v ktorých $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ značia ľubovoľné konštanty. Z týchto úvah nevyplýva, že by snáď nemohli existovať ešte ďalšie integrály d. rovnice (3), prechádzajúce bodom (0,0). Všetky integrálne krivky prechádzajúce bodom (0,0) ležia medzi parabolami o rovniciach $y = -2x^2$, $y = 2x^2$ (ods. 10).

2. Systémy funkcií jednej premennej

13. Základné vlastnosti

V nasledujúcich niekoľkých odsekoch vyvinieme krátku teóriu o systémoch funkcií jednej premennej, ktorá je veľmi užitočná pre teóriu študovaných d. rovníc.

Majme ľubovoľnú neprázdnu množinu Y funkcií jednej premennej, ktoré sú definované v istom spoločnom intervale j. Množinu Y nazývame tiež systémom Y.

Nech m je ľubovoľná neprázdna podmnožina intervalu j : $m \subset j$. Budeme hovoriť, že funkcie systému Y sú spola rovnomerne ohraničené na množine m, ak existuje číslo $A > 0$ také, že hodnota každej funkcie vo vhodnom čísle $x_y \in m$ spĺňa nerovnosť

$$| y(x_y) | \leq A$$

Vidíme, že táto vlastnosť je dedičná, t.j. keď funkcie systému Y sú na množine m spola rovnomerne ohraničené, potom tú istú vlastnosť majú tiež funkcie každej neprázdnej podmnožiny množiny Y. Funkcie systému Y sú na množine m spola rovnomerne ohraničené napr. vtedy, keď množina ich hodnôt v niektorom čísle množiny m je ohraničená.

Ďalej budeme hovoriť, že funkcie systému Y sú rovnomerne ohraničené na množine m, ak existuje také číslo $B > 0$, že hodnota každej funkcie $y \in Y$ v každom čísle $x \in m$ spĺňa nerovnosť

$$| y(x) | \leq B$$

Tiež táto vlastnosť je dedičná.

Vidíme, že funkcie systému Y sú na množine m rovnomerne ohraničené, sú tam aj spola rovnomerne ohraničené. Okrem toho množina ich hodnôt v každom čísle množiny m je ohraničená.

Napokon definujeme dôležitý pojem rovnomocnej spojitosti funkcií systému Y na množine m takto:

Funkcie systému Y sa nazývajú rovnomocne spojité na množine m, keď ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že každá funkcia $y \in Y$ spĺňa v každých dvoch číslach $x, x' \in m$, pre ktoré je $|x - x'| < \delta$, nerovnosť

$$|y(x) - y(x')| < \varepsilon$$

Keď funkcie systému Y sú na množine m rovnomocne spojité, potom každá z nich je tam rovnomerne spojitá. Opak neplatí, ako vidíme napr. na postupnosti funkcií

$$x, 2x, 3x, \ldots \quad \text{kde} \quad x \in [0, 1]$$

Rovnomocná spojitosť je tiež dedičná vlastnosť.

Zavedené pojmy sa uplatňujú najmä vtedy, keď funkcie systému Y sú v intervale j spojité.

Platia tieto vety:

1. Nech funkcie systému Y majú v intervale j derivácie, ktoré sú v ňom rovnomerne ohraničené. Potom sú funkcie systému Y v intervale j rovnomocne spojité.

Důkaz. Podľa predpokladu existuje číslo $B > 0$, také, že pre $x \in j$ platí

$$|y'(x)| \leq B$$

Nech $x, x' \in j$ a $y \in Y$ ľubovoľná funkcia. Aplikujúc vetu o prírastku na funkciu y dostávame

$$y(x) - y(x') = (x - x') \cdot y'(\xi), \quad \text{kde } \xi \text{ je medzi } x \text{ a } x'$$

Potom ale je:

$$|y(x) - y(x')| \leq |x - x'| \, B \tag{1}$$

Zvoľme si teraz ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a ľubovoľné $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{B}$

Vidíme, že keď čísla x, x' vyhovujú nerovnosti

$$|x - x'| < \delta$$

je tiež

$$|y(x) - y(x')| \leq |x - x'| \, B \leq \delta \cdot B < \varepsilon$$

Tým je veta dokázaná.

2. Nech interval j je ohraničený. Nech funkcie systému Y majú vlastnosť uvedenú vo vete 1. a okrem toho nech sú v intervale j spola rovnomerne ohraničené. Potom sú tieto funkcie v intervale j rovnomerne ohraničené.

Důkaz. Označme $|j|$ dĺžku intervalu j. Podľa predpokladu existujú čísla $A > 0$, $B > 0$, také, že funkcia $y \in Y$ spĺňa v každých dvoch číslach $x, x' \in j$ nerovnosť (1) a okrem toho vo vhodnom $x_y \in j$ nerovnosť

$$|y(x_y)| < A$$

Odtiaľ vidíme, že platia vzťahy:

$$|y(x)| \leq |y(x_y)| + B|x - x_y| \leq A + B|j|$$

z ktorých vyplýva tvrdenie.

14. Cauchyovské postupnosti funkcií

Nech

$$(Y \equiv)\ y_1, y_2$$

je postupnosť funkcií jednej premennej definovaných v nejakom (spoločnom) intervale j.

Postupnosť Y sa nazýva cauchyovská v čísle $x \in j$, keď má túto (klasickú) vlastnosť: K číslu x a k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo N také, že pre $y_\mu, y_\nu \in Y$, $\mu, \nu > N$, je

$$|y_\mu(x) - y_\nu(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Podľa klasickej vety usudzujeme, že postupnosť Y je v čísle x cauchyovská vtedy a len vtedy, ak v ňom konverguje. Z toho dôvodu spravidla nerozlišujeme medzi postupnosťami, ktoré sú v niektorom čísle cauchyovské alebo konvergentné. Ďalej vidíme, že táto vlastnosť je dedičná: keď totiž postupnosť Y je v čísle x cauchyovská, potom tú istú vlastnosť má i každá jej čiastočná postupnosť.

Nech $m \subset j$ je ľubovoľná neprázdna množina. Postupnosť Y sa nazýva cauchyovská na množine m vtedy, ak je cauchyovská v každom čísle $x \in m$.

V tomto prípade môže existovať číslo $\varepsilon > 0$, ktoré sa vyznačuje tým, že množina prirodzených čísel N priradených k jednotlivým číslam $x \in m$ a k číslu $\varepsilon > 0$ je neohraničená. Ak tomu nie je tak, hovoríme, že postupnosť Y je na množine m rovnomerne cauchyovská. Inými slovami:

Postupnosť Y sa nazýva rovnomerne cauchyovská na množine m, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo N také, že nerovnosť (1) platí pre $y_\mu, y_\nu \in Y$, $\mu, \nu > N$, $x \in m$.

Tiež táto vlastnosť je dedičná. Podľa klasickej vety je postupnosť Y na množine m rovnomerne cauchyovská vtedy a len vtedy, ak je na nej rovnomerne konvergentná. Z toho dôvodu spravidla nerobíme rozdiel medzi postupnosťami rovnomerne cauchyovskými a rovnomerne konvergentnými.

Teraz dokážeme dve vety, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

1. Nech funkcie postupnosti Y sú na množine m rovnomerne spojité a postupnosť Y je tam rovnomerne cauchyovská. Potom jej limita y je na množine m rovnomerne spojitá.

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Treba ukázať, že existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každé dve čísla $x, x' \in m$, ktoré spĺňajú nerovnosť $|x - x'| < \delta$ platí

$$| y(x) - y(x') | < \varepsilon$$

Nakoľko postupnosť Y na množine m rovnomerne konverguje k funkcii y, existuje funkcia $y_\alpha \in Y$ tej vlastnosti, že v každom čísle $x \in m$ platí nerovnosť $| y_\alpha (x) - y(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pretože funkcia y_α je na množine m rovnomerne spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každé dve čísla $x, x' \in m$, ktoré spĺňajú nerovnosť $| x - x'| < \delta$, je $| y_\alpha (x) - y_\alpha (x')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vidíme, že pre každé dve čísla $x, x' \in m$, ktoré spĺňajú nerovnosť $| x - x'| < \delta$ platí:

$$| y(x) - y(x') | = | (y(x) - y_\alpha (x)) + (y_\alpha (x) - y_\alpha (x')) + (y_\alpha (x') - y(x'))| \leq | y(x) - y_\alpha (x)| + | y_\alpha (x) - y_\alpha (x')| + |y_\alpha (x') - y(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Tým je veta dokázaná.

2. Nech interval j je ohraničený a funkcie postupnosti Y sú v ňom rovnomocne spojité. Nech ďalej množina m je v intervale j hustá, t.j. medzi každými dvoma rôznymi číslami intervalu j je aspoň jedno číslo množiny m, a nech postupnosť Y je na nej cauchyovská. Potom je postupnosť Y rovnomerne cauchyovská v intervale j.

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Podľa predpokladu o rovnomocnej spojitosti funkcií postupnosti Y existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každú funkciu $y_\alpha \in Y$ a pre každé dve čísla $x, x' \in j$, ktoré spĺňajú nerovnosť $|x - x'| < \delta$ je

$$| y_\alpha (x) - y_\alpha (x')| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Zvoľme ľubovoľné konečné delenie intervalu j o norme[19] menšej než δ: $a_0 < a_1 < \ldots < a_r$, pritom a_0, a_r sú konce intervalu j. Také delenie vždy vieme zvoliť, lebo interval j je ohraničený. Pretože norma delenia je menšia než δ, platí nerovnosť (2) pre každú funkciu $y_\alpha \in Y$ a pre každé dve čísla x, x', ktoré ležia v ktoromkoľvek v tom istom čiastočnom intervale delenia.

19

Normou delenia rozumieme dĺžku najväčšieho čiastočného intervalu delenia

Zvoľme ďalej vnútri každého čiastočného intervalu $[a_{\rho-1}, a_\rho]$, $\rho = 1, 2, \dots, r$ ľubovoľné číslo $x_\rho \in m$; to je možné, pretože množina m je v intervale j hustá. Postupnosť Y je cauchyovská v každom čísle $x_1, \dots, x_r$, pretože je cauchyovská v každom čísle množiny m. Existuje preto ku každému číslu x_ρ, prirodzené číslo N_ρ také, že pre každé dve funkcie $y_\mu, y_\nu \in Y$ s indexmi $\mu, \nu > N_\rho$, platí

$$|y_\mu(x_\rho) - y_\nu(x_\rho)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

Označme N najväčšie z čísel $N_1, \dots, N_r$. Potom pre každé dve funkcie y_μ, $y_\nu \in Y$ s indexmi $\mu, \nu > N$ a pre každé číslo x_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, r$) máme: $|y_\mu(x_\rho) - y_\nu(x_\rho)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nech $x \in j$ značí ľubovoľné číslo. Potom je pri vhodnom ρ : $x \in [a_{\rho-1}, a_\rho]$. Pre každé dve funkcie y_μ, $y_\nu \in Y$ s indexmi $\mu, \nu > N$, máme:

$$|y_\mu(x) - y_\nu(x)| = |(y_\mu(x) - y_\mu(x_\rho)) + (y_\mu(x_\rho) - y_\nu(x_\rho)) + (y_\nu(x_\rho) - y_\nu(x))| \leq |y_\mu(x) - y_\mu(x_\rho)| + |y_\mu(x_\rho) - y_\nu(x_\rho)| + |y_\nu(x_\rho) - y_\nu(x)|$$

a vidíme, že každý sčítanec na pravej strane je menším než $\frac{\varepsilon}{3}$, prvý a tretí preto, že čísla x, x_ρ sú v tom istom čiastočnom intervale delenia a druhý podľa definície čísla N. Tým je dôkaz uskutočnený.

15. Ascoliova veta

Uvažujme o postupnosti funkcií definovaných v nejakom intervale j:

$$(Y \equiv)\ y_1, y_2, \dots$$

<u>Ascoliova veta</u> znie takto:

Nech interval j je ohraničený a funkcie postupnosti Y sú v ňom rovnomocne spojité, nech ďalej množina ich hodnôt v každom čísle intervalu j je ohraničená. Potom v postupnosti Y existuje aspoň jedna čiastočná postupnosť, ktorá je v intervale j rovnomerne cauchyovská.

Podľa vety 12.1 je limita tejto čiastočnej postupnosti v intervale j rovnomerne spojitá.

<u>Dôkaz</u>. Nech m značí množinu všetkých racionálnych čísel ležiacich v intervale j. Množina m je v intervale j hustá a dá sa usporiadať do postupnosti. Nech $(m =) \{r_1, r_2, \dots\}$ je jej nejaké usporiadanie.

Dôkaz bude uskutočnený, ak sa nám podarí definovať postupnosť postupností funkcií:

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots$$

$$y_{21}, y_{22}, y_{23}, \dots \qquad (1)$$

$$y_{31}, y_{32}, y_{33}, \dots$$

ktorá má tieto vlastnosti: Prvá postupnosť je Y a každá nasledujúca je čiastkou postupnosti predchádzajúcej; druhá postupnosť je cauchyovská v čísle r_1, tretia i v čísle r_2 atď.

Potom totiž postupnosť funkcií

$$y_{11}, y_{22}, y_{33}, \dots \qquad (2)$$

ktorá je čiastkou postupnosti Y je cauchyovská na množine m, a teda podľa vety 14. 2 je rovnomerne cauchyovská v intervale j. To, že postupnosť (2) je cauchyovská na množine m je pravda, pretože postupnosť hodnôt funkcií tejto postupnosti v ľubovoľnom čísle r_n, $(n + 1)$-tou funkciou počínajúc je čiastkou postupnosti hodnôt $(n + 1)$-tej postupnosti (1) v čísle r_n, ktorá je cauchyovská.

Aby sme teda definovali postupnosti (1), uvážme, že prvú postupnosť máme definovanú - a je to postupnosť Y - a predpokladajme, že sme ich už definovali určitý počet n (≥ 1) tak, aby mali žiadané vlastnosti.

$(n+1)$-tú postupnosť potom definujeme pomocou n-tej takto: Z predpokladu o ohraničení množiny hodnôt funkcií postupnosti Y v každom čísle intervalu j vyplýva, že postupnosť čísel $y_{n1}(r_n)$, $y_{n2}(r_n)$, $y_{n3}(r_n)$, ... je ohraničená. V tejto postupnosti teda existuje cauchyovská čiastka; označme ju $y_{n+1,1}(r_n)$, $y_{n+1,2}(r_n)$, $y_{n+1,3}(r_n)$, ... Postupnosť funkcií $y_{n+1,1}$, $y_{n+1,2}$, $y_{n+1,3}$ ... je čiastkou n-tej postupnosti (1) a je cauchyovská i v čísle r_n. Tým máme definovanú $(n+1)$-nú postupnosť (1) a dôkaz je skončený.

16. Dôsledky Ascoliovej vety

Dokážeme dve vety, ktoré sa primykajú k predchádzajúcim úvahám a ktoré neskôr budeme potrebovať. Označenie tu preberáme z predchádzajúceho odseku.

1. Nech sú splnené predpoklady Ascoliovej vety a nech postupnosť Y v intervale j nerastúca (neklesajúca). Potom táto postupnosť je v intervale j rovnomerne cauchyovská.

<u>Dôkaz</u>. Predpokladajme napr., že postupnosť Y v intervale j nerastie takže v každom $x \in j$ je:

$$y_1(x) \geq y_2(x) \geq \dots \qquad (1)$$

Podľa Ascoliovej vety existuje čiastočná postupnosť

$$y_{\alpha_1},\quad y_{\alpha_2}, \ldots \tag{2}$$

ktorá je v j rovnomerne cauchyovská a samozrejme nerastie.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Treba ukázať, že existuje prirodzené číslo N také, že pre y_μ, $y_\nu \in Y$, $\mu, \nu > N$, $x \in j$ je splnená nerovnosť

$$| y_\mu (x) - y_\nu (x) | < \varepsilon$$

Nakoľko postupnosť (2) je v intervale j rovnomerne cauchyovská, existuje číslo $N \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ také, že pre každé číslo $n \geq N$, $n \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ všade v intervale j platí nerovnosť

$$| y_N(x) - y_n(x) | < \varepsilon \tag{3}$$

Nech y_μ, $y_\nu \in Y$ sú ľubovoľné funkcie s indexmi $\mu, \nu > N$. Nech je napr. $\mu \leq \nu$. Zvoľme ľubovoľné číslo $n \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, $n \geq \nu$. Potom máme $N < \mu \leq \nu \leq n$ a v každom čísle $x \in j$ platia nerovnosti

$$y_N(x) \geq y_\mu (x) \geq y_\nu (x) \geq y_n(x)$$

ako vidíme zo vzťahov (1). Odtiaľ a z nerovnosti (3) usudzujeme, že pre $x \in j$ je

$$| y_\mu (x) - y_\nu (x) | = y_\mu (x) - y_\nu (x) \leq y_N(x) - y_n(x) = | y_N(x) - $$

$$- y_n(x) | < \varepsilon$$

Tým je tvrdenie dokázané.

2. Nech sú splnené predpoklady Ascoliovej vety a nech všetky rovnomerne cauchyovské čiastky postupnosti Y majú tú istú (rovnomernú) limitu y. Potom tiež postupnosť Y má rovnomernú limitu y.

Dôkaz. Pripustime, že sú splnené všetky predpoklady a predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ a súčasne čiastočná postupnosť $\{ y_\alpha \}, \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ a postupnosť čísel $x_\alpha \in j$ taká, že platí

$$| y_\alpha (x_\alpha) - y(x_\alpha) | \geq \varepsilon$$

Podľa Ascoliovej vety existuje rovnomerne cauchyovská čiastka postupnosti $\{ y_\alpha \}$, ktorá podľa predpokladu má (rovnomernú) limitu y. Označme túto cauchyovskú čiastku $\{ y_\beta \}$, potom pre každé μ dosť veľké platí

$$|y_\beta (x_\beta) - y(x_\beta)| < \varepsilon$$

Avšak to je spor s nerovnosťami (2). Tým je veta dokázaná.

17. Normálne systémy

Vráťme sa k úvahám o ľubovoľnom systéme funkcií jednej premennej Y, ktoré sú definované v istom intervale j. Budeme hovoriť, že systém Y je normálny v intervale j, stručne: normálny, keď celkom všetky funkcie systému Y sú v intervale j rovnomocne spojité a množina ich hodnôt v každom čísle intervalu j je ohraničená.

Táto vlastnosť je dedičná, t.j. ak systém Y je normálny, potom tiež každý jeho podsystém je normálny.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva niekoľko dôležitých vlastností normálnych systémov.

a) Keď interval j je ohraničený a funkcie systému Y sú rovnomerne ohraničené v j a majú v j rovnomerne ohraničené derivácie, potom systém Y je normálny.

b) Keď interval j je ohraničený a systém Y je v ňom normálny, potom v každej postupnosti funkcií systému Y existuje aspoň jedna čiastočná postupnosť, ktorá je v j rovnomerne cauchyovská. Limita tejto čiastočnej postupnosti je v intervale j rovnomerne spojitá.

18. Systémy funkcií ako metrické priestory

V tomto odseku objasníme, ako sa niektoré vlastnosti systému funkcií a najmä normálne systémy, javia z hľadiska metrických priestorov. Za tým účelom urobíme vopred niekoľko poznámok o základných pojmoch tejto teórie, pokiaľ ich budeme v ďalšom potrebovať.

Metrickým priestorom sa rozumie, ako je známe, ľubovoľná neprázdna množina P, v ktorej je definovaná metrika, t.j. funkcia, ktorá ku každej usporiadanej dvojici prvkov a, b $\in$ P priraďuje nezáporné číslo ρ (a, b), tzv. vzdialenosť prvku b od a. Pritom sa požaduje, aby funkcia ρ mala tieto vlastnosti:

1. $\rho(a, b) = 0$, ak $a = b$ a len vtedy;
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
3. $\rho(a, b) \leqq \rho(a, c) + \rho(c, b)$;

a, b, c $\in$ P značia ľubovoľné prvky. Vzhľadom na vlastnosti 2. hovoríme obyčajne o vzdialenosti prvkov bez ohľadu na to, či ide o vzdialenosť prvku a od b, alebo b od a.

Nech P značí ľubovoľný metrický priestor. Nech $\{a_{\alpha}\}$ je bodová postupnosť v P, t.j. postupnosť, ktorej členy sú prvky priestoru P.

Postupnosť $\{a_{\alpha}\}$ sa nazýva cauchyovská, keď ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také číslo N, že pre všetky n, m $\geq$ N platí

$$\rho(a_n, a_m) \leq \varepsilon$$

Cauchyovské postupnosti treba rozlišovať od postupností konvergentných.

Postupnosť $\{a_{\alpha}\}$ sa nazýva konvergentná v priestore P, keď v priestore P existuje jej limita, t.j. prvok, od ktorého celkom všetky prvky postupnosti $\{a_{\alpha}\}$ majú vzdialenosť menšiu než ľubovoľne dané kladné číslo. Konvergentná postupnosť je vždy cauchyovská, avšak nemusí to platiť naopak.

Priestor P sa nazýva relatívne kompaktný, ak v každej postupnosti jeho prvkov existuje cauchyovská čiastka. Priestor P sa nazýva úplný, ak každá cauchyovská postupnosť prvkov v P je konvergentná. Priestor P sa nazýva kompaktný, ak je súčasne relatívne kompaktný a úplný, alebo ak v každej postupnosti prvkov P existuje konvergentná čiastka.

Vráťme sa teraz k úvahám o systémoch funkcií jednej premennej.

Nech Y opäť značí ľubovoľný systém funkcií jednej premennej, ktoré sú definované v istom intervale j. Predpokladajme v ďalšom, že funkcie systému Y sú v intervale j ohraničené. Tento predpoklad je v ďalších úvahách podstatný.

Systém Y povýšime na metrický priestor tým, že v ňom definujeme metriku ρ takto: vzdialenosť ľubovoľnej funkcie $v \in Y$ od ľubovoľnej funkcie $u \in Y$ definujeme vzorcom

$$\rho(u, v) = \sup_{x \in j} |u(x) - v(x)|$$

Pretože funkcie systému Y sú v intervale j ohraničené, má táto definícia zmysel. Ľahko vidíme, že funkcia ρ má žiadané vlastnosti 1-3; nazývame ju prirodzenou metrikou systému Y.

Z definície funkcie ρ vyplýva, že ľubovoľné funkcie $u, v \in Y$ spĺňajú v každom čísle $x \in j$ nerovnosť $|u(x) - v(x)| \leq \varepsilon$ vtedy a len vtedy, keď $\rho(u, v) \leq \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ značí ľubovoľné číslo.

Z toho usudzujeme, že ľubovoľná postupnosť funkcií systému Y je v intervale j rovnomerne cauchyovská, alebo rovnomerne konvergentná vtedy a len vtedy, keď je z hľadiska metrického cauchyovská. Ďalej, že je v intervale j rovnomerne konvergentná a jej limita je v systéme Y, keď je konvergentná v zmysle metrickom a len vtedy.

Z týchto poznámok plynú nasledujúce dôsledky:

Keď systém Y je normálny potom je z hľadiska metrického relatívne kompaktný; v prípade, že funkcie systému Y sú v intervale j rovnomerne spojité, platí tiež opak.

Ak sa systém Y vyznačuje tým, že limita každej rovnomerne konvergentnej postupnosti jeho funkcií je v systéme Y, potom je z hľadiska metrického úplný a naopak.

Keď sa systém Y vyznačuje tým, že v každej postupnosti jeho funkcií existuje rovnomerne konvergentná čiastka, ktorej limita je v systéme Y, potom je z hľadiska metrického kompaktný a naopak.

19. Systémy funkcií ako zväzy

V tomto odseku objasníme niektoré vlastnosti systémov funkcií z hľadiska teórie zväzov.

Opäť urobíme stručný výklad o základných pojmoch teórie zväzov, pokiaľ ich budeme potrebovať.

Nech P je ľubovoľná neprázdna množina. Množina P sa nazýva <u>čiastočne usporiadaná</u>, keď je dané pravidlo, tzv. <u>čiastočné usporiadanie</u>, ktoré ku každému prvku množiny P priraďuje isté prvky v P, spĺňajúc pritom určité podmienky. Zaveďme symbol $a \leqq b$ k vyjadreniu toho, že pravidlo priraďuje k prvku a prvok b; čítame ho: a leží v b, alebo b obsahuje a. Potom tie podmienky sú:

1. pre $a \in P$ je $a \leqq a$ (reflexívnosť),
2. ak $a \leqq b$, $b \leqq c$ potom $a \leqq c$ (tranzitívnosť),
3. ak $a \leqq b$, $b \leqq a$ potom $a = a$ (antisymetria).

Ku každému čiastočnému usporiadaniu množiny P existuje čiastočné usporiadanie inverzné, ktoré k prvku a priraďuje prvok b vtedy a len vtedy, ak pôvodné čiastočné usporiadanie priraďuje k prvku b prvok a.

Predpokladajme, že množina P je čiastočne usporiadaná. Nech $A \subset P$ je ľubovoľná neprázdna podmnožina.

Prvok $u \in P$ sa nazýva <u>hornou hranicou množiny</u> A (vzhľadom na dané čiastočné usporiadanie), keď obsahuje každý prvok množiny A a sám leží v každom prvku množiny P, ktorý má túto vlastnosť. Inými slovami, ak platia vzťahy $a \leqq u \leqq x$ pre všetky prvky $a \in A$ a všetky prvky $x \in P$ vyhovujúce vzťahu $a \leqq x$.

Hornú hranicu množiny A značíme obyčajne $[A]$, alebo ak sme označili prvky množiny A písmenami $a, b, \dots$, symbolom $[a, b, \dots]$ alebo $a \cup b \cup \dots$ Dá sa ľahko ukázať, že množina A môže mať najviac jednu hornú hranicu.

Podobne sa definuje <u>dolná hranica množiny</u> A.

Prvok $v \in P$ sa nazýva dolnou hranicou množiny A (vzhľadom na dané čiastočné usporiadanie), ak leží v každom prvku množiny A a sám obsahuje každý prvok množiny P, ktorý má túto vlastnosť. Inými slovami, ak platia vzťahy $y \leqq v \leqq a$ pre všetky prvky $a \in A$ a všetky prvky $y \in P$, vyhovujúce vzťahu $y \leqq a$. Dolnú hranicu množiny A značíme obyčajne (A), alebo ak sme označili prvky množiny A : $a, b, \dots$, symbolom $(a, b, \dots)$ alebo $a \cap b \cap \dots$, Opäť platí, že množina A môže mať najviac jednu dolnú hranicu.

Horné a dolné hranice množiny A, ak vôbec existujú, vymenia sa, ak sa vymení dané čiastočné usporiadanie množiny P za čiastočné usporiadanie inverzné.

Každá jednobodová podmnožima $\{a\} \subset P$, kde $a \in P$ má samozrejme hornú aj dolnú hranicu, ktoré obidve sa rovnajú a. Ďalší prípad, ktorý však už nie je všeobecný, je ten, že i každá dvojbodová podmnožina v P má dolnú i hornú hranicu. Ak je tomu tak, potom sa množina P nazýva <u>zväz</u> (vzhľadom na dané čiastočné usporiadanie). No, najzvláštnejší prípad je ten, že <u>každá</u> neprázdna podmnožina v P má hornú i dolnú hranicu a potom sa množina P nazýva <u>úplný zväz</u> (vzhľadom na dané čiastočné usporiadanie),

Predpokladajme, že P je zväz. Potom má rad vlastností len preto, že je zväzom a tieto vlastnosti sú duálne vzhľadom na pojem hornej a dolnej hranice. Môže však mať i niektoré vlastnosti, ktoré sa vyskytujú len vo zvláštnych prípadoch. Najmä môže vo zväze P existovať tzv. <u>najväčší prvok</u> σ vyznačujúci sa tým, že obsahuje každý prvok zväzu, takže je $x \leqq \sigma$ pre $x \in P$, alebo tam môže existovať tzv. <u>najmenší prvok</u> o, ktorý leží v každom prvku zväzu, takže máme $o \leqq x$ pre $x \in P$. Ďalej pripomeňme, že zväz P sa nazýva <u>distributívny</u>, ak pre každé jeho prvky $a, b, c \in P$ platí tzv. <u>distributívny zákon</u>, t.j. relácia, ktorú možno vyjadriť napr. jedným z dvoch nasledujúcich vzorcov, ktoré vždy platia súčasne:

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c),$$

$$a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown (a \smile c)$$

Podrobnejšie poučenie o teórii zväzov nájde čitateľ v príslušnej literatúre (napr. [5]).

Teraz sa vráťme k úvahám o systémoch funkcií jednej premennej.

Nech Y značí opäť ľubovoľný systém funkcií jednej premennej, ktoré sú definované v istom intervale j.

V systéme Y definujeme čiastočné usporiadanie týmto spôsobom:

Pre $u, v \in Y$ je $u \leqq v$ vtedy a len vtedy, ak v každom čísle $x \in j$ platí nerovnosť

$$u(x) \leqq v(x) \tag{1}$$

Symbol $u \leqq v$ je teda ekvivalentný s tým, že v každom čísle $x \in j$ platí nerovnosť (1). Ľahko vidíme, že toto pravidlo spĺňa predtým uvedené požiadavky 1 - 3; nazývame ho <u>prirodzené čiastočné usporiadanie systému Y.</u>

Nech $y_1, y_2 \in Y$ značia ľubovoľné prvky. Nech $\bar{Y}$, $\bar{y}$ sú funkcie definované v intervale j vzorcami:

$$\bar{Y}(x) = \max \left[y_1(x), y_2(x) \right]; \bar{y}(x) = \min \left[y_1(x), y_2(x) \right] \tag{2}$$

takže v každom čísle $x \in j$ je hodnota funkcie $\bar{Y}(\bar{y})$ najväčšie (najmenšie) z obidvoch čísel $y_1(x)$, $y_2(x)$. Ľahko vidíme, že ak funkcie $\bar{Y}$, $\bar{y}$ sú prvky systému Y, predstavujú hornú a dolnú hranicu množiny $\{y_1, y_2\}$ (vzhľadom na prirodzené čiastočné usporiadanie), takže je $\bar{Y} = y_1 \cup y_2$, $\bar{y} = y_1 \cap y_2$. Ak sa teda systém Y vyznačuje tým, že s každými svojimi dvoma prvkami y_1, y_2 obsahuje obidve funkcie $\bar{Y}, \bar{y}$, definované vzorcami (2), je zväzom. Napr. množina všetkých spojitých funkcií definovaných v nejakom intervale j, je zväzom.

Uvažujme všeobecnejšie o ľubovoľnom podsystéme funkcií v systéme Y, $A = \{y_1(x), y_2(x), \ldots\}$. Predpokladajme, že množina hodnôt funkcií systému A je v každom čísle $x \in j$ (zhora aj zdola) ohraničená. Potom existujú funkcie $\bar{Y}, \bar{y}$ definované v intervale j vzorcami

$$\bar{Y}(x) = \sup\left[y_1(x), y_2(x), \ldots\right] \quad \bar{y}(x) = \inf\left[y_1(x), y_2(x), \ldots\right] \tag{3}$$

hodnota funkcie $Y(\bar{y})$ je teda v každom čísle $x \in j$ hornou (dolnou) hranicou množiny hodnôt funkcie systému A v čísle x. Opäť ľahko vidíme, že ak funkcie $\bar{Y}, \bar{y}$ sú prvkami systému Y, predstavujú hornú a dolnú hranicu množiny A, takže je $\bar{Y} = y_1 \cup y_2 \ldots$, $\bar{y} = y_1 \cap y_2 \cap \ldots$. Ak sa teda systém Y vyznačuje tým, že spolu s každým podsystémom A svojich funkcií obsahuje obidve funkcie $\bar{Y}, \bar{y}$, definované vzorcami (3), je úplným zväzom.

Predpokladajme, že systém Y je zväzom a obsahuje spolu s každými funkciami $y_1, y_2 \in Y$ obidve funkcie $\bar{Y}, \bar{y}$.

Ľahko zistíme, že je nutne distributívny. Vskutku, nech $u, v, w \in Y$ sú ľubovoľné prvky, ukážme, že platí napr. vzťah

$$u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup (u \cap w)$$

alebo v každom čísle $x \in j$ rovnosť:

$$\min\left\{u(x), \max\left[v(x), w(x)\right]\right\} = \max\left\{\min\left[u(x), v(x)\right], \min\left[u(x)\ w(x)\right]\right\}$$

Ľavá aj pravá strana tejto rovnosti je $u(x)$, ak číslo $u(x)$ je čo do veľkosti najmenšie, alebo druhé z čísel $u(x), v(x), w(x)$ rovná sa číslu $w(x)$ alebo $v(x)$ podľa toho, či je $v(x) < w(x) < u(x)$ alebo $w(x) < v(x) < u(x)$. Tým je dôkaz uskutočnený.

Vidíme, že každý systém funkcií, ktorý je vzhľadom na prirodzené usporiadanie zväzom s uvedenou vlastnosťou, je zväzom distributívnym.

Napokon predpokladajme, že zväz Y je súčasne metrickým priestorom s prirodzenou metrikou.

Ľahko zistíme, že vzdialenosť každých dvoch jeho prvkov rovná sa vzdialenosti ich hornej a dolnej hranice. Vskutku, nech $u, v \in Y$ sú ľubovoľné prvky. Potom v každom čísle $x \in j$ máme

$$|u(x) - v(x)| = \max\left[u(x), v(x)\right] - \min\left[u(x), v(x)\right]$$

a odtiaľ vyplýva

$$\sup_{x \in j} | u(x) - v(x) | = \sup \{ | \max [u(x), v(x)] - \min [u(x), v(x)] | \}$$

alebo

$$\rho (u, v) = \rho (u \smile v, u \frown v)$$

Vidíme, že v každom systéme funkcií, ktorý je zväzom vzhľadom na prirodzené čiastočné usporiadanie a má uvedenú vlastnosť a je súčasne metrickým priestorom s prirodzenou metrikou, je vzdialenosť každých dvoch prvkov tá istá ako vzdialenosť ich hornej a dolnej hranice.

3. Vlastnosti systémov riešení d. rovnice

$$y' = f(x, y)$$

20. V l a s t n o s t i m e t r i c k é

Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (a)$$

v nejakom obore σ a predpokladajme, že má riešenie definované v určitom intervale j.

Platia tieto vety:

1. Nech Y je ľubovoľný systém riešení d. rovnice (a) definovaných v intervale j. Ak funkcia f je v obore σ ohraničená a ak interval j je ohraničený a funkcie systému Y sú spola rovnomerne ohraničené, potom systém Y je normálny.

Vskutku, funkcie systému Y majú v intervale j derivácie, ktoré sú vzhľadom na predpoklad o funkcii f rovnomerne ohraničené. Správnosť tvrdenia teda vyplýva z výsledkov v ods. 14.

Táto veta obsahuje, že za predpokladov v nej uvedených existuje v každej postupnosti funkcií systému Y aspoň jedna čiastočná postupnosť, ktorá je v intervale j rovnomerne cauchyovská; jej limita je v intervale j rovnomerne spojitá.

Z hľadiska prirodzenej metriky je systém Y relatívne kompaktný.

2. Nech

$$y_1, y_2, \dots$$

je ľubovoľná postupnosť riešení d. rovnice (a) definovaných v intervale j, ktorá je v tomto intervale rovnomerne cauchyovská a teda tam má určitú limitu y;