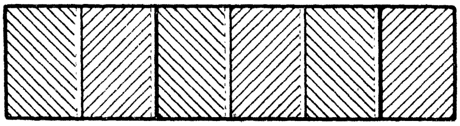
Úvod do teorie grup

10. O význačných druzích grupoidů

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 45--50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401369

pole zákrytu $\overline{\mathfrak{G}}_2$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ vynuceného faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech těchto obdélníků. Podle hořejšího výsledku jest zobrazení každého prvku $\bar{\bar{a}}_1$ faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_2$, který jest součtem prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ležících v $\bar{\bar{a}}_1$, isomorfismus faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$.



Obr. 9.

Cvičení. 1. Ujasněte si věty o isomorfismu grupoidů na příkladě grupoidů $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_m$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$, o nichž byla řeč v odst. 8.!

2. Každé dva faktoroidy v libovolném grupoidu $\mathfrak{G}$, takové, že každý prvek jednoho jest incidentní právě jenom s jedním prvkem druhého, jsou isomorfní, při čemž isomorfismus jest dán incidencí prvků.

10. O význačných druzích grupoidů.

Ačkoli některé význačné druhy grupoidů, o kterých pojednáme, jsou charakterisovány zvláštními vlastnostmi násobení a výklad o nich se přimyká k odst. 5., přistoupíme k němu teprve nyní, abychom zdůraznili, že předcházející úvahy platí pro všechny grupoidy bez ohledu na nějaké jejich zvláštní vlastnosti. Pro naše další úvahy jsou důležité zejména grupoidy asociativní a dále t. zv. grupoidy s jednoznačným dělením a grupoidy s jednotkou.

Asociativní grupoidy. Pojem asociativního grupoidu $\mathfrak{G}$ jsme již vymezili v odst. 6., a sice vlastností, že každá uspořádaná trojice prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součin, t. j. že pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$. Asociativní grupoidy se nazývají také *pologrupy*. Nyní ukážeme, že *každý asociativní grupoid $\mathfrak{G}$ se vyznačuje tím, že každá uspořádaná skupina několika prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součin*, t. j. pro $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ $(n \geq 2)$ značí symbol $a_1 \ldots a_n$ právě jeden prvek v $\mathfrak{G}$. Za tím účelem uvažujme o libovolném asociativním grupoidu $\mathfrak{G}$. K důkazu použijeme metody úplné indukce. Naše tvrzení jest správné když $n = 2$, neboť v tom případě plyne bezprostředně z definice násobení v $\mathfrak{G}$. Zbývá tedy ukázati, že platí-li naše tvrzení o každé uspořádané skupině nejvýše $n - 1$ prvků v $\mathfrak{G}$, kde n značí některé přirozené číslo >2, pak platí také o každé uspořádané skupině n prvků v $\mathfrak{G}$. Nechť tedy $a_1, \ldots, a_n$ značí libovolné prvky grupoidu $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že každá uspořádaná skupina nejvýše $n - 1$ prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součin. Pak každý symbol

$$a_1,\ a_2 \ldots a_n,\ a_1a_2,\ a_3 \ldots a_n,\ \ldots,\ a_1 \ldots a_{n-1},\ a_n$$

značí zcela určitý prvek grupoidu $\mathfrak{G}$, neboť podle našeho předpokladu jest na př. jenom jeden součin $a_2 \dots a_n$ uspořádané skupiny $n - 1$ prvků $a_2, \dots, a_n \in \mathfrak{G}$. Máme ukázati, že všechny prvky

$$a_1(a_2 \dots a_n),\ (a_1a_2)(a_3 \dots a_n),\ \dots,\ (a_1 \dots a_{n-1})a_n \tag{1}$$

jsou identické. Za tím účelem si všimněme, že každý z těchto prvků jest součinem $(a_1 \dots a_k) \,.\, (a_{k+1} \dots a_n)$ uspořádané dvojice prvků $a_1 \dots a_k$, $a_{k+1} \dots a_n \in \mathfrak{G}$, při čemž k značí některé číslo $1, \dots, n - 1$. Důkaz bude proveden když zjistíme, že každý prvek (1) jest identický na př. s prvním z nich, t. j. že při každém $k = 1, \dots, n - 1$ platí rovnost

$$(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) = a_1(a_2 \dots a_n). \tag{2}$$

Když $k = 1$ jest tato rovnost samozřejmá a proto se můžeme omeziti na případ $k > 1$. V tomto případě jest $a_1 \dots a_k$ součin uspořádané skupiny alespoň dvou a nejvýše $n - 1$ prvků $a_1, \dots, a_k$ a jest tedy podle našeho předpokladu identický s prvkem $a_1(a_2 \dots a_k)$, takže vychází rovnost $(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) = (a_1(a_2 \dots a_k))(a_{k+1} \dots a_n)$. Protože grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní, jest prvek na pravé straně této rovnosti identický s prvkem $a_1((a_2 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n))$, t. j. s prvkem $a_1(a_2 \dots a_n)$ a vychází (2). Podobný výsledek platí ovšem o uspořádaných skupinách podmnožin v $\mathfrak{G}$.

Výsledek, který jsme právě dokázali, má důležité použití při skládání několika permutací nějaké (konečné anebo nekonečné) množiny prvků. Nechť $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$ značí libovolné permutace nějaké množiny H. Co rozumíme permutací složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ (v tomto pořádku)? V případě $n = 2$ jest to, jak víme, složené zobrazení $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$. V případě $n = 3$ definujeme pojem složené permutace z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ takto: Permutací složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ rozumíme kteroukoli z permutací $\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ a označujeme ji symbolem $\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$; symbol $\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$ má tedy význam jednak permutace složené z permutací $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3$ a jednak permutace složené z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2$. V případě $n = 4$ definujeme permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ takto: Jest to kterákoli z permutací $\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ a označuje se symbolem $\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$; symbol $\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$ má tedy význam kterékoli z těchto permutací množiny H: $\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1))$, $\boldsymbol{p}_4((\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2))\boldsymbol{p}_1$, $((\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$. Obecně, pro $n \geqq 2$, definujeme permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ takto: Jest to kterákoli z permutací

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{p}_{n-1} \cdots \boldsymbol{p}_1),\ (\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{p}_{n-1})(\boldsymbol{p}_{n-2} \cdots \boldsymbol{p}_1),\ \dots,\ (\boldsymbol{p}_n \cdots \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1,$$

při čemž symbol v každé závorce značí libovolnou permutaci složenou z permutací v něm vyznačených a to v pořádku od pravého konce symbolu k levému. Permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ označujeme symbolem $\boldsymbol{p}_n \dots \boldsymbol{p}_1$. Podle této definice má tedy symbol $\boldsymbol{p}_n \dots \boldsymbol{p}_1$ význam součinu uspořádané skupiny n prvků $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ grupoidu, jehož pole se skládá ze všech permutací množiny H a násobení jest definováno skládáním permutací. Protože o skládání permutací platí asociativní zákon (v. str. 23.), jest tento grupoid asociativní a z hořejšího výsledku plyne, že *jest jenom jedna permutace* $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$ *složená z permutací* $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Tuto větu vyjadřujeme také výrokem, že při stejném pořádku permutací nezávisí složená permutace na způsobu složení. Podle tohoto výsledku obdržíme tedy obraz $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1 x$ libovolného prvku $x \in H$ na př. podle vzorce

$$\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1 x = \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{p}_{n-1}(\ldots(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x))\ldots)),$$

t. j. tím způsobem, že určíme nejprve obraz $\boldsymbol{p}_1 x$ prvku x v permutaci $\boldsymbol{p}_1$, pak obraz $\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x)$ prvku $\boldsymbol{p}_1 x$ v permutaci $\boldsymbol{p}_2$, atd. a konečně obraz $\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{p}_{n-1}(\ldots(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x))\ldots))$ prvku $\boldsymbol{p}_{n-1}(\ldots(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_1 x))\ldots)$ v permutaci $\boldsymbol{p}_n$. Odtud jest také bezprostředně patrno, že když permutace $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ nechávají některý prvek $x \in H$ beze změny, pak totéž platí o složené permutaci $\boldsymbol{p}_n \ldots \boldsymbol{p}_1$.

Použijeme těchto výsledků k několika poznámkám o permutacích konečné množiny. Předpokládejme, že se množina H skládá z konečného počtu (≥ 1) prvků. Především ukážeme, že *libovolná permutace množiny H jest složena z konečného počtu cyklických permutací, jejichž cykly nemají společných prvků.* Za tím účelem uvažujme o libovolné permutaci $\boldsymbol{p}$ množiny H! Jak jsme vyložili v odst. 4., jest permutace $\boldsymbol{p}$ vytvořena konečným počtem ryzích cyklických permutací $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$, t. j. existuje rozklad $\bar{H} = \{\bar{a}, \ldots, \bar{m}\}$ množiny H takový, že každý jeho prvek $\bar{a}, \ldots, \bar{m}$ jest v permutaci $\boldsymbol{p}$ invariantní a částečné permutace $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ jsou ryzí cyklické permutace prvků $\bar{a}, \ldots, \bar{m}$. Nechť $\bar{x}$ značí libovolný prvek v $\bar{H}$ a $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ cyklickou permutaci množiny H, která jest definována tím, že zobrazuje každý prvek $x \in \bar{x}$ na prvek $\boldsymbol{p}_{\bar{x}} x$ a všechny ostatní prvky množiny H, jsou-li jaké, nechává beze změny. Podle této definice má tedy cyklická permutace $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ týž cyklus jako ryzí cyklická permutace $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ a tedy můžeme obě permutace $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}, \boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ vyjádřiti týmže zjednodušeným symbolem. Naše tvrzení bude dokázáno, zjistíme-li, že permutace $\boldsymbol{p}$ jest složena z cyklických permutací $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$, t. j. že $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}$. Nechť x značí libovolný prvek v H a $\bar{x}$ onen prvek rozkladu $\bar{H}$, který jej obsahuje, takže permutace $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ zobrazuje prvek x na prvek $\boldsymbol{p}_{\bar{x}} x$, ale všechny ostatní permutace $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$, jsou-li jaké, nechávají prvek x beze změny. Protože při stejném pořádku permutací složená permutace nezávisí na způsobu složení, máme $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}} x = (\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots) \boldsymbol{q}_{\bar{x}}(\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}) x$, při čemž ovšem v případě $\bar{x} = \bar{m}$ vypustíme na pravé straně symbol složené permutace v první závorce a v případě $\bar{x} = \bar{a}$ symbol v druhé. Když $\bar{x} \neq \bar{a}$, máme $(\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}) x = x$, neboť všechny permutace z nichž $\ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}$ jest složena, nechávají prvek x beze změny. Máme tedy především $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}} x = (\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots) \boldsymbol{q}_{\bar{x}} x$. Podobně zjistíme, že prvek na pravé straně této rovnosti jest $\boldsymbol{q}_{\bar{x}} x$, takže vychází $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \ldots \boldsymbol{q}_{\bar{a}} x = \boldsymbol{q}_{\bar{x}} x$. Podle definice permutace $\boldsymbol{q}_{\bar{x}}$ jest $\boldsymbol{q}_{\bar{x}} x = \boldsymbol{p}_{\bar{x}} x$

a dále, podle definice permutace $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$, $\boldsymbol{p}_{\bar{x}} x = \boldsymbol{p} x$. Tím jsme došli k rovnosti $\boldsymbol{q}_{\bar{m}} \dots \boldsymbol{q}_{\bar{a}} x = \boldsymbol{p} x$ a důkaz jest proveden. Všimněme si, že ve vzorci $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_{\bar{m}} \dots \boldsymbol{q}_{\bar{a}}$ můžeme pořádek permutací $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \dots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$ libovolně změniti, neboť při každém uspořádání permutací $\boldsymbol{q}_{\bar{a}}, \dots, \boldsymbol{q}_{\bar{m}}$ můžeme zvoliti takové označení prvků rozkladu $\overline{H}$, že tento vzorec zůstane beze změny.

Když máme nějaké permutace množiny H, $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ ($n \geqq 2$), vyjádřeny dvouřádkovými anebo zjednodušenými symboly, vyjadřujeme složenou permutaci $\boldsymbol{p}_n \dots \boldsymbol{p}_1$ tím, že symboly permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ napíšeme vedle sebe v opačném pořádku vzhledem k tomuto. Podle této úmluvy a podle způsobu vyjádření libovolné permutace ryzími cyklickými permutacemi (v. str. 22.), můžeme chápati na př. vzorec $\begin{pmatrix} a\, b\, c\, d \\ d\, c\, b\, a \end{pmatrix} = (a, d)(b, c)$ v tom smyslu, že permutace množiny $\{a, b, c, d\}$, vyjádřená symbolem na levé straně, jest složena z cyklických permutací (b, c), (a, d), anebo v tom smyslu, že jest vytvořena ryzími cyklickými permutacemi (a, d), (b, c).

Grupoidy s jednoznačným dělením. Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ se vyznačuje tím, že ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{G}$ existují prvky x, $y \in \mathfrak{G}$ splňující rovnosti

$$ax = b, \quad ya = b,$$

nazývá se $\mathfrak{G}$ grupoid *s dělením*; když existuje jediný prvek $x \in \mathfrak{G}$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{G}$ s touto vlastností, nazývá se $\mathfrak{G}$ grupoid *s jednoznačným dělením*. V literatuře se pro grupoid s jednoznačným dělením vyskytuje také název *kvasigrupa*. Na př. grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ ($n \geqq 1$) jsou kvasigrupy: Ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{Z}$ existuje jediný prvek $x \in \mathfrak{Z}$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{Z}$ takový, že $a + x = b$, $y + a = b$ a sice $x = -a + b$, $y = b - a$; podobně existuje ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{Z}_n$ jediný prvek $x \in \mathfrak{Z}_n$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{Z}_n$ takový, že zbytek dělení čísla $a + x$ číslem n jest b a zbytek dělení čísla $y + a$ číslem n jest b a sice $x = y = -a + b$ ($= n - a + b$) když $-a + b \geqq 0$ ($-a + b < 0$); ke každým dvěma permutacím $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ existuje jediná permutace $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{S}_n$ a jediná permutace $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{S}_n$ taková, že $\boldsymbol{p} \,.\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ a sice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$, při čemž $\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$ značí permutaci složenou z permutace inversní $\boldsymbol{p}^{-1}$ vzhledem k $\boldsymbol{p}$ a z $\boldsymbol{q}$ a podobně $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$. Všimněme si, že pro každý grupoid s jednoznačným dělením $\mathfrak{G}$ platí t. zv. *pravidla o krácení*: Když pro některé prvky $a, x, y \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $ax = ay$ anebo $xa = ya$, pak $x = y$. Multiplikační tabulka každého konečného grupoidu s jednoznačným dělením $\mathfrak{G}$ má tuto charakteristickou vlastnost: V každém řádku a v každém sloupci vyskytnou se napravo od svislého a pod vodorovným záhlavím symboly *všech* prvků grupoidu $\mathfrak{G}$. Neboť jestliže se na př. v některém řádku $[a]$ (t. j. napravo od písmena a ve svislém záhlaví) nevyskytnou symboly všech prvků grupoidu $\mathfrak{G}$, pak se v řádku $[a]$ a v některých dvou různých sloupcích $[x_1]$, $[x_2]$ (t. j. pod symboly x_1, x_2 ve vodorovném záhlaví) vyskytne symbol téhož prvku b a to znamená, že platí rovnosti $ax_1 = ax_2 = b$, které odporují pravidlům o krácení. Jestliže se naopak v každém řádku $[a]$ vyskytne symbol b každého prvku grupoidu $\mathfrak{G}$ v některém sloupci $[x]$ a současně se v každém sloupci $[a]$ vyskytne b v některém řádku $[y]$, pak mají rovnice $ax = b$, $ya = b$ jediné řešení $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{G}$ a tedy $\mathfrak{G}$ jest grupoid s jednoznačným dělením. Všimněme si, že když v nějakém *konečném* grupoidu $\mathfrak{G}$ platí pravidla o krácení, pak jest $\mathfrak{G}$ grupoid s jednoznačným dělením.

Grupoidy s jednotkou. Když některý prvek, označme jej $\underline{1}$, v nějakém grupoidu $\mathfrak{G}$, se vyznačuje tím, že součin prvku $\underline{1}$ s libovolným prvkem $a \in \mathfrak{G}$ jest prvek a a podobně součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s prvkem $\underline{1}$ jest rovněž prvek a, pak se prvek $\underline{1}$ nazývá *jednotkový* anebo *jednotka* grupoidu $\mathfrak{G}$. Jednotka $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ jest tedy charakterisována rovnostmi $\underline{1}a = a\underline{1} = a$, které platí pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$. Snadno ukážeme, že *každý grupoid může míti nejvýše jednu jednotku.* Značí-li totiž $\underline{1}$, x jednotky libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$, pak jest jednak $\underline{1}x = x$ (neboť $\underline{1}a = a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$) a jednak $\underline{1}x = \underline{1}$ (neboť $ax = a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$). Odtud plyne $\underline{1} = x$. Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ má jednotku, pak jej nazýváme *grupoid s jednotkou.* Všimněme si, že multiplikační tabulka libovolného konečného grupoidu s jednotkou má tuto charakteristickou vlastnost: Onen řádek, na jehož začátku, ve svislém záhlaví tabulky, jest vyznačena jednotka, obsahuje na dalších místech tytéž symboly a ve stejném pořádku jako vodorovné záhlaví tabulky; podobně onen sloupec, na jehož začátku, ve vodorovném záhlaví, jest vyznačena jednotka, obsahuje na dalších místech tytéž symboly a ve stejném pořádku, jako svislé záhlaví. Příklady grupoidů s jednotkou jsou grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$. Jednotkou grupoidu $\mathfrak{Z}$ jest 0, neboť pro každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ platí rovnosti $0 + a = a + 0 = a$; rovněž jednotkou grupoidu $\mathfrak{Z}_n$ jest 0, neboť pro každý prvek $a \in \mathfrak{Z}_n$ dají čísla $0 + a$, $a + 0$ dělením číslem n zbytek a; jednotkou grupoidu $\mathfrak{S}_n$ jest identická permutace $\boldsymbol{e}$ množiny H, neboť pro každý prvek $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{S}_n$ máme $\boldsymbol{pe} = \boldsymbol{ep} = \boldsymbol{p}$. Naproti tomu na př. grupoid popsaný ve cvič. 3. v odst. 8. nemá jednotku.

Některé grupoidy mohou míti dvě anebo i všechny tři hořejší vlastnosti současně. Podle toho mluvíme pak o asociativních grupoidech s jednotkou anebo o pologrupách s jednotkou, o kvasigrupách s jednotkou a o asociativních kvasigrupách. Snadno ukážeme, že když *nějaký grupoid jest asociativní kvasigrupa, pak nutně má jednotku*, t. j. když má obě první vlastnosti, pak má nutně i třetí. Vskutku, nechť $\mathfrak{G}$ značí nějakou asociativní kvasigrupu. Zvolme v $\mathfrak{G}$ libovolný prvek a. Protože $\mathfrak{G}$ jest kvasigrupa, existuje prvek $e_p \in \mathfrak{G}$, takový, že $ae_p = a$. O prvku e_p ukážeme, že jest jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}$. Nechť b značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Protože $\mathfrak{G}$ jest kvasigrupa, existuje prvek $y \in \mathfrak{G}$ takový, že $ya = b$ a protože jest asociativní, platí rovnosti $be_p = (ya)e_p = y(ae_p) = ya = b$. Vychází tedy $be_p = b$. Podobně zjistíme, že pro prvek $e_l \in \mathfrak{G}$ definovaný rovností $e_l a = a$ platí $e_l b = b$. Poněvadž jednak $e_l e_p = e_l$ (neboť $be_p = b$ pro každý prvek $b \in \mathfrak{G}$) a jednak $e_l e_p = e_p$ (neboť $e_l b = b$ pro každý prvek $b \in \mathfrak{G}$), vidíme, že $e_l = e_p$ a že prvek e_p skutečně má charakteristické vlastnosti jednotky grupoidu $\mathfrak{G}$. Všimněme si, že jsme při tomto důkazu nepoužili předpokladu, že dělení v $\mathfrak{G}$ jest jednoznačné. Asociativní kvasigrupy se obvykle nazývají *grupy*. Naši větu můžeme tedy vyjádřiti tím, že každá grupa má jednotku. Na př. $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ jsou grupy; poznamenejme, že grupa $\mathfrak{S}_n$ se nazývá *symetrická permutační grupa stupně n*. Všechny zmíněné druhy grupoidů mohou míti ovšem ještě další vlastnosti, na př. mohou býti abelovské a v tom případě mluvíme na př. o abelovských asociativních grupoidech s jednotkou, atp.

Cvičení. 1. Když nějaká permutace $\boldsymbol{p}$ nějaké množiny jest složena z permutací $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$, pak inversní permutace $\boldsymbol{p}^{-1}$ jest složena z permutací $\boldsymbol{p}_n^{-1}, \ldots, \boldsymbol{p}_1^{-1}$.

2. Každá cyklická permutace nějaké konečné množiny, jejíž cyklus jest alespoň dvojčlenný, dá se složiti z několika transposic a to podle vzorce: $(a, b, c, \ldots, k, l, m) = (a, b)(b, c) \ldots (k, l)(l, m)$.

3. Označme (k vůli přehlednosti dolejšího vzorce) prvky nějaké množiny H řádu n $(\geqq 2)$ číslicemi $1, \ldots, n$. Každá transposice $(i, i + j)$ množiny H se dá složiti z několika transposic $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n)$ a to podle vzorce: $(i, i + j) = (i + j - 1, \; i + j) \ldots (i + 1, i + 2)$ $(i, i + 1)(i + 1, i + 2) \ldots (i + j - 1, i + j)$. Každá permutace množiny H se dá složiti z několika transposic $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n)$.

4. Když grupoid $\mathfrak{G}$ má jednotku, pak její obraz v každé deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jest jednotkou obrazu $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$.

5. Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na libovolném grupoidu s jednotkou $\mathfrak{G}$ má jednotku, a sice jest onen prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje jednotku grupoidu $\mathfrak{G}$, jednotkou faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$.

6. Uveďte příklady grupoidů, které jsou jenom 1. asociativní 2. s jednoznačným dělením 3. s jednotkou a příklady grupoidů, které mají právě jenom vlastnosti 1., 3. a vlastnosti 2., 3.!

7. Každý konečný asociativní grupoid jest grupa, když pro něj platí pravidla o krácení.

8. Součin několika prvků $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ v libovolné pologrupě nezávisí na jejich uspořádání, když každé dva z prvků $a_1, \ldots, a_n$ jsou zaměnitelné. V libovolné abelovské pologrupě nezávisí součin libovolné skupiny prvků na jejich uspořádání.