty, \infty)$ a od pojmov dolnej a hornej funkcie, ktoré pojmy majú v jeho poňatí o niečo iný zmysel. Perron rozumie dolnou funkciou každú funkciu φ, ktorá je spojitá v intervale $[\xi, \xi + a]$, vychádza z bodu (ξ, η) a v každom čísle x tohto intervalu spĺňa nerovnosti

$$D+\varphi(x) < F[x, \varphi(x)]$$

Obdobne horná funkcia Ψ spĺňa nerovnosti:

$$D+\Psi(x) > F[x, \Psi(x)]$$

Napr. $\varphi(x) = u(x) - \varepsilon(x - \xi)$ je dolnou a $\Psi(x) = v(x) + \varepsilon(x - \xi)$ je hornou funkciou pri každom $\varepsilon > 0$.

V dôkaze sa zisťuje, že hodnoty všetkých dolných funkcií v každom čísle $x \in [\xi, \xi + a]$ majú istú hornú hranicu $g(x)$ a hodnoty všetkých horných funkcií dolnú hranicu $G(x)$ a že platia nerovnosti $u(x) \leq g(x) \leq G(x) \leq v(x)$. Tým sú definované v intervale $[\xi, \xi + a]$ dve funkcie g, G, ktoré vychádzajú z bodu (ξ, η) a ležia v obore σ. O nich sa dokáže, že g je najmenším a G najväčším riešením d. rovnice (a) v bode (ξ, η).

7. Závislosť integrálov od parametra

38. N e c h j e d a n á d. r o v n i c a

$$y' = f(x, y; s) \qquad (a)$$

ktorej pravá strana závisí od parametra s. Predpokladajme, že oborom $\sigma \times S$ dif. rovnice (a) je nejaká otvorená množina σ a nejaká (neprázdna) množina čísel S a že v každom čísle $s \in S$ je f spojitou funkciou v množine σ.

Podľa existenčnej teorémy prechádza pri každom $s \in S$ ľubovoľným bodom $(x_0, y_0) \in O$ aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v určitom otvorenom intervale a je úplné, takže sa nedá rozšíriť na interval väčší. V ďalšom máme na mysli vždy úplné riešenie d. rovnice (a). Všeobecne bodom (x_0, y_0) prechádza celý zväzok riešení, vymedzený najmenším a najväčším integrálom v tomto bode. Poznamenajme, že časť najmenšieho (najväčšieho) integrálu vľavo od čísla x_0 a časť najväčšieho (najmenšieho) integrálu vpravo od neho tvorí dolný (horný) zložený integrál v bode (x_0, y_0). Keď d. rovnica (a) (pri uvažovanom $s \in S$) má len jedno riešenie prechádzajúce bodom (x_0, y_0), všetky zmienené význačné integrály s ním splývajú. Podotknime, že jednotlivé riešenia prechádzajúce bodom (x_0, y_0) všeobecne závisia od voľby čísla s.

39. Peanovské funkcie

Keď ku každému bodu $(x, y) \in \sigma$, $s \in S$ priradíme jedno alebo viac riešení d. rovnice (a), určenej číslom s, ktoré prechádzajú bodom (x, y), dostaneme tzv. peanovskú funkciu prislúchajúcu k d. rovnici (a). Jej oborom je teda obor $\sigma \times S$ d. rovnice (a) a jej hodnotami v každom bode (x, y), s sú určité riešenia d. rovnice (a), určené číslom s, ktoré prechádzajú bodom (x, y).

Významnými príkladmi peanovských funkcií sú:

Plná peanovská funkcia, ktorej hodnotami v každom bode (x, y) s sú všetky riešenia d. rovnice (a), určenej číslom s, ktoré prechádzajú bodom (x, y);

horná (dolná) peanovská funkcia, ktorá má v každom bode (x, y), s jedinú hodnotu, a to najväčší (najmenší) integrál d. rovnice (a), určenej číslom s, v bode (x, y);

dolná (horná) zložená peanovská funkcia, ktorá má v každom bode (x, y) s jedinú hodnotu, a to dolný (horný) zložený integrál d. rovnice (a), určený číslom s, v bode (x, y).

Predpoklady a označenia. Budeme sa zaoberať vlastnosťami peanovských funkcií v bodoch, v ktorých tieto funkcie majú jedinú hodnotu. Zdôraznime, že sa také body (x, y) s môžu vyznačovať tým, že d. rovnica (a) určená číslom s má evantuálne ďalšie riešenia prechádzajúce bodom (x, y), no tieto riešenia nie sú hodnotami skúmaných peanovských funkcií.

V ďalšom znamená $\mathcal{T}$ ľubovoľnú peanovskú funkciu prislúchajúcu k d. rovnici (a). $(x_0, y_0), s_0$ znamená ľubovoľný bod jej oboru $\sigma \times S$. Predpokladáme, že funkcia $\mathcal{T}$ má v bode $(x_0, y_0), s_0$ jedinú hodnotu Y_0; existenčný interval tejto funkcie budeme označovať j_0. A, B, ... znamenajú ľubovoľné časti množiny σ, obsahujúce bod (x_0, y_0).

40. Pravidelnosť peanovskej funkcie

Nech je k ľubovoľné kompaktné okolie čísla x_0, ktoré leží v intervale j_0, k je teda kompaktný interval obsahujúci číslo x_0 a $k \subset j_0$.

a) Relatívna pravidelnosť. Hovoríme, že funkcia $\mathcal{T}$ je v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A vzhľadom na interval k pravidelná, keď existuje okolie $\sigma_0 \times S_0$ bodu (x_0, y_0), s_0, t.j. dvojica skladajúca sa z kompaktného dv. intervalu σ_0 so stredom (x_0, y_0) a z kompaktného intervalu S_0 so stredom s_0, a kompaktná množina $K \subset O$, vyznačujúce sa tým, že každá hodnota funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap \sigma_0$, $s \in S \cap S_0$ existuje aspoň v intervale k a jej časť v tomto intervale leží v množine K.

Ľahko sa dokáže, že keď je funkcia $\mathcal{T}$ v bode (x_0, y_0), s_0 vzhľadom na interval k pravidelná na množine A a na množine B, je v ňom vzhľadom na interval k pravidelná na množine $A \cup B$; a obrátene.

Keď je funkcia f v čísle s_0 spojitá rovnomerne v nejakom okolí bodu (x_0, y_0), existujú (primerane malé) kompaktné okolia čísla x_0, vzhľadom na ktoré je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A pravidelná.

b) Celostná pravidelnosť. Okrem pojmu relatívnej pravidelnosti, t.j. pravidelnosti vzhľadom na interval, peanovskú funkciu, definujeme pojem celostnej pravidelnsoti takto:

Hovoríme, že funkcia π je v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A pravidelná, keď má túto vlastnosť vzhľadom na každé kompaktné okolie čísla x_0, ktoré leží v intervale j_0.

Keď je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 pravidelná na množine A a na množine B, je v ňom pravidelná na množine $A \cup B$; a obrátene.

41. Spojitosť peanovskej funkcie

Nech je k ľubovoľné kompaktné okolie čísla x_0 ležiace v intervale j_0.

a) Relatívna spojitosť Hovoríme, že funkcia π je v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A vzhľadom na interval k spojitá, keď ku každému číslu $\epsilon > 0$ existuje okolie $\sigma_0 \times S_0$ bodu (x_0, y_0), s_0 také, že každá hodnota y funkcie π v každom bode $(x, y) \in A \cap \sigma_0$, $s \in S \cap S_0$ existuje aspoň v intervale k a v každom čísle $x \in k$ spĺňa nerovnosť $|y(x) - Y_0(x)| < \varepsilon$.

Keď je funkcia π v bode. (x_0, y_0), s_0 vzhľadom na interval k spojitá na množine A a na množine B, je v ňom vzhľadom na interval k spojitá na množine $A \cup B$; a obrátene.

Keď je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A vzhľadom na interval k spojitá, je v ňom na množine A vzhľadom na interval k pravidelná.

b) Celostná spojitosť. Okrem pojmu relatívnej spojitosti peanovskej funkcie, t.j. spojitosti vzhľadom na interval, definujeme pojem celostnej spojitosti, stručnejšie spojitosti, takto:

Hovoríme, že funkcia π je v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A spojitá, keď má túto vlastnosť vzhľadom na každé kompaktné okolie čísla x_0, ktoré leží v intervale j_0.

Keď je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 spojitá na množine A a na množine B, je v ňom spojitá na množine $A \cup B$; a obrátene.

Keď je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A spojitá, je v ňom na tejto množine pravidelná.

42. Zvláštne prípady

Všimnime si niektoré významné prípady a celostnej pravidelnosti a spojitosti peanovskej funkcie.

1. Množina A je totožná s množinou σ. Keď je funkcia π relatívne alebo celostne pravidelná alebo spojitá na množine σ, má tú istú vlastnosť na každej časti množiny σ, ktorá obsahuje bod (x_0, y_0).

2. Množina A je prienikom množiny σ a dolného (horného) oboru vzhľadom na hodnotu Y_0 funkcie π v bode (x_0, y_0), s_0. V tomto prípade hovoríme o relatívnej a celostnej pravidelnosti a spojitosti funkcie π v bode (x_0, y_0), s_0 zdola (zhora).

3. Množina A sa skladá z jediného bodu (x_0, y_0). Potom pojmy pravidelnosti a spojitosti vyjadrujú vlastnosti systému integrálov d. rovnice (a), ktoré prechádzajú bodom (x_0, y_0) a závisia od jednotlivých čísel množiny S. V tomto prípade hovoríme o relatívnej alebo celostnej pravidelnosti alebo spojitosti funkcie π v bode (x_0, y_0), s_0 vzhľadom na parameter.

4. Množina S sa skladá z jediného čísla s_0. Potom ide o d. rovnicu (a) nezávislú od parametra. Pojmy pravidelnosti a spojitosti vyjadrujú vlastnosti systému integrálov tejto d. rovnice, ktoré prechádzajú bodmi množiny A. V tomto prípade hovoríme o relatívnej alebo celostnej pravidelnosti alebo spojitosti d. rovnice (a) na množine A.

43. Hlavná veta o spojitosti peanovských funkcií

Znie:

Nech je funkcia f v čísle s_0 spojitá, a to rovnomerne v každej kompaktnej časti množiny σ. Nech sa peanovská funkcia π vyznačuje tým, že v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A spojitá vzhľadom na každé kompaktné okolie čísla x_0, vzhľadom na ktoré je tam pravidelná. Potom je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 na množine A spojitá.

<u>Dôkaz</u>: Označme a_0 ľavý, b_0 pravý koniec intervalu j_0.

Nech je (k≡) $[a, b] \subset j_0$ ľubovolné kompaktné okolie čísla x_0. Konce intervalov j_0, k spĺňajú teda nerovnosti:

$$a_0 < a \leqq x_0 \leqq b < b_0$$

pričom zrejme platí $a \leqq x_0 < b$, alebo $a < x_0 \leqq b$.

Máme ukázať, že funkcia π je v bode (x_0, y_0), s_0 vzhľadom na interval k na množine A spojitá.

Nech je Y časť funkcie Y_0 v intervale k. Krivka Y je kompaktná množina a skladá sa jedine z vnútorných bodov množiny σ; z toho usudzujeme, že má od hranice množiny σ, keď táto hranica existuje, určitú kladnú vzdialenosť. Nech ρ znamená túto vzdialenosť alebo ľubovoľné kladné číslo podľa toho, či množina σ hranicu má, alebo nie. Potom každý bod, ktorý má od krivky Y menšiu vzdialenosť ako ρ, leží v množine σ.

Nech K je množina bodov, ktoré majú od krivky Y vzdialenosť menšiu alebo rovnú $\frac{1}{2}\rho$. Zrejme je K kompaktnou časťou množiny σ.

Prizerajúc k predpokladom o funkcii f predovšetkým usudzujeme, že funkcia f je v čísle s_0 na množine K ohraničená, takže existuje také číslo $M > 0$, že v každom bode $(x, y) \in K$ platí nerovnosť:

$$| f (x, y; s_0) | < M$$

Ďalej vidíme, že existuje okolie S_0 čísla s_0 vyznačujúce sa tým, že v každom bode $(x, y; s)$, kde $(x, y) \in K$, $s \in S \cap S_0$, je

$$| f (x, y; s) - f (x, y; s_0) | < M$$

obidvoch nerovností vyplýva

$$| f (x, y; s) | < 2 M$$

Označme

$$C = \min \left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho}{16\sqrt{2}\, M} \right)$$

a m, n celé nezáporné čísla určené nerovnosťami:

$$x_0 - (m + 1) C < a \leqq x_0 - m C \leqq x_0 \leqq x_0 + nC \leqq b < x_0 + (n + 1) C.$$

Ďalej nech znamená η_ν, $\nu = - m, - m + 1, \ldots, n$ hodnotu funkcie X v čísle $x_0 + \nu c$, takže

$$\eta_\nu = Y(x_0 + \nu c), \quad (\eta_0 = y_0)$$

a D_ν, D'_ν koncentrické dv. intervaly so stredom $(x_0 + \nu c, \eta_\nu)$:

$$(D_\nu =) \quad [x_0 + (\nu - 1)C, x_0 + (\nu + 1)C] \times [\eta - \frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \eta_\nu + \frac{\rho}{2\sqrt{2}}]$$

$$(D'_\nu =) \quad [x_0 + (\nu - 1)C, x_0 + (\nu + 1)C] \times [\eta - \frac{\rho}{4\sqrt{2}}, \eta_\nu + \frac{\rho}{4\sqrt{2}}]$$

Predovšetkým je zrejmé, že každý dv. interval D_ν a teda aj D'_ν leží v množine K, lebo vzdialenosť každého jeho bodu od stredu sa najviac rovná $\sqrt{c^2 + \frac{1}{8} \rho^2} \leqq \frac{1}{2} \rho$.

Ďalej vidíme, že každá hodnota y funkcie $\check{X}$ v každom bode dv. intervalu D'_ν, $s \in S \cap S_0$, existuje aspoň v intervale $[x_0 + (\nu - 1)C,$

$x_o + (\nu + 1)C]$ a jej časť v tomto intervale leží v D'_ν pretože časť funkcie y, definovaná vo vhodnom kompaktnom intervale, prechádza niektorým bodom dv. intervalu D'_ν, leží v dv. intervale D_ν a má svoje konce na jeho hranici. Táto časť existuje aspoň v intervale $[x_o + \nu C - a', x_o + \nu C + a']$, kde a' je

najmenšie z čísel C, $\dfrac{\rho}{16\sqrt{2}\ M}$ (ods. 29), takže $a = c$.

Nech je $(j_{\alpha\beta} \equiv)\ [x_o - \alpha C,\ x_o + \beta C], \alpha = 1, \dots m + 1; \beta = 1, \dots$
$\dots, n + 1$ ľubovoľný interval.

Veta bude dokázaná, ak ukážeme, že ku každému intervalu $j_{\alpha\beta}$ existuje také okolie $O_{\alpha\beta} \times S_{\alpha\beta}$ bodu (x_o, y_o), s_o, že každá hodnota funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap O_{\alpha\beta}$, $s \in S \cap S_{\alpha\beta}$ existuje aspoň v intervale $j_{\alpha\beta}$ a jej časť v tomto intervale leží v množine K. Potom sa totiž okolie $O_{m+1,\ n+1} \times S_{m+1,\ n+1}$ bodu (x_o, y_o), s_o vyznačuje tým, že každá hodnota funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap O_{m+1,\ n+1}$, $s \in S \cap S_{m+1,\ n+1}$ existuje aspoň v intervale $j_{m+1,\ n+1}$ a teda aj v intervale k, ktorý je v ňom obsiahnutý a jej časť v intervale $j_{m+1,\ n+1}$ a teda aj v k, leží v množine K; to znamená, že funkcia $\mathcal{T}$ je v bode (x_o, y_o), s_o vzhľadom na interval k na množine A pravidelná a teda, podľa predpokladu vzhľadom na ten interval na množine A spojitá.

Nuž v prípade $\alpha = \beta = 1$ je vec zrejmá, lebo stačí zvoliť:

$$O_{11} = D'_o,\quad S_{11} = S_o$$

Pokračujme úplnou indukciou. Nech je $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ a súčasne nech plastí aspoň jedna z nerovností $\alpha < m + 1$, $\beta < n + 1$, napr. $\beta < n + 1$. Predpokladajme, že existuje také okolie $O_{\alpha\beta} \times S_{\alpha\beta}$ bodu (x_o, y_o), s_o, že každá hodnota funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap O_{\alpha\beta}$, $s \in S \cap S_{\alpha\beta}$ existuje aspoň v intervale $j_{\alpha\beta}$ a jej časť v tomto intervale leží v množine K. Ukážeme, že z tohto predpokladu vyplýva existencia okolia $O_{\alpha,\beta+1} \times S_{\alpha,\beta+1}$ bodu (x_o, y_o), s_o, ktoré má tú istú vlastnosť vzhľadom na interval $j_{\alpha,\beta+1}$.

Z nerovností

$$a \leq x_o < x_o + c \leq x_o + \beta c \leq b$$

$$x_o - \alpha c < x_o < x_o + c \leq x_o + \beta c$$

usudzujeme, že prienikom intervalov k, $j_{\alpha\beta}$ je kompaktný interval, ktorý obsahuje interval $[x_o, x_o + c]$ a že číslo $x_o + \beta c$ je v ňom obsiahnuté.

Podľa predpokladu existuje každá hodnota funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x,y) \in A \cap O_{\alpha\beta}$, $s \in S \cap S_{\alpha\beta}$, aspoň v intervale $j_{\alpha\beta}$ a jej časť v tomto intervale leží v množine K. Funkcia $\mathcal{T}$ je teda v bode (x_o, y_o), s_o vzhľadom na interval $j_{\alpha\beta}$ na množine A pravidelná a teda aj spojitá. Z toho usudzujeme, že existuje také okolie $O_{\alpha,\beta+1} \times S_{\alpha,\beta+1} \subset O_{\alpha\beta} \times S_{\alpha\beta}$ bodu (x_o, y_o), s_o, že každá hodnota y funkcie $\mathcal{T}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap O_{\alpha,\beta+1}$

existuje aspoň v intervale $j_{\alpha\beta}$ a líši sa v každom čísle prieniku interval $k, j_{\alpha\beta}$ od hodnoty riešenia Y o menej ako $\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$. Zvlášť teda máme:

$$| y(x_0 + \beta c) - \eta_\beta | < \frac{\rho}{4\sqrt{2}}$$

Okrem toho však časť funkcie y v intervale $j_{\alpha\beta}$ leží v množine K.

Posledná nerovnosť ukazuje, že funkcia y prechádza bodom $(x_0 + \beta c, y(x_0 + \beta c))$, ktorý leží v dv. intervale D_β'. Pretože každá hodnota funkcie $\tilde{\pi}$ v každom bode $(x, y) \in D_\beta'$ $s \in S \cap S_0$ existuje aspoň v intervale $[x_0 + (\beta - 1)c, x_0 + (\beta + 1)c]$ a jeho časť v tomto intervale leží v D_β, vidíme, že funkcia y existuje i v intervale $[x_0 + \beta c, x_0 + (\beta + 1) c]$ a jej časť v tomto intervale leží v množine K. Tým je zistené, že sa okolie $O_{\alpha,\beta+1} \times S_{\alpha,\beta+1}$ bodu (x_0, y_0), s_0 vyznačuje tým, že každá hodnota funkcie $\tilde{\pi}$ v každom bode $(x, y) \in A \cap O_{\alpha,\beta+1}$, $s \in S \cap S_{\alpha,\beta+1}$ existuje aspoň v intervale $j_{\alpha,\beta+1}$ a jej časť v tomto intervale leží v množine K. Tým je dôkaz ukončený.

44. Spojitosť plnej peanovskej funkcie

Predpokladajme, že bodom (x_0, y_0), s_0 prechádza jediné riešenie Y_0 d. rovnice (a), takže plná peanovsjá funkcia, príslušná k tejto d. rovnici, má v spomínanom bode jedinú hodnotu Y_0.

Platí táto veta: Keď je funkcia f v čísle s_0 spojitá rovnomerne v každej kompaktnej časti množiny σ, potom je plná (a teda každá) peanovská funkcia príslušná k d. rovnici (a) v bode (x_0, y_0), s_0 spojitá na množine σ.

Skutočne, nech je $\tilde{\pi}$ plná peanovská funkcia prislúchajúca k d. rovnici (a). Podľa predchádzajúcej vety stačí ukázať, že funkcia $\tilde{\pi}$ je v bode (x_0, y_0), s_0 na množine σ spojitá vzhľadom na každé kompaktné okolie čísla x_0, vzhľadom na ktoré je na množine σ pravidelná.

Nech je $k (\subset j_0)$ ľubovoľné kompaktné okolie čísla x_0, ktoré sa vyznačuje tým, že vzhľadom k nemu je funkcia $\tilde{\pi}$ na množine σ pravidelná. Potom existuje okolie $O_0 \times S_0$ bodu (x_0, y_0), s_0 a kompaktná množina $K \subset O$ vyznačujúca sa tým, že každá hodnota funkcie $\tilde{\pi}$, v každom bode $(x, y) \in O_0$, $s \in S \cap S_0$, existuje aspoň v intervale k a jej časť v tomto intervale leží v množine K.

Pripusťme, že funkcia $\tilde{\pi}$ nie je v bode (x_0, y_0), s_0 vzhľadom na interval k na množine σ spojitá. Potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ také, že v každom okolí bodu $(x_0\ y_0)$, s_0 existujú body $(x, y) \in O_0$, $s \in S \cap S_0$, v ktorých každá hodnota funkcie $\tilde{\pi}$ je definovaná aspoň v intervale k, jej časť v tomto intervale leží v množine K a niektoré z týchto hodnôt sa v niektorých číslach intervalu k líšia od hodnoty integrálu Y_0 aspoň o ε. Z toho usudzujeme, že existuje postupnosť bodov $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega_0$, $s_\alpha \in S \cap S_0$, $\alpha = 1,2,\ldots$; ktorá konverguje k bodu (x_0, y_0), s_0 a ďalej postupnosť hodnôt y_α funkcie $\mathcal{T}$ taká, že každá hodnota y_α :

1. je integrálom d. rovnice (a) s parametrom s_α a prechádza bodom (x_α, y_α);

2. je definovaná aspoň v intervale k;

3. jej časť v tomto intervale leží v množine K;

4. jej hodnoty sa v niektorých číslach intervalu k líšia od hodnôt integrálu Y_0 aspoň o ε.

Množina K je kompaktnou časťou množiny σ. Pretože funkcia f je v čísle s_0 spojitá rovnomerne v každej kompaktnej časti množiny σ, postupnosť funkcií $f(x, y; s_\alpha)$ konverguje v množine K rovnomerne k funkcii $f(x, y; s_0)$; pretože funkcia $f(x, y; s_0)$ je v množine σ spojitá, je v množine K ohraničená. Odtiaľ a z vlastností 1.- 3. funkcií y_α vyplýva, že postupnosť častí týchto funkcií v intervale k je normálna a limita y každej jej v intervale k rovnomerne konvergentnej čiastočnej postupnosti prechádza bodom (x_0, y_0).

Pretože funkcia $f(x, y; s_0)$ je v množine σ spojitá, je v množine K rovnomerne spojitá; pretože časti funkcií y_α v intervale k ležia v množine K, leží tam aj funkcia y. Z toho vyplýva, že funkcia y je integrálom d. rovnice (a) s parametrom s_0. Vidíme, že funkcia y je časťou (jediného) riešenia Y_0 d. rovnice (a) v bode (x_0, y_0), s_0.

Tým je zistené, že všetky v intervale k rovnomerne kovergentné časti postupnosti, ktorá sa skladá z častí funkcií y_α v intervale k, majú tú istú limitu, a to časť integrálu Y_0 v intervale k. Odtiaľ vyplýva (ods.16), že celá postupnosť častí funkcií y_α v intervale k má tú istú rovnomernú limitu, takže sa hodnoty celkom všetkých funkcií y_α, všade v intervale k. líšia od hodnoty integrálu Y_0 o menej než ε. Tým sme sa dostali do sporu s už uvedenou vlastnosťou 4. funkcií y_α a dôkaz je skončený.

45. Spojitosť peanovských funkcií vzhľadom na parameter

Dokážeme túto vetu:

Nech funkcia f je v čísle s_0 spojitá rovnomerne v každej kompaktnej časti množiny σ a okrem toho nech má v čísle s_0 lokálne minimum (maximum) všade v množine σ. Nech hodnota peanovskej funkcie π v bode (x_0, y_0), s_0 je dolný (horný) zložený integrál d. rovnice (a) v tomto bode. Potom je funkcia π v bode (x_0, y_0), s_0 lokálne spojitá vzhľadom na parameter.

<u>Dôkaz</u> uskutočníme napr. v prípade, že funkcia f má v čísle s_0 lokálne minimum všade v množine σ a že hodnotou funkcie π v bode (x_0, y_0), s_0 je dolný zložený integrál d. rovnice (a) v tomto bode. Stačí ukázať, že funkcia

$\mathcal{X}$ je v bode (x_0, y_0), s_0 spojitou funkciou parametra relatívne ku každému kompaktnému okoliu čísla x_0, vzhľadom na ktoré je pravidelná.

Nech $k \subset j_0$ je ľubovoľné kompaktné okolie čísla x_0, ktoré sa vyznačuje tým, že vzhľadom naň je funkcia $\mathcal{X}$ v bode (x_0, y_0), s_0 pravidelnou funkciou parametra. Potom existuje okolie S_0' čísla s_0 a kompaktná množina $K \subset o$, vyznačujúca sa tým, že každá hodnota funkcie $\mathcal{X}$ v každom bode (x_0, y_0), $s \in S \cap S_0'$ existuje aspoň v intervale k a jej časť v tomto intervale leží v množine K.

Pretože funkcia f má v čísle s_0 lokálne minimum všade v množine σ, existuje okolie S_0'' čísla s_0 také, že v každom bode $(x, y) \in \sigma$, $s \in S \cap S_0''$ platí nerovnosť

$$f(x, y; s_0) \leqq f(x, y; s) \tag{1}$$

Pripusťme, že $\mathcal{X}$ nie je v bode (x_0, y_0), s_0 spojitou funkciou parametra vzhľadom na interval k. Označme $S_0 = S_0' \cap S_0''$. Potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ také, že v každom okolí čísla s_0 existujú čísla $s \in S \cap S_0$ tejto vlastnosti: Každá hodnota funkcie $\mathcal{X}$ v každom bode (x_0, y_0), s existuje aspoň v intervale k, jej časť v tomto intervale leží v množine K a niektoré z týchto hodnôt sa v niektorých číslach intervalu k líšia od hodnôt dolného zloženého integrálu Y_0 v bode (x_0, y_0), s_0 aspoň o ε. Z toho usudzujeme, že existuje postupnosť čísel $s_\alpha \in S \cap S_0$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, konvergujúca k číslu s_0 a ďalej postupnosť hodnôt y_α funkcie $\mathcal{X}$ taká, že každá hodnota y_α : 1. je integrálom d. rovnice (a) s parametrom s_α a prechádza bodom (x_0, y_0), 2. je definovaná aspoň v intervale k, 3. jej časť v tomto intervale leží v množine K, 4. jej hodnota v každom čísle intervalu k vľavo (vpravo) od x_0 sa nanajvýš (aspoň) rovná príslušnej hodnote integrálu Y_0, 5. jej hodnoty v niektorých číslach intervalu k sa líšia od hodnoty integrálu Y_0 aspoň o ε.

Usudzujúc obdobne ako v dôkaze spojitosti plnej peanovskej funkcie a vidíme, že postupnosť častí funkcií y_α v intervale k je normálna a limita y každej jej v intervale k rovnomerne konvergentnej čiastočnej postupnosti prechádza bodom (x_0, y_0) a je integrálom d. rovnice (a) s parametrom s_0.

Z vlastnosti 4. funkcie y_α vidíme, že hodnota funkcie y v každom čísle intervalu k vľavo (vpravo) od x_0 sa nanajvýš (aspoň) rovná príslušnej hodnote integrálu Y_0.

Ukončenie dôkazu odvodením sporu s vlastnosťou 5. funkcie y_α je obdobné ako v predtým spomenutom dôkaze.

46. Spojitosť dolnej a hornej peanovskej funkcie prislúchajúcej k d. rovnici (a) nezávislej od parametra

Platí táto veta:

Nech v d. rovnici (nezávislej od parametra)

$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

je funkcia f spojitá v otvorenej množine σ. Potom dolná (horná) peanovská funkcia je v každom bode svojho oboru zdola (zhora) spojitá.

Dôkaz tejto vety je obdobný dôkazu predchádzajúcej vety. Jediná podstatná zmena je v tom, že miesto nerovnosti (1) použijeme to, že najmenší (najväčší) integrál v ľubovoľnom bode dolného (horného) oboru vzhľadom na najmenší (najväčší) integrál v niektorom bode množiny σ leží celý v tomto obore.

8. Vety o jednoznačnosti riešení

47. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

v nejakom obore σ.

Z predchádzajúcich úvah vieme, že daným bodom $(\xi, \eta) \in \sigma$ môže prechádzať jedno alebo viac riešení d. rovnice (a), definovaných v tom istom intervale. Ak napr. je funkcia f v okolí bodu (ξ, η) spojitá, prechádza týmto bodom buď práve jedno alebo hneď nekonečne mnoho riešení d. rovnice (a) definovaných v tom istom intervale.

Obsahom tejto kapitoly je vyšetrovanie podmienok, za ktorých daným bodom z oboru σ prechádza najviac jedno riešenie, definované v istom intervale, alebo inými slovami, kedy riešenie d. rovnice (a) je v danom bode jednoznačné. Otázka jednoznačnosti riešenia prechádzajúceho daným bodom má veľkú dôležitosť v aplikáciách, kedy d. rovnice popisujú priebeh fyzikálneho, chemického, biologického alebo iného deja. V týchto prípadoch daný bod vyjadruje istý počiatočný stav deja a otázka jednoznačnosti riešenia v tomto bode značí, či priebeh deja je počiatočným stavom jednoznačne určený. V kladnom prípade umožňuje znalosť vlastností d. rovnice predvídať len z daného počiatočného stavu priebehu deja.

48. Za účelom stručnejšieho vyjadrovania zavedieme niekoľko definícií:

Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ je ľubovoľný bod.

Budeme hovoriť, že bod (ξ, η) je <u>sprava (zľava, obojstranne) lokálne pravidelný</u>, ak existuje kompaktné okolie čísla ξ sprava (zľava, obojstranné), vyznačujúce sa tým, že každé dve int. krivky d. rovnice (a), vychádzajúce z bodu (ξ, η) (vchádzajúce do bodu (ξ, η), prechádzajúce bodom (ξ, η)) splývajú v spoločnej časti svojich definičných intervalov a spomenutého okolia bodu (ξ, η).