Cvičenie. Urobte obdobný rozbor riešení d. rovníc

$$y' = -\sqrt[3]{y}, \quad y' = \sqrt{|y|}$$

## 6. Rozšírenie obsahu existenčných teorém

V tomto odseku podávame stručný prehľad o tom, aké ďalšie dôsledky vyplývajú z predpokladov peanovských existenčných teorém. V súhlase s tým predpokladáme vo všetkých častiach tohto odseku, že oborom $\sigma$ d. rovnice (a) je neohraničený dv. interval, alebo kompaktný normálny obor, alebo otvorená množina a že sú splnené podmienky príslušnej existenčnej teorémy. Prevažná časť výsledkov v tomto odseku je uvedená bez dôkazov. Prostriedky k týmto dôkazom máme síce z predchádzajúcich úvah k dispozícii, avšak detailné vypracovanie dôkazov je časove veľmi náročné, a preto od neho upúšťame.

### 32. Rozšírenie integrálov k hranici oboru d. rovnice

Existenčné teorémy dovoľujú ukázať, že za predpokladov popísaných v peanovských existenčných teorémach možno každý integrál d. rovnice (a) rozšíriť až k hranici oboru tejto d. rovnice, t.j. existuje rozšírenie integrálu, ktoré má svoje konce na hranici oboru $\sigma$.

Vskutku, nech $y_1$ je ľubovoľné riešenie d. rovnice (a) definované v nejakom intervale $j_1$. Ukážeme, že k riešeniu $y_1$ existuje rozšírenie, ktoré má napr. pravý koniec na hranici oboru $\sigma$. Obdobnými úvahami sa dá zistiť existencia rozšírenia, ktoré má ľavý koniec na hranici oboru $\sigma$ a tým platnosť tvrdenia v celom rozsahu.

Najprv uvažujme o prípade, že interval $j_1$ je sprava uzavretý. Nech $x_1$ je pravý koniec intervalu $j_1$ a $(x_1, \eta_1)$ pravý koniec int. krivky $y_1$, takže $\eta_1 = y_1(x_1)$. Ak obor $\sigma$ je neohraničený dv. interval alebo kompaktný normálny obor, alebo otvorená množina a $(x_1, \eta_1)$ je jeho vnútorným bodom, vychádza z bodu $(x_1, \eta_1)$, ako je známe, riešenie $y_2$ d. rovnice (a), ktoré má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$; obidve riešenia $y_1, y_2$ tvoria dohromady integrál d. rovnice (a), ktorý je rozšírením riešenia $y_1$ a má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$. Ak obor $\sigma$ je neohraničený dv. interval, alebo kompaktný normálny obor a bod $(x_1, \eta_1)$ je na pravej časti jeho hranice, potom integrál $y_1$ je svojím rozšírením, ktoré má zrejme pravý koniec na hranici oboru $\sigma$. Ak obor $\sigma$ je kompaktný normálny obor a bod $(x_1, \eta_1)$ leží na dolnej alebo na hornej časti jeho hranice, potom opäť je integrál $y_1$ svojím rozšírením, ktoré má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$.

Teraz uvažujme o prípade, že interval $j_1$ je sprava otvorený. Nech $x_1$ je opäť jeho pravý koniec. Ak obor $\sigma$ je otvorená množina a riešenie $y_1$

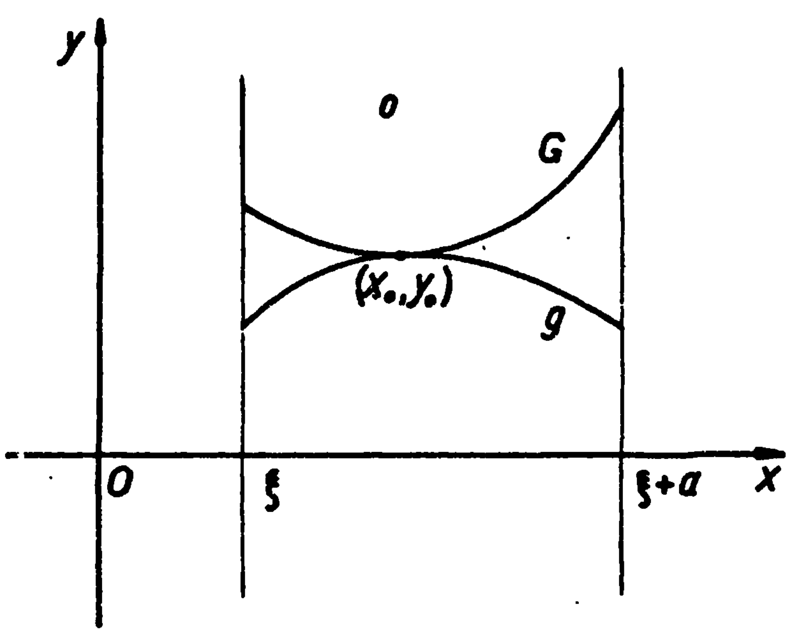
má pravý koniec na jeho hranici, je riešenie $y_1$ svojím rozšírením, ktoré má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$. Ak obor $\sigma$ je otvorená množina a riešenie $y_1$ nemá pravý koniec na jeho hranici, existuje na int. krivke $y_1$ postupnosť bodov konvergujúca k istému bodu $(x_1, \eta_1)$, ktorý je vnútorným bodom oboru $\sigma$; odtiaľ podľa vety o prírastku usudzujeme, prihliadajúc k ohraničenosti funkcie $f$ v okolí bodu $(x_1, \eta_1)$, že existuje rozšírenie $y_2$ int. krivky $y_1$ na sprava uzavretý interval $j_1 \cup \{x_1\}$ do bodu $(x_1, \eta_1)$. Podobne, ak obor $\sigma$ je neohraničený dv. interval, alebo kompaktný normálny obor, existuje rozšírenie $y_2$ int. krivky $y_1$ na sprava uzavretý interval $j_1 \cup \{x_1\}$ do istého bodu $(x_1, \eta_1)$ (ods. 7). Vo všetkých týchto prípadoch existuje podľa predchádzajúcej úvahy rozšírenie integrálu $y_2$, ktoré má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$; toto rozšírenie je zrejme rozšírením integrálu $y_1$ a má pravý koniec na hranici oboru $\sigma$.

## 33. Existencia krajných integrálov prechádzajúcich daným bodom

Ďalej sa dá ukázať, že za predpokladov popísaných v peanovských existenčných teorémach prechádzajú každým bodom $(x_0, y_0)$ oboru $\sigma$, s prípadnou výnimkou bodov ležiacich na dolnej alebo hornej časti hranice oboru $\sigma$, krajné riešenia d. rovnice (a), teda najmenšie riešenie $g$ a najväčšie riešenie $G$ d. rovnice (a), ktoré majú svoje konce na hranici oboru $\sigma$; časti krajných riešení existujú v určitom spoločnom intervale, ktorý je prienikom ich intervalov.

Podrobnejšie môžeme prvú časť tohto tvrdenia vyjadriť tým, že o existencii krajných riešení prechádzajúcich daným bodom platia vety, ktoré dostaneme z predtým uvedených existenčných teorém, ak v každej z nich nahradíme slová "aspoň jedno riešenie" slovami "najmenšie a najväčšie riešenie".

Na nasledujúcom obrázku je znázornená situácia v prípade, že obor $\sigma$ d. rovnice (a) je dv. neohraničený interval a bod $(x_0, y_0)$ leží vnútri tohto dv. intervalu.




Obr. 10

## 34. Rozšírenie krajných riešení k hranici oboru d. rovnice

Výsledky o existencii krajných riešení d. rovnice (a), ktoré sme práve uviedli, a vety o rozšírení riešení uvedené v tomto ods. 32 dovoľujú ukázať, že za predpokladov popísaných v peanovských existenčných teorémach možno každý najmenší (najväčší) integrál d. rovnice (a) prechádzajúci daným bodom rozšíriť až k hranici oboru d. rovnice tak, aby širšie riešenie bolo opäť najmenším (najväčším) riešením d. rovnice (a), ktoré prechádza týmto bodom, t.j. existuje rozšírenie integrálu, ktoré je opäť najmenším (najväčším) riešením prechádzajúcim týmto bodom a ktoré má svoje konce na hranici oboru $\sigma$.

## 35. Krajné zložené integrály prechádzajúce daným bodom

Uvedené výsledky o krajných integráloch prechádzajúcich daným bodom vedú k popisu vlastností krajných zložených integrálov za peanovských predpokladov.

Prihliadajúc k predchádzajúcim výsledkom o existencii krajných riešení vidíme, že za predpokladov popísaných v peanovských existenčných teorémach prechádzajú každým bodom oboru $\sigma$ s príp. výnimkou bodov ležiacich na dolnej alebo hornej časti hranici oboru $\sigma$ obidva krajné zložené integrály d. rovnice (a), teda dolný zložený integrál h a horný zložený integrál H d. rovnice (a), ktoré majú svoje konce na hranici oboru d. rovnice; časti týchto krajných zložených integrálov existujú v istom spoločnom intervale, ktorý je prienikom ich intervalov.

Ďalej usudzujeme, že za tých istých predpokladov možno každý dolný (horný) zložený integrál d. rovnice (a), prechádzajúci daným bodom rozšíriť až k hranici oboru d. rovnice tak, aby širší integrál bol opäť dolným (horným) zloženým integrálom d. rovnice (a), prechádzajúcim tým bodom.

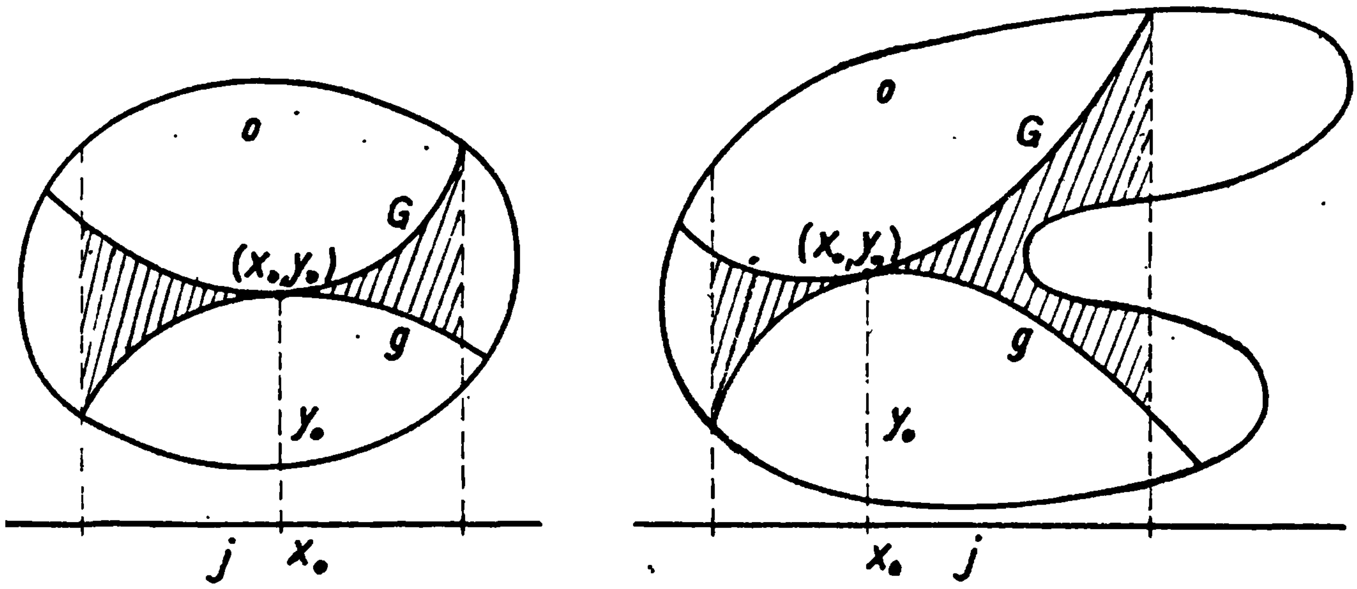
## 36. Peanovské obory

Z predchádzajúceho vieme, že za predpokladov popísaných v peanových existenčných teorémach prechádzajú každým bodom $(x_0, y_0) \in O$, s príp. výnimkou bodov ležiacich na dolnej alebo hornej časti hranice oboru $\sigma$ krajné riešenia, a to najmenšie riešenie g a najväčšie riešenie G d. rovnice (a), ktoré majú svoje konce na hranici oboru $\sigma$; tieto krajné riešenia existujú v istom spoločnom intervale j, ktorý je prienikom ich intervalov.

Časť p oboru $\sigma$ medzi obidvoma krivka g, G nazývame <u>peanovským oborom v bode</u> $(x_0, y_0)$ <u>nad intervalom</u> j, stručne: <u>peanovským oborom v bode</u> $(x_0, y_0)$. Tento obor je teda množina bodov, ktorých súradnice vyhovujú vzťahom:

$$x \in j, \quad g(x) \leq y \leq G(x)$$

Peanovský obor sa nazýva <u>úplný</u>, ak obsahuje všetky body ležiace medzi oboidvoma krivkami $g$, $G$; v opačnom prípade sa nazýva <u>neúplný</u>. Na nasledujúcom obrázku je znázornený úplný a neúplný peanovský obor v prípade, že oborom $\sigma$ d. rovnice (a) je otvorená množina:



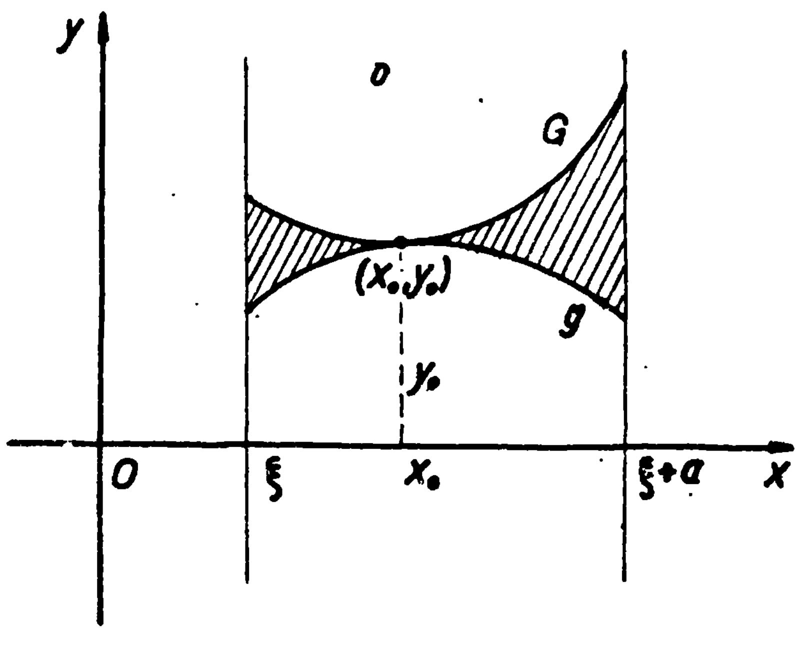

Obr. 11

Hlavným výsledkom o peanovských oboroch je táto veta:

Ak peanovský obor p je úplný, je vyplnený integrálmi d. rovnice (a), ktoré všetky prechádzajú bodom $(x_0, y_0)$.

Zmysel tvrdenia je tento: Za uvedeného predpokladu prechádza každým bodom oboru p integrál d. rovnice (a), ktorý súčasne prechádza bodom $(x_0, y_0)$.

Na nasledujúcom obrázku je znázornená situácia v prípade, že oborom $\sigma$ d. rovnice (a) je dv. neohraničený interval $[\xi, \xi + a] \times (-\infty, \infty)$. Vyčiarkovaný peanovský obor je vyplnený integrálmi d. rovnice (a), ktoré všetky prechádzajú bodom $(x_0, y_0)$.




Obr. 12

## 37. Perronova existenčná teoréma

Popisuje situáciu v prípade, že oborom d. rovnice (a) je kompaktný normálny obor vymedzený nejakými krivkami u, v, ktoré vychádzajú z toho istého bodu a vyznačujú sa tým, že u je dolná a v horná funkcia vzhľadom na rovnicu (a). Obsah teorémy je zahrnutý vo výsledkoch ods. 33, 11, 36. I napriek tomu ju uvádzame v úplnom znení vzhľadom na početné aplikácie a preto, že máme príležitosť zmieniť sa o metóde, ktorú použil Perron [12] na jej odvodenie.

Teoréma znie:

Nech v d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(a)}$$

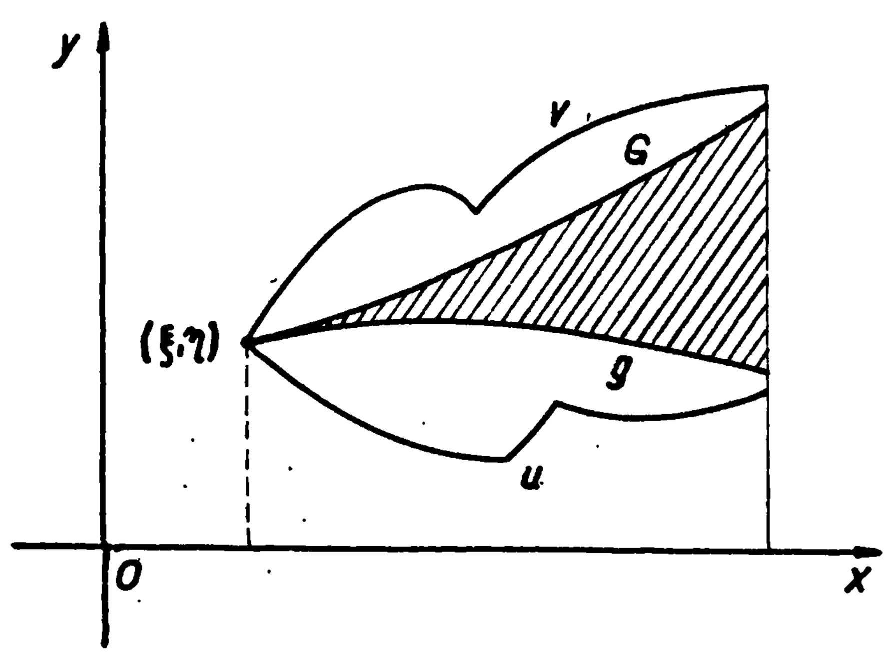
je funkcia f spojitá v kompaktnom normálnom obore:

$$(o =)\ \xi \leq x \leq \xi + a, \quad u(x) \leq y \leq v(x) \qquad (a > o)$$

pričom funkcie u, v vychádzajú z toho istého bodu $(\xi, \eta)$ a u je dolná a v horná funkcia vzhľadom na rovnicu (a). Potom z bodu $(\xi, \eta)$ vychádzajú obidve krajné riešenia g, G d. rovnice (a), ktoré sú definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Peanovský obor v bode $(\xi, \eta)$ je vyplnený int. krivkami d. rovnice (a), ktoré vychádzajú z bodu $(\xi, \eta)$ a sú definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Situácia je znázornená na uvedenom obrázku:




Obr. 13

Perronov dôkaz bol založený na iných pojmoch a úvahách, než sme vyvinuli v predchádzajúcom výklade, ktoré pojmy a úvahy sa ukázali byť veľmi užitočné.

Perron predpokladal, že funkcie u, v vychádzajú z bodu $(\xi, \eta)$, sú spojité a majú všade derivácie sprava a zľava, ktoré vyhovujú nerovnostiam

$$D \pm u(x) \leq f[x.\ u(x)] \ , \quad D \pm v(x) \geq f[x,\ v(x)]$$

V dôkaze vyšiel od prirodzeného rozšírenia $y' = F(x, y)$ d. rovnice (a) na neohraničený dv. interval $[\xi, \xi + a] \times (-\infty, \infty)$ a od pojmov dolnej a hornej funkcie, ktoré pojmy majú v jeho poňatí o niečo iný zmysel. Perron rozumie dolnou funkciou každú funkciu $\varphi$, ktorá je spojitá v intervale $[\xi, \xi + a]$, vychádza z bodu $(\xi, \eta)$ a v každom čísle $x$ tohto intervalu spĺňa nerovnosti

$$D^+ \varphi(x) < F[x, \varphi(x)]$$

Obdobne horná funkcia $\Psi$ spĺňa nerovnosti:

$$D^+ \Psi(x) > F[x, \Psi(x)]$$

Napr. $\varphi(x) = u(x) - \varepsilon(x - \xi)$ je dolnou a $\Psi(x) = v(x) + \varepsilon(x - \xi)$ je hornou funkciou pri každom $\varepsilon > 0$.

V dôkaze sa zisťuje, že hodnoty všetkých dolných funkcií v každom čísle $x \in [\xi, \xi + a]$ majú istú hornú hranicu $g(x)$ a hodnoty všetkých horných funkcií dolnú hranicu $G(x)$ a že platia nerovnosti $u(x) \leq g(x) \leq G(x) \leq v(x)$. Tým sú definované v intervale $[\xi, \xi + a]$ dve funkcie $g$, $G$, ktoré vychádzajú z bodu $(\xi, \eta)$ a ležia v obore $\sigma$. O nich sa dokáže, že $g$ je najmenším a $G$ najväčším riešením d. rovnice (a) v bode $(\xi, \eta)$.

## 7. Závislosť integrálov od parametra

38. N e c h  j e  d a n á  d.  r o v n i c a

$$y' = f(x, y; s) \tag{a}$$

ktorej pravá strana závisí od parametra $s$. Predpokladajme, že oborom $\sigma \times S$ dif. rovnice (a) je nejaká otvorená množina $\sigma$ a nejaká (neprázdna) množina čísel $S$ a že v každom čísle $s \in S$ je $f$ spojitou funkciou v množine $\sigma$.

Podľa existenčnej teorémy prechádza pri každom $s \in S$ ľubovoľným bodom $(x_0, y_0) \in \sigma$ aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v určitom otvorenom intervale a je úplné, takže sa nedá rozšíriť na interval väčší. V ďalšom máme na mysli vždy úplné riešenie d. rovnice (a). Všeobecne bodom $(x_0, y_0)$ prechádza celý zväzok riešení, vymedzený najmenším a najväčším integrálom v tomto bode. Poznamenajme, že časť najmenšieho (najväčšieho) integrálu vľavo od čísla $x_0$ a časť najväčšieho (najmenšieho) integrálu vpravo od neho tvorí dolný (horný) zložený integrál v bode $(x_0, y_0)$. Keď d. rovnica (a) (pri uvažovanom $s \in S$) má len jedno riešenie prechádzajúce bodom $(x_0, y_0)$, všetky zmienené význačné integrály s ním splývajú. Podotknime, že jednotlivé riešenia prechádzajúce bodom $(x_0, y_0)$ všeobecne závisia od voľby čísla $s$.