13. O grupách tříd

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 63--68.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401372

1'. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_p\mathfrak{A}$, 2'. $\mathfrak{B}/_p\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_p(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$
a jejich zvláštní případy

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}/_p\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_p(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Zopakujme si, že $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a že podgrupa $\mathfrak{A}$ leží v $\mathfrak{B}$ a jest zaměnitelná s $\mathfrak{C}$.

Cvičení. 1. Když grupa $\mathfrak{G}$ jest abelovská, pak levá třída libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k nějaké podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ jest současně pravou třídou prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$; odtud plyne rovnost levého a pravého rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$.

2. Levý (a současně pravý) rozklad grupy $\mathfrak{Z}$ vytvořený podgrupou skládající se ze všech násobků libovolného přirozeného čísla n jest rozklad $\bar{Z}_n$, o němž jsme uvažovali na str. 38.

3. Řád každé grupy, jejíž prvky jsou permutace nějaké konečné množiny řádu n, jest dělitelem čísla $n!$

4. Počet prvků v libovolné konečné abelovské grupě řádu N, které jsou samy k sobě inversní, jest dělitelem čísla N.

5. Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu a B libovolnou podmnožinu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Ukažte, že 1. součet všech levých (pravých) tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s B, jest $B\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}B$), 2. součet všech levých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s některou pravou třídou $\mathfrak{A}a$, jest týž, jako součet všech pravých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$ incidentních s levou třídou $a\mathfrak{A}$.

13. O grupách tříd.

Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Jak jsme viděli v odst. 12., vytvořuje podgrupa $\mathfrak{A}$ levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a pravý rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$. Položme si otázku, zda na př. levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ může býti vytvořující.

Předpokládejme nejprve, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ vytvořující jest a uvažujme o dvou libovolných prvcích $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, takže a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$. Podle definice vytvořujícího rozkladu existuje prvek $c\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ takový, že platí vztah

$$a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}.$$

Z tohoto vztahu plyne zejména $ab\mathfrak{A} = (a\underline{1}) \cdot b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, tedy $ab\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, a odtud opět $ab = ab \cdot \underline{1} \in c\mathfrak{A}$, takže podle vět 1. a 4. na str. 59. máme $c\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy především vztah $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} \subset ab\mathfrak{A}$. Každý prvek v levé třídě $ab\mathfrak{A}$ jest součinem $ab.x$ prvku ab s některým prvkem $x \in \mathfrak{A}$ a zřejmě platí vztahy $abx = (a\underline{1})(bx) \in a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A}$; odtud plyne, že současně jest $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} \supset ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}, \tag{1}$$

t. j., součin levé třídy $a\mathfrak{A}$ s levou třídou $b\mathfrak{A}$ jest levá třída $ab\mathfrak{A}$.

Z rovnosti (1) plyne zejména pro $b = a^{-1}$: $a\mathfrak{A}a^{-1} = a\mathfrak{A} . (a^{-1}\underline{1}) \subset \subset a\mathfrak{A} . a^{-1}\mathfrak{A} = aa^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, a tedy vychází $a\mathfrak{A}a^{-1} \subset \mathfrak{A}$. Protože a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, platí tento vztah i pro prvek a^{-1}, a tedy máme současně $a^{-1}\mathfrak{A}a \subset \mathfrak{A}$; odtud plyne $\mathfrak{A} = (aa^{-1})\mathfrak{A}(aa^{-1}) = a(a^{-1}\mathfrak{A}a)a^{-1} \subset \subset a\mathfrak{A}a^{-1}$, t. j. $a\mathfrak{A}a^{-1} \supset \mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$a\mathfrak{A}a^{-1} = \mathfrak{A},$$

anebo, což jest totéž, $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, takže levá třída každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ jest současně pravou třídou prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$. Důsledkem tohoto výsledku jest ovšem rovnost levého a pravého rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$, t. j. $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$.

Předpokládejme nyní naopak, že podgrupa $\mathfrak{A}$ se vyznačuje vlastností, že levá třída $a\mathfrak{A}$ každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$ jest současně pravou třídou $\mathfrak{A}a$ prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$. Pak pro každé dvě levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ platí tyto rovnosti: $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} = a(\mathfrak{A}b)\mathfrak{A} = a(b\mathfrak{A})\mathfrak{A} = ab(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = = ab\mathfrak{A}$ a z nich plyne $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$. Platí-li tedy náš předpoklad, pak součin levé třídy $a\mathfrak{A}$ s levou třídou $b\mathfrak{A}$ jest levá třída $ab\mathfrak{A}$ a tím jest také zjištěno, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$, který jest ovšem rovný rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, jest vytvořující. Když nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ se vyznačuje vlastností, že levá a pravá třída každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ splývají, když tedy pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a\mathfrak{A} = = \mathfrak{A}a$, pak pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *invariantní* anebo *normální* podgrupa v grupě $\mathfrak{G}$. V tomto případě ovšem levý a pravý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ splývají v jeden t. zv. *rozklad grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$. Použijeme-li těchto názvů, můžeme naše hořejší úvahy shrnouti v této větě: *Je-li podgrupa* $\mathfrak{A}$ *invariantní v grupě* $\mathfrak{G}$, *a jenom v tomto případě, jest levý* (*pravý*) *rozklad grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$ *vytvořující. Součin libovolného prvku* $a\mathfrak{A}$ *rozkladu grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořeného podgrupou* $\mathfrak{A}$ *s libovolným prvkem* $b\mathfrak{A}$ *jest pak prvek* $ab\mathfrak{A}$.

Pozoruhodná vlastnost grup záleží v tom, že naopak každý vytvořující rozklad libovolné grupy $\mathfrak{G}$ jest rozklad vytvořený nějakou invariantní podgrupou. Uvažujme o libovolném vytvořujícím rozkladu $\overline{G}$ grupy $\mathfrak{G}$! Protože každý prvek grupy $\mathfrak{G}$ jest obsažen v některém prvku rozkladu $\overline{G}$ a právě jenom v jednom, existuje jistý prvek $A \in \overline{G}$, který obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$. Dokážeme, že A jest polem invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ a $\overline{G}$ jest rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený touto invariantní podgrupou. Za tím účelem především uvažme, že existuje prvek $\bar{a} \in \overline{G}$ takový, že $AA \subset \bar{a}$, neboť rozklad $\overline{G}$ jest vytvořující. Protože jednak platí vztahy $\underline{1} = \underline{1} . \underline{1} \in \in AA \subset \bar{a}$ a jednak $\underline{1} \in A$, máme $\bar{a} = A$ a tím jest ukázáno, že množina A jest grupoidní. Příslušný podgrupoid $\mathfrak{A}$ obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{A}$ a jak nyní ukážeme, obsahuje s každým svým prvkem a také inversní prvek a^{-1}. Nechť $a \in A$ a nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\overline{G}$, který obsahuje inversní prvek a^{-1}. Protože $\underline{1} = aa^{-1} \in A\bar{b}$, jest prvek $\underline{1}$ obsažen v součinu $A\bar{b}$ a ovšem jest obsažen také v A. Protože rozklad $\bar{G}$ jest vytvořující a protože obě podmnožiny $A\bar{b}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, máme $A\bar{b} \subset A$. Odtud plyne $\underline{1} \,.\, a^{-1} \in A$, t. j. $a^{-1} \in A$ a tím jest zjištěno, že $\mathfrak{A}$ jest podgrupou v $\mathfrak{G}$. Zbývá ukázati, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$ a že každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ jest třída libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$. Nechť $a \in \mathfrak{G}$ a nechť nyní $\bar{a}$ značí onen prvek v $\bar{G}$, který obsahuje a, takže máme vztahy $a \in \bar{a} \in \bar{G}$. Když $x \in \bar{a}$, pak jest $x = \underline{1} \,.\, x \in A\bar{a}$ a odtud plyne $\bar{a} \subset A\bar{a}$; protože rozklad $\bar{G}$ jest vytvořující a obě podmnožiny $A\bar{a}, \bar{a}$ obsahují prvek a, platí vztah $A\bar{a} \subset \bar{a}$. Vychází tedy $A\bar{a} = \bar{a}$ a podobně obdržíme $\bar{a}A = \bar{a}$, takže platí rovnosti

$$\bar{a} = A\bar{a} = \bar{a}A. \tag{2}$$

Zřejmě jest $aA \subset \bar{a}A$. Ukažme, že současně platí $\bar{a}A \subset aA$. Nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\bar{G}$, který obsahuje prvek a^{-1}. Protože rozklad $\bar{G}$ jest vytvořující a protože obě podmnožiny $\bar{b}\bar{a}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, jest $\bar{b}\bar{a} \subset A$ a tedy součin $a^{-1}x$ prvku a^{-1} s libovolným prvkem $x \in \bar{a}$ jest obsažen v A. Tedy $x = a(a^{-1}x) \in aA$ a vidíme, že platí vztah $\bar{a} \subset aA$. Odtud plyne $\bar{a}A \subset$ $\subset aAA = aA$. Vychází tedy $\bar{a}A = aA$ a podobně se odvodí, že platí rovnost $A\bar{a} = Aa$. Odtud a z (2) vychází

$$\bar{a} = a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a.$$

Tyto rovnosti především ukazují, že podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$. Protože platí pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ a onen prvek $\bar{a} \in \bar{G}$, v němž prvek a jest obsažen, platí také pro libovolný prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ a libovolný prvek $a \in \bar{a}$ a tedy ukazují, že každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ jest třída libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$.

Tím jsme určili všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$:

Všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom rozklady grupy $\mathfrak{G}$ vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.

Uvažujme nyní o libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$! Podle definice faktoroidu, jest pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ jistý vytvořující rozklad grupy $\mathfrak{G}$ a jest tedy vytvořen, podle právě odvozeného výsledku, jistou podgrupou $\mathfrak{A}$, která jest invariantní v $\mathfrak{G}$. Podle definice násobení faktoroidu, jest součin $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A}$ libovolného prvku $a\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ s libovolným prvkem $b\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje množinu $a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A}$; protože tato množina splývá, jak jsme viděli, s prvkem $ab\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$, máme pro násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ tento vzorec: $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$.

Nyní ukážeme, že *faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ jest grupa, v níž jednotkou jest pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvek inversní vzhledem k libovolnému prvku $a\mathfrak{A}$ jest $a^{-1}\mathfrak{A}$.* Skutečně, především podle cvič. 4. v odst. 8. jest $\overline{\mathfrak{G}}$ grupoid asociativní. Dále, podle cvič. 5. v odst. 10., jest pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ jednotkou grupoidu $\overline{\mathfrak{G}}$. Konečně máme tyto rovnosti:

$$a\mathfrak{A}\cdot a^{-1}\mathfrak{A}; = aa^{-1}\mathfrak{A} = \underline{1}\mathfrak{A} = A,$$

a z nich vidíme, že $a^{-1}\mathfrak{A}$ jest inversní prvek vzhledem k prvku $a\mathfrak{A}$.

Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$ jest tedy grupou a jest jednoznačně určen jistou podgrupou $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$ a to tím způsobem, že pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ jest rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ nazýváme *grupa tříd* a pravíme, že jest *vytvořena* invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$; označujeme ji symbolem $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Našimi úvahami jsme dospěli k přehledu o všech možných faktoroidech na libovolné grupě $\mathfrak{G}$: *Všechny faktoroidy grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom grupy tříd na $\mathfrak{G}$ vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.*

Všimněme si nyní vlastností invariantních podgrup! V každé grupě $\mathfrak{G}$ existují alespoň dvě invariantní podgrupy a sice nejmenší podgrupa $\underline{\mathfrak{E}}$ a největší podgrupa $\mathfrak{G}$; grupa tříd $\mathfrak{G}/\underline{\mathfrak{E}}$ jest nejmenší faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ a grupa tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ jest největší faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$. Všimněme si, že v grupách mohou existovati podgrupy, které nejsou invariantní; na př. podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{S}_3$, skládající se z obou permutací $\underline{1}, \boldsymbol{f}$ (označení jako na str. 61.) není invariantní v $\mathfrak{S}_3$, neboť, jak jsme na str. 61. viděli, máme na př. $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, takže $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}\boldsymbol{a}$. Když jsou dány v nějaké grupě $\mathfrak{G}$ dvě podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}$ jest nadgrupa na $\mathfrak{A}$, takže $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ a když podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak jest tím spíše invariantní v $\mathfrak{B}$. Když ale naopak podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{B}$, pak nemusí nutně býti invariantní v $\mathfrak{G}$, neboť platí-li rovnost $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{B}$ nemusí platiti pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$. Když na př. nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ není invariantní v $\mathfrak{G}$, jest sice invariantní v $\mathfrak{A}$, ale není invariantní v $\mathfrak{G}$.

Když nějaká podgrupa $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak jest zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$, neboť pak máme $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$ pro každý prvek $x \in \mathfrak{C}$ a odtud vychází, že podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ jsou zaměnitelné. Když nějaké podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ jsou zaměnitelné, pak nemusí nutně některá z nich býti invariantní v $\mathfrak{G}$, jak jest tomu na př. v případě, když $\mathfrak{A}$ není v $\mathfrak{G}$ invariantní a $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$.

Nechť nyní $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ značí podgrupy v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a že jest zaměnitelná s $\mathfrak{C}$. Pak $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ jsou faktoroidy v $\mathfrak{G}$. Ze vzorců 1. a 2. na str. 62. vidíme, že faktoroid $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ leží na podgrupě $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a faktoroid $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ na podgrupě $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$; prvkem prvního faktoroidu obsahujícím jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ jest zřejmě pole podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvkem druhého faktoroidu obsahujícím $\underline{1}$ jest pole podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$. Odtud plyne, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupou v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupou v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, a máme vzorce

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Když podgrupa $\mathfrak{B}$ splývá s grupou $\mathfrak{G}$, pak podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$ a jest tedy zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$; kromě toho máme $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Když tedy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak podgrupa $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{C}$ a máme vzorce

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Tento odstavec ukončíme úvahou o zákrytu grupy tříd vynuceném opět nějakou grupou tříd. Nechť $\mathfrak{A}_1$ značí libovolnou invariantní podgrupu v grupě $\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{A}}_2$ libovolnou invariantní podgrupu v grupě tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$. Prvky podgrupy $\overline{\mathfrak{A}}_2$ jsou tedy třídy vzhledem k invariantní podgrupě $\mathfrak{A}_1$ a mezi těmito prvky jest pole A_1 invariantní podgrupy $\mathfrak{A}_1$, neboť A_1 jest, jak víme, jednotkou grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ a jest tedy prvkem každé podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$. Součet všech prvků podgrupy $\overline{\mathfrak{A}}_2$ jest tedy jistá nadmnožina A_2 na A_1 a tedy obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$: $\underline{1} \in A_1 \subset A_2$. Podgrupa $\overline{\mathfrak{A}}_2$ vytvořuje na $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ grupu tříd $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2$, a jak víme z odstavce o grupoidech, vynucuje tato grupa tříd jistý zákryt $\overline{\mathfrak{G}}_2$ grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$. Připomeňme si, že $\overline{\mathfrak{G}}_2$ jest faktoroid na grupě $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek jest součtem všech prvků grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$, které jsou obsaženy vždy v témže prvku grupy tříd $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)\overline{\mathfrak{A}}_2$. Zejména jest tedy množina A_2 prvkem faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_2$ a protože obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, plyne z hořejších výsledků, že A_2 jest polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}_2$ v $\mathfrak{G}$ a faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$ jest grupa tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_2$. $\mathfrak{A}_1$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{A}_2$, neboť má tuto vlastnost dokonce v $\mathfrak{G}$ a jest zřejmé, že platí rovnost $\overline{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$. Došli jsme k tomuto výsledku: *Zákryt grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ vynucený grupou tříd $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2$ jest grupa tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_2$, při čemž pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}_2$ v $\mathfrak{G}$ jest součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$, z nichž se skládá invariantní podgrupa $\overline{\mathfrak{A}}_2$ v $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$. $\overline{\mathfrak{A}}_2$ jest grupa tříd $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$.*

Cvičení. 1. V grupě $\mathfrak{S}_4$ skládající se ze všech permutací prvků a, b, c, d, tvoří všechny permutace, které zobrazují prvek d na sebe, podgrupu $\mathfrak{S}_3'$. Permutace, které zobrazují prvky a, b, c jako permutace $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ na str. 26. a prvek d nechávají beze změny, tvoří podgrupu v $\mathfrak{S}_4$, která jest invariantní v $\mathfrak{S}_3'$ ale není invariantní v $\mathfrak{S}_4$.

2. Průnik a součin každých dvou invariantních podgrup v $\mathfrak{G}$ jest opět invariantní v $\mathfrak{G}$.

3. Nechť $\mathfrak{A}$ jest libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Množina všech prvků $a \in \mathfrak{G}$ takových, že $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, tvoří nadgrupu $\mathfrak{N}$ na $\mathfrak{A}$, t. zv. *normalisátor* podgrupy $\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{N}$ a každá podgrupa v $\mathfrak{G}$, v níž jest $\mathfrak{A}$ invariantní, jest podgrupou v $\mathfrak{N}$.

4. Centrum grupy $\mathfrak{G}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$.

5. Řád grupy tříd na libovolné konečné grupě řádu N jest dělitelem čísla N.

6. Když v nějaké konečné grupě řádu N ($\geqq 2$) existuje podgrupa řádu $\frac{1}{2}N$, pak tato podgrupa jest v ní invariantní. Na př. v diedrické grupě řádu $2\,n$ ($n \geqq 3$) máme invariantní podgrupu řádu n, která se skládá ze všech prvků grupy odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu (v. cvič. 2. v odst. 11.).

7. V úplné grupě euklidovských pohybů na přímce nebo v rovině jest ona podgrupa, která se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ invariantní (v. cvič. 1. v odst. 11.). Příslušná grupa tříd má právě dva prvky; jeden se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, druhý pak z $\boldsymbol{g}[a]$ nebo $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$.

14. Deformace a věty o isomorfismu grup.

Deformace grup. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Když jeden z grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ jest grupa, co se dá říci o druhém?

Když $\mathfrak{G}$ jest grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ jest grupa. Mimoto obraz v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}$ jest jednotka grupy $\mathfrak{G}^*$ a obraz prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a. Abychom tato tvrzení dokázali, uvažme, že podle cvič. 2. v odst. 7. jest grupoid $\mathfrak{G}^*$ asociativní. Nechť $\underline{1}^*$ značí obraz jednotky $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$, takže $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\underline{1}$. Podle cvič. 4. v odst. 10. jest $\underline{1}^*$ jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Nechť dále a^* značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ jest zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$, existuje alespoň jeden prvek $a \in \mathfrak{G}$ takový, že $a^* = \boldsymbol{d}a$. Z rovnosti $aa^{-1} = \underline{1}$ plyne $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$ a podobně z rovnosti $a^{-1}a = \underline{1}$ rovnost $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $\boldsymbol{d}a^{-1} \,.\, a^* = \underline{1}^*$ a odtud vychází, že prvek $\boldsymbol{d}a^{-1}$ jest inversní vzhledem k a^*, takže $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Dále vidíme, že obraz v $\boldsymbol{d}$ prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a a tím jsou naše tvrzení dokázána. Stručně můžeme říci, že každá deformace zobrazuje grupu opět na grupu a zachovává v obou grupách jednotky a inversní prvky.

Z tohoto výsledku zejména vychází, že *jsou-li nějaké dva grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní a jeden z nich jest grupa, pak také druhý jest grupa.* Neboť jsou-li $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní, pak existuje isomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a současně existuje isomorfismus (inversní) grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$. Tedy jest každý z obou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ obrazem druhého v jistém isomorfismu a tedy, je-li jeden z nich grupa, pak také druhý jest grupa, jakožto isomorfní obraz grupy. Každý isomorfismus zachovává ovšem v obou grupách, jako každá deformace, jednotky a inversní prvky; dále zachovává podgrupy a jak se snadno přesvědčíme, i invariantní podgrupy.

O grupoidu $\mathfrak{G}$ nečiňme nyní dalších předpokladů, ale o grupoidu $\mathfrak{G}^*$