5. Peanovské existenčné teorémy o riešeniach d. rovnice

$$y' = f(x, y)$$

26. Prehľad o existenčných teorémach

Existenčné teorémy o riešeniach d. rovnice (a) vyjadrujú, že za istých predpokladov o funkcii f d. rovnica (a) riešenie skutočne má a popisujú niektoré vlastnosti týchto riešení. Znenie existenčných teorém a metódy, ktorými sa dokazujú, závisia samozrejme od predpokladov o funkcii f.

Z tohto hľadiska ich môžeme rozdeliť do troch skupín podľa toho, či sa o funkcii f predpokladá, že je vo svojom definičnom obore spojitá, či sa snáď navyše vyžaduje, aby mala nejaké vlastnosti týkajúce sa rastu, alebo napokon, či sa predpokladá, že je analytickou funkciou oboch premenných.

V tejto kapitole vyslovíme niekoľko existenčných teorém, ktoré súhrnne označíme ako Peanovské. Všetky tieto súvisia s pôvodnými Peánovými výsledkami [6] , [7] a vyznačujú sa všeobecnosťou, vyžadujúc zásadne len spojitosť funkcie f.

H. Hahn [8] a C. Carathéodory [9] ukázali, že i túto podmienku možno zovšeobecniť, ak sa nahradí d. rovnica rovnicou integrálnou, použijúc pritom teóriu Lebesgueovho integrálu.

Odporúčam, aby si čitateľ preštudoval poučný článok o existenčných teorémach od M. Müllera [10].

27. Existenčná teoréma pre neohraničený dv. interval

Je založená na predpoklade, že definičný obor d. rovnice (a) je neohraničený dv. interval a funkcia f je v ňom ohraničená a spojitá.

Znie takto:

Nech v d. rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

je funkcia f ohraničená a spojitá v dv. intervale:

$$(d \equiv) \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \; -\infty < y < \infty , \quad (a > 0)$$

Potom každým bodom dv. intervalu d prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Inými slovami, ak sú splnené predpoklady, existuje aspoň jedno riešenie y, definované v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktoré má v ľubovoľne danom čísle $x_0 \in [\xi, \xi + a]$ ľubovoľne danú hodnoru η , takže je $y(x_0) = \eta$; riešenie prechádza od ľavej ohraničujúcej priamky dv. intervalu d k pravej, takže jeho konce sú na hranici dv. intervalu d. Zrejme je úplné.

Dôkaz tvrdenia sa urobí tak, že sa dokáže, že z každého bodu (ξ, η) ľavej hraničnej priamky dv. intervalu vychádza a do každého bodu pravej hraničnej priamky $(\xi + a, \eta)$ vchádza a každým vnútorným bodom dv. intervalu d prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Náčrt dôkazu:

a) Najprv sa dokáže, že z každého bodu (ξ, η) vychádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Pretože funkcia f je v dv. intervale d ohraničená, existuje číslo $M > 0$ také, že je $-M \leq f(x, y) \leq M$ pre $(x, y) \in d$ a teda všetky integrálne krivky d. rovnice (a) vychádzajúce z bodu (ξ, η) ležia (ods. 10) v pravom kompaktnom klinovom obore s vrcholom (ξ, η):

$$(k \equiv) \; \xi \leq x \leq \xi + a; \; \eta - M(x - \xi) \leq y \; \eta + M(x - \xi)$$

Časť funkcie f definovanú v tomto obore k rozšírime prirodzeným spôsobom na funkciu F v dv. intervale d (ods. 9). Potom funkcia F je v dv. intervale d rovnomerne spojitá a obidve d. rovnice (a) $y' = f(x, y)$ a $y' = F(x, y)$ (A) majú tie isté integrálne krivky vychádzajúce z bodu (ξ, η). V dôkaze existenčnej teorémy môžeme teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že funkcia f je v dv. intervale d rovnomerne spojitá. (Ak nie je tento predpoklad splnený a priori, uskutočníme dôkaz pre d. rovnicu (A), zachovávajúc označenie f miesto F.)

Hlavná myšlienka dôkazu je v tom, že sa riešenie definuje ako rovnomerná limita vhodnej postupnosti Eulerových polygónov, vychádzajúcich z bodu (ξ, η). Podrobnejšie povedané: Vyjdeme od ľubovoľného delenia intervalu $[\xi, \xi + a]$, definujeme Eulerov polygón d. rovnice (a) vychádzajúci z bodu (ξ, η), ktorý patrí k tomuto deleniu a opíšeme jeho vlastnosti. Zistíme najmä, že je spojitý a má všade s výnimkou v čísle $\xi + a$ deriváciu sprava D_+. Potom ukážeme, že množina Eulerových polygónov vychádzajúcich z bodu (ξ, η), ktoré patria ku všetkým možným deleniam intervalu $[\xi, \xi' + a]$, je normálny systém. Nakoniec ukážeme, že ku každému prirodzenému číslu ν (= 1, 2, ...) existuje Eulerov polygón y_ν vychádzajúci z bodu (ξ, η), ktorý v každom čísle $x \in [\xi, \xi + a]$ s výnimkou v čísle $\xi + a$ spĺňa nerovnosti

$$-\frac{1}{\nu} \leq D_+ \; y_\nu(x) - f\big(x, y_\nu(x)\big) \leq \frac{1}{\nu}$$

z toho integráciou:

$$-\frac{x - \xi}{\nu} \leq y_\nu(x) - \eta - \int_\xi^x f\big(t, y_\nu(t)\big)\, dt \leq \frac{x - \xi}{\nu} \qquad (1)$$

Na základe týchto poznatkov je potom spád dôkazu rýchly. Pretože množina Eulerových polygónov vychádzajúcich z bodu (ξ, η), ktoré patria ku všetkým možným deleniam intervalu $[\xi, \xi + a]$, je normálny systém, existuje v postupnosti $y_1, y_2, \ldots$ čiastočná postupnosť $y_{\nu_1}, y_{\nu_2}, \ldots$, ktorá je v intervale $[\xi, \xi + a]$ rovnomerne cauchyovská a jej limita y je v ňom rovnomerne spojitá. Funkcia $y(x)$ už vyhovuje tvrdeniu existenčnej teorémy.

Vskutku, jednak postupnosť funkcií $y_{\nu_1}, y_{\nu_2}, \ldots$ konverguje v intervale $[\xi, \xi + a]$ rovnomerne k funkcii y a jednak funkcia f je v dv. intervale d rovnomerne spojitá; z toho vyplýva, že postupnosť $f(t, y_{\nu_1}(t))$, $f(t, y_{\nu_2}(t))$, ... konverguje v $[\xi, \xi + a]$ rovnomerne k funkcii $f(t, y(t))$, ktorá je tam spojitá. Odtiaľ a z nerovnosti (1) usudzujeme, že pre $x \in [\xi, \xi + a]$ je:

$$0 \leq y(x) - \eta - \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt \leq 0$$

takže je:

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

Z tohto vzorca vidíme, že funkcia y má v čísle ξ hodnotu η. Ďalej usudzujeme, prihliednuc k spojitosti funkcie $f(t, y(t))$, že funkcia y má v každom čísle $x \in [\xi, \xi + a]$ deriváciu $f(x, y(x))$, a teda vyhovuje d. rovnici (a).

b) Teraz ľahko dokážeme, že do každého bodu $(\xi + a, \eta)$ vchádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je opäť definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Za tým účelom transformujeme d. rovnicu (a) substitúciou:

$$X = -x, \quad Y = y \tag{2}$$

Potom d. rovnica (a) prejde v d. rovnicu

$$Y' = -f(-X, Y) \tag{$\bar{a}$}$$

ktorej definičný obor je dv. interval:

$$(\bar{d}^{\,*}) \quad -\xi - a \leq x \leq -\xi, \quad -\infty < y < \infty$$

súmerný vzhľadom na os y s dv. intervalom d.

Nech $(\xi + a, \eta) \in d$ je ľubovoľný bod. V transformácii (2) mu odpovedá bod $(-\xi - a, \eta) \in \bar{d}$. Funkcia $-f(-X, Y)$ v d. rovnici $(\bar{a})$ je zrejme ohraničená a spojitá v dv. intervale d, takže spĺňa predpoklady existenčnej teorémy pre neohraničený dv. interval d. Podľa ods. a) vychádza z bodu $(-\xi - -a, \eta)$ aspoň jedno riešenie Y d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[-\xi -a, -\xi]$.

V transformácii (2) mu odpovedá funkcia y, ktorá je definovaná v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktorá vchádza do bodu $(\xi + a, \eta)$ a je riešením d. rovnice (a).

c) Napokon treba dokázať, že každým vnútorným bodom dv. intervalu d prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je opäť definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

Nech teda (x_0, η) je ľubovoľný vnútorný bod dv. intervalu d, t.j. nech $\xi < x_0 < \xi + a$. Aby sme ukázali, že bodom (x_0, η) prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$ stačí aplikovať výsledky odvodené v predchádzajúcich odsekoch a) b) na d. rovnicu (a) zúženú raz na dv. interval $d_1 : \xi \leq x \leq x_0, -\infty < y < < \infty$, po druhýkrát na dv. interval $d_2 : x_0 \leq x \leq \xi + a$. Podľa predchádzajúceho existuje aspoň jedno riešenie prvej d. rovnice y_1 definované v intervale $[\xi, x_0]$, ktoré do bodu (x_0, η) vchádza a aspoň jedno riešenie druhej d. rovnice y_2, definované v intervale $[x_0, \xi + a]$, ktoré z bodu (x_0, η) vychádza. Obidve funkcie y_1, y_2 sú riešeniami d. rovnice (a), druhé nadväzuje na prvé, teda dohromady tvoria integrál d. rovnice (a), definovaný v celom intervale $[\xi, \xi + a]$, ktorý prechádza bodom (x_0, η) (ods. 7).

28. Existenčná teoréma pre kompaktný normálny obor

Teorému dokážeme v tomto znení:

Nech v d. rovnici:

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

je funkcia f spojitá v kompaktnom normálnom obore (ds. 5):

$$(\sigma \equiv) \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \quad u(x) \leq y \leq v(x), \quad (a > 0)$$

pričom u, v sú spojité funkcie, $u(x) < v(x)$ pre $\xi < x < \xi + a$.

Potom každým bodom oboru σ, ktorý neleží na krivkách u, v prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v istom uzavretom intervale a má svoje konce na hranici oboru σ.

Dôkaz tejto teorémy sa prevedie na predchádzajúci prípad, a to tak, že sa funkcia f rozšíri na funkciu F v neohraničenom dv. intervale

$$(d \equiv) \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \quad -\infty < y < \infty$$

a to tak, aby rozšírená funkcia F v d spĺňala predpoklady predchádzajúcej teorémy.

Rozšírenie funkcie f na F môže byť napr. prirodzené (ods. 9):

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pre } (x, y) \in \sigma \\ f[x, u(x)] & \text{pre } \xi \leqq x \leqq \xi + a, \quad y \leqq u(x) \\ f[x, v(x)] & \text{pre } \xi \leqq x \leqq \xi + a, \quad y \geqq v(x) \end{cases}$$

Predchádzajúca teoréma zaručuje existenciu integrálov d. rovnice (a) prechádzajúcich bodmi oboru σ, ktoré neležia na žiadnej z kriviek u, v, sú definované v istých uzavretých intervaloch a majú svoje konce na hranici oboru σ. Tieto integrály sú časťami integrálov rozšírenej d. rovnice patriacimi do oboru σ.

Naproti tomu môžu existovať body na krivkách u, v, ktoré sa vyznačujú tým, že nimi neprechádza žiadne riešenie d. rovnice (a).

Ľahko to nahliadneme na nasledujúcom príklade d. rovnice

$$y' = 0 \tag{3}$$

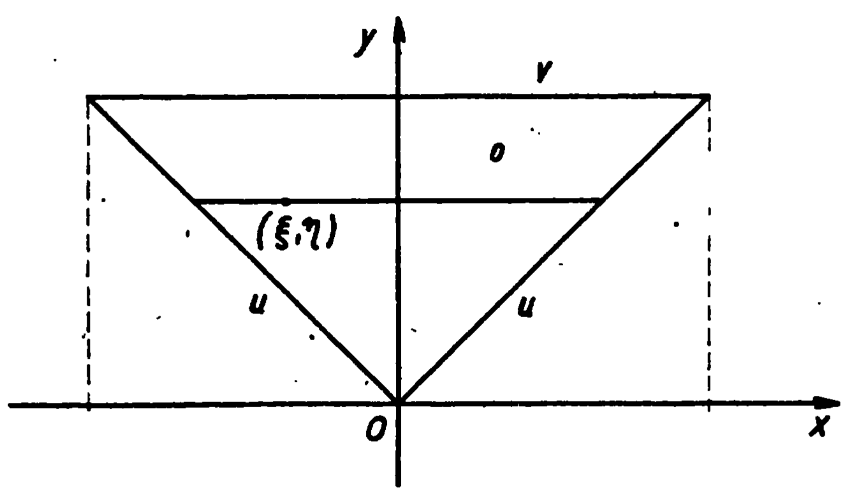
v ohraničenom a uzavretom normálnom obore:

$$(\sigma \equiv) \quad -1 \leqq x \leqq 1; \quad (u \equiv) \quad |x| \leqq y \leqq 1 \quad (\equiv v)$$

Každým bodom $(x_0, \eta) \in \sigma$ s výnimkou bodu $(0,0)$ na krivke u prechádza práve jedno riešenie d. rovnice (3), ktoré má svoje konce na hranici oboru σ. Je definované v intervale $[-\eta, \eta]$ vzorcom $y = \eta$.

Bodom $(0,0)$ však neprechádza žiadne riešenie d. rovnice (3), lebo keby ním prechádzalo napr. riešenie y, definované v nejakom intervale j, malo by všade v tomto intervale hodnotu 0. To však nie je možné, pretože krivka y neleží v obore σ.

Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku:



Obr. 8

Ak by medzi funkciami u, v a funkciou f boli vhodné vzťahy, môže výnimočné postavenie bodov na krivkách u, v, o ktorom sme sa práve zmienili, čiastočne alebo úplne odpadnúť.

V tomto smere uvedieme dve vety, ktoré sa uplatňujú vtedy, ak funkcie u v sú dolnými alebo hornými funkciami alebo dokonca riešeniami d. rovnice (a).

1. Nech sú splnené predpoklady existenčnej teorémy a nech u (v) je dolnou (hornou) a v hornou (dolnou) funkciou vzhľadom na rovnicu (a). Potom každým bodom oboru σ, prípadne s výnimkou pravých (ľavých) koncových bodov kriviek u, v prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice, ktoré je definované v istom uzavretom intervale, má svoje konce na hranici oboru σ a zrejme pravý (ľavý) koniec na pravej (ľavej) časti hranice oboru σ.

Zrejmý dôsledok tejto vety je veta nasledujúca:

2. Nech sú splnené predpoklady existenčnej teorémy a nech funkcie u, v sú riešeniami d. rovnice (a). Potom každým bodom oboru σ prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

29. Existenčná teoréma pre kompaktný dv. interval

Táto teoréma je obsiahnutá v existenčnej teoréme pre kompaktný normálny obor. Uvedieme ju v znení, ktoré je často výhodné:

Nech v d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

je funkcia f spojitá v kompaktnom dv. intervale

$$(d) \quad \xi - a \leq x \leq \xi + a, \eta - b \leq y \leq \eta + b \quad (a, b > 0)$$

Potom bodom (ξ, η) prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v istom kompaktnom intervale a má svoje konce na hranici dv. intervalu d. Tento uzavretý interval je $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$ alebo väčší; α je najmenšie z oboch čísel a, $\frac{b}{M}$. M značí najväčšiu hodnotu funkcie $|f|$ v dv. intervale d; ak M = 0, je α = a.

Treba poznamenať, že odhad dĺžky intervalu, v ktorom je riešenie definované, vyplýva z výsledkov v ods. 10.

Podobne ako v predchádzajúcom odseku, je účelné pripojiť k tejto teoréme dve vety, ktoré možno uplatniť vtedy, keď hodnoty funkcie f na dolnej a hornej časti hranice dv. intervalu d majú vždy to isté znamienko, alebo sa rovnajú nule.

1. Nech sú splnené predpoklady existenčnej teorémy a nech všade v intervale $[\xi - a, \xi + a]$ je

$$f(x, \eta - b) \geq 0, \quad f(x, \eta + b) \leq 0$$

$$(f(x, \eta - b) \leq 0, \quad f(x, \eta + b) \geq 0)$$

Potom bodom (ξ, η) prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v istom uzavretom intervale, má svoje konce na hranici dv. intervalu d, a najmä pravý (ľavý) koniec na pravej (ľavej) časti hranice dv. intervalu d. Tento uzavretý interval je $[\xi - d, \xi + a]$ $([\xi - a, \xi + d])$ lebo interval zľava(sprava)je väčší. d má ten istý význam ako v predchádzajúcej teoréme.

2. Nech sú splnené predpoklady existenčnej teorémy a nech všade v intervale $[\xi - a, \xi + a]$ je

$$f(x, \eta - b) = 0, \quad f(x, \eta + b) = 0$$

Potom bodom (ξ, η) prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v celom intervale $[\xi - a, \xi + a]$.

30. Existenčná teoréma pre otvorenú množinu

Nech v d. rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

je funkcia f spojitá v ľubovoľnej neprázdnej otvorenej množine o. Potom každým bodom oboru o prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice, ktoré je definované v určitom otvorenom intervale a má svoje konce na hranici oboru o.

Náčrt dôkazu:

Nech $(x_0, \eta) \in o$ je ľubovoľný bod. Stačí ukázať, že z bodu (x_0, η) aspoň jedno riešenie d. rovnice (a) vychádza, ktoré je definované v istom intervale sprava otvorenom a má pravý koniec na hranici oboru o, pretože potom doplnenie dôkazu je ľahké, nakoľko sa urobí podobnými úvahami ako v predchádzajúcich odsekoch.

Použijúc opätovné zúženie d. rovnice (a) na vhodný sieťový obor množiny o (ods. 9), potom jej rozšírenie na ohraničený dv. interval a existenčnej teorémy pre normálny obor, definuje sa istá rastúca nekonečná postupnosť čísel $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ a v každom intervale $[x_{\alpha-1}, x_\alpha]$ riešenie y_α d. rovnice (a). Tieto riešenia sa vyznačujú tým, že y_1 vychádza z bodu (x_0, η), každé nasledujúce riešenie $y_2, y_3, \dots$ nadväzuje na predchádzajúce. Riešenie definované v intervale $j = \sum_{\alpha=1}^{\infty} [x_{\alpha-1}, x_\alpha]$ vzorcom

$y(x) = y_\alpha(x)$ pre $x \in [x_{\alpha-1}, x_\alpha]$ má pravý koniec na hranici oboru σ. Interval j je prirodzene sprava otvorený.

31. Peanov zjav

Existenčné teorémy zaručujú, že za predpokladov v nich uvedených prechádza daným bodom (x_0, η) oboru σ d. rovnice (a) aspoň jedno jej riešenie y, ktoré má svoje konce na hranici oboru σ. Je zrejmé, že každá časť riešenia y prechádzajúca bodom (x_0, η) je tiež riešením d. rovnice (a), ktoré prechádza týmto bodom. Tieto riešenia nie sú zaujímavé, lebo vždy existujú a ich vlastnosti sú dané vlastnosťami riešenia y.

Zaujímavejšie je to, že sa niektoré body $(x_0, \eta) \in \sigma$ môžu vyznačovat vlastnosťou, že nimi prechádza niekoľko, prípadne nekonečne mnoho riešení d. rovnice (a), ktoré sú v niektorých číslach každého rýdzeho okolia čísla x_0 vzájomne rôzne, alebo dokonca sú rôzne všade vo vhodnom rýdzom okolí čísla x_0. Ak existujú aspoň dve riešenia d. rovnice (a) y_1, y_2, ktoré prechádzajú bodom (x_0, η), obidve sú definované v tom istom okolí j čísla x_0 a vyznačujú sa tým, že v každom čísle $x \in j$, $x \neq x_0$ je $y_1(x) \neq y_2(x)$, potom hovoríme, že <u>v bode</u> (x_0, η) <u>je Peanov zjav</u> a bod (x_0, η) nazývame <u>peanovským</u>.

Pritom do bodu (x_0, η) môže len jedno riešenie vchádzať, ale niekoľko vychádzať, alebo naopak, niekoľko riešení vchádzať a len jedno vychádzať, alebo sa napokon môže stať, že do bodu (x_0, η) niekoľko riešení vchádza a súčasne niekoľko vychádza.

Peanov zjav má lokálny charakter v tom zmysle, že ktorý z prípadov nastane a či vôbec nastane, závisí len od hodnôt funkcie f v ľubovoľnom malom okolí príslušného bodu.

Treba poznamenať, že peanovské body d. rovnice (a) môžu byť izolované v tom zmysle, že v dosť malom okolí peanovského bodu sa ďalšie peanovské body nenachádzajú, alebo peanovské body môžu tvoriť útvar zložitejší, napr. krivku, alebo dvojrozmerný obor. Lavrentiev [11] definoval funkciu $f(x, y)$, ktorá je spojitá v štvorci o vrcholoch (0, 0), (1,0), (1,1), (0,1) a d. rovnica $y' = f(x, y)$ sa vyznačuje tým, že každý vnútorný bod štvorca je peanovský.

<u>Príklad</u>. Uvažujme d. rovnicu

$$y' = \sqrt[3]{y} \qquad (1)$$

ktorej oborom je celá rovina.

Na túto d. rovnicu sa vzťahuje existenčná teoréma pre otvorenú množinu, takže každým bodom roviny prechádza aspoň jedno úplné riešenie d. rovnice, ktoré je definované v istom otvorenom intervale.

Ukážeme, že každý bod $(x_0, 0)$ na osi x je peanovský, a to taký, že do neho len jedno riešenie vchádza, ale tri vychádzajú, ktoré sú v každom rýdzom okolí sprava čísla x_0 navzájom rôzne. Môžeme sa obmedziť na toto zistenie v bode $(0,0)$, lebo d. rovnica (1) prejde transformáciou $X = x - x_0$, $Y = y$ v seba a každému riešeniu, ktoré vchádza, alebo vychádza z bodu $(x_0, 0)$ odpovedá riešenie, ktoré vchádza alebo vychádza z bodu $(0,0)$.

Vskutku, predovšetkým vidíme, že bodom $(0,0)$ prechádza riešenie y_0 definované vzorcom:

$$y_0 \equiv 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Pripustime, že ním prechádza ďalšie riešenie y, definované v nejakom okolí čísla 0 a že toto riešenie je v istom rýdzom okolí j zľava alebo sprava čísla 0 všade rôzne od y_0. Potom je v každom čísle $x \in j$ stále $y(x) > 0$, lebo $y(x) < 0$. Funkcia y, nakoľko vyhovuje d. rovnici (1), spĺňa v každom čísle $x \in j$ vzťah

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1$$

v ktorom ľavá strana je derivácia funkcie $\frac{3}{2} \; y^{\frac{2}{3}}$ v čísle x.

Z toho ale vyplýva, že pre $x \in j$ je

$$\left(\frac{3}{2} \; (y(x))^{\frac{2}{3}} \right)' = 1$$

a teda

$$\frac{3}{2} \left(y(x) \right)^{\frac{2}{3}} = x + C \qquad (2)$$

Pričom C značí vhodnú konštantu.

Funkcia y má v čísle 0 hodnotu 0, lebo prechádza bodom $(0,0)$ a je zrejme v čísle 0 spojitá. Preto je $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = y(o) = 0$ a teda tiež $\lim y(x) = 0$ pre $x \to 0-$, lebo $x \to 0+$. Odtiaľ a zo vzorca (2) usudzujeme, že $C = 0$ a teda pre $x \in j$ a $x = 0$ je

$$\frac{3}{2} \left(y(x) \right)^{\frac{2}{3}} = x$$

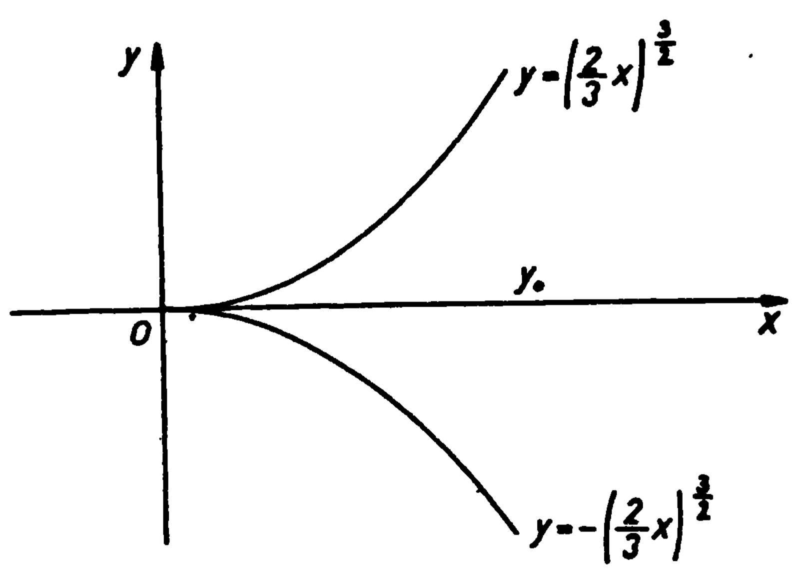
Táto rovnica predovšetkým ukazuje, že pre $x \in j$ je $x > 0$, lebo funkcia na ľavej strane je kladná; j je teda pravé rýdze okolie čísla 0. Ďalej z nej vyplýva, že pre $x \in j$ a $x = 0$ je

$$y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$$

pričom symbol za znamienkom $\pm$ značí nezáporné číslo.

Vidíme teda, že neeexistuje riešenie vchádzajúce do bodu (0,0), ktoré by sa v nejakom rýdzom okolí zľava čísla 0 všade líšilo od integrálu y_0. Naproti tomu môžu z bodu (0,0) vychádzať riešenia, ktoré sa od y_0 líšia všade v nejakom rýdzom okolí sprava čísla 0; avšak každé také riešenie musí byť buď funkcia $\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ alebo $-\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$. Jednoduchým výpočtom sa ľahko presvedčíme, že v každom čísle $x \in [0, \infty)$ jedna i druhá funkcia vyhovuje d. rovnici (1), takže je jej riešením v intervale $[0, \infty)$.

Situácia je znázornená na uvedenom obrázku:



Obr. 9

Treba poznamenať, že okrem nájdených integrálov d. rovnice (1) a jej častí prechádzajúcich bodom (0,0) ďalšie riešenia prechádzajúce bodom (0,0), a v každom okolí čísla 0 rôzne od predchádzajúcich neexistujú. Možnosť existencie riešenia y, ktoré by malo v každom rýdzom okolí zľava, alebo sprava čísla 0 niekde hodnoty nenulové a inde nulové, je vylúčená. V kladnom prípade by totiž existovali v každom napr. pravom rýdzom okolí čísla 0 čísla $x_1 < x_2$ také, že $|y(x_1)| > 0$, $|y(x_2)| = 0$. Súčasne v každom čísle definičného intervalu riešenia y platia vzorce $(y^2)' = 2\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 \geqq 0$, takže funkcia y^2 neklesá a máme $0 < y^2(x_1) \leqq y^2(x_2) = 0$, čo nie je možné.

Cvičenie. Urobte obdobný rozbor riešení d. rovníc

$$y' = -\sqrt[3]{y}, \quad y' = \sqrt{|y|}$$

6. Rozšírenie obsahu existenčných teorém

V tomto odseku podávame stručný prehľad o tom, aké ďalšie dôsledky vyplývajú z predpokladov peanovských existenčných teorém. V súhlase s tým predpokladáme vo všetkých častiach tohto odseku, že oborom σ d. rovnice (a) je neohraničený dv. interval, alebo kompaktný normálny obor, alebo otvorená množina a že sú splnené podmienky príslušnej existenčnej teorémy. Prevažná časť výsledkov v tomto odseku je uvedená bez dôkazov. Prostriedky k týmto dôkazom máme síce z predchádzajúcich úvah k dispozícii, avšak detailné vypracovanie dôkazov je časove veľmi náročné, a preto od neho upúšťame.

32. Rozšírenie integrálov k hranici oboru d. rovnice

Existenčné teorémy dovoľujú ukázať, že za predpokladov popísaných v peanovských existenčných teorémach možno každý integrál d. rovnice (a) rozšíriť až k hranici oboru tejto d. rovnice, t.j. existuje rozšírenie integrálu, ktoré má svoje konce na hranici oboru o.

Vskutku, nech y_1 je ľubovoľné riešenie d. rovnice (a) definované v nejakom intervale j_1. Ukážeme, že k riešeniu y_1 existuje rozšírenie, ktoré má napr. pravý koniec na hranici oboru σ. Obdobnými úvahami sa dá zistiť existencia rozšírenia, ktorá má ľavý koniec na hranici oboru σ a tým platnosť tvrdenia v celom rozsahu.

Najprv uvažujme o prípade, že interval j_1 je sprava uzavretý. Nech x_1 je pravý koniec intervalu j_1 a (x_1, η_1) pravý koniec int. krivky y_1, takže $\eta_1 = y_1(x_1)$. Ak obor σ je neohraničený dv. interval alebo kompaktný normálny obor, alebo otvorená množina a (x_1, η_1) je jeho vnútorným bodom, vychádza z bodu (x_1, η_1), ako je známe, riešenie y_2 d. rovnice (a), ktoré má pravý koniec na hranici oboru σ; obidve riešenia y_1, y_2 tvoria dohromady integrál d. rovnice (a), ktorý je rozšírením riešenia y_1 a má pravý koniec na hranici oboru σ. Ak obor σ je neohraničený dv. interval, alebo kompaktný normálny obor a bod (x_1, η_1) je na pravej časti jeho hranice, potom integrál y_1 je svojím rozšírením, ktoré má zrejme pravý koniec na hranici oboru σ. Ak obor σ je kompaktný normálny obor a bod (x_1, η_1) leží na dolnej alebo na hornej časti jeho hranice, potom opäť je integrál y_1 svojím rozšírením, ktoré má pravý koniec na hranici oboru σ.

Teraz uvažujme o prípade, že interval j_1 je sprava otvorený. Nech x_1 je opäť jeho pravý koniec. Ak obor σ je otvorená množina a riešenie y_1