6. Základní pojmy o grupoidech.

Libovolná neprázdná množina G spolu s nějakým násobením $\boldsymbol{M}$ v G nazývá se *grupoid*. G se nazývá *pole* a $\boldsymbol{M}$ *násobení* grupoidu. Grupoidy budeme označovati velkými německými písmeny a sice zpravidla stejnými jako jejich pole. Na př. označujeme grupoid, jehož pole jsme označili G, písmenem $\mathfrak{G}$ a když jsme nějaký grupoid označili $\mathfrak{G}$, pak písmeno G značí zpravidla jeho pole. Na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole. Tak na př. mluvíme o prvcích grupoidu místo o prvcích pole grupoidu a píšeme $a \in \mathfrak{G}$ místo $a \in G$ a podobně mluvíme o podmnožinách v grupoidu a píšeme na př. $A \subset \mathfrak{G}$ anebo $\mathfrak{G} \supset A$, o rozkladech v grupoidu a na grupoidu, o řádu grupoidu, o zobrazení grupoidu do nějaké množiny a do nějakého grupoidu, atd.; když G jest abstraktní množina, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ *abstraktní*. Rovněž pojmy a symboly, které jsme definovali pro násobení, přenášíme na grupoidy. Tedy zejména má každá uspořádaná dvojice prvků $a, b \in \mathfrak{G}$ jistý součin $a.b$, stručněji ab a když pro $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $ab = ba$, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ *abelovský* nebo *komutativní*. Také můžeme ke každému konečnému grupoidu $\mathfrak{G}$ přiřaditi multiplikační tabulku, v níž jest popsáno násobení v $\mathfrak{G}$. V předcházejícím odstavci jsme uvedli několik příkladů násobení a každý z nich jest současně příkladem grupoidu. V dalším výkladu častěji poukážeme zejména na tyto tři grupoidy, které budeme označovati $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$: $\mathfrak{Z}$ se skládá z množiny Z všech celých čísel a násobení jest definováno sečítáním čísel (v. př. [1] na str. 24.); $\mathfrak{Z}_n$ se skládá z množiny $Z_n = \{0, \ldots, n - 1\}$, při čemž n značí libovolné přirozené číslo, a násobení jest definováno sečítáním vzhledem k modulu n (v. př. [2] na str. 24.); $\mathfrak{S}_n$ se skládá z množiny S_n všech permutací nějaké konečné množiny H řádu n (≥ 1) a násobení jest definováno skládáním permutací (v. př. [3] na str. 25.). Poznamenejme, že každý grupoid, jehož prvky jsou permutace nějaké (konečné anebo nekonečné) množiny a násobení jest definováno skládáním permutací, nazývá se *permutační*; na př. grupoid $\mathfrak{S}_n$ jest permutační.

Nechť $\mathfrak{G}$ značí (všude v této knížce) nějaký grupoid. Nechť A, B značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$. Podmnožina v $\mathfrak{G}$ skládající se ze součinů ab každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$ nazývá ***součin*** podmnožiny A s podmnožinou B a označuje se symbolem $A.B$, kratčeji AB. Když některá z podmnožin A, B jest prázdná, rozumíme symboly $A.B$, AB prázdnou množinu. Pro $a \in \mathfrak{G}$ píšeme zpravidla místo $\{a\}A$ stručněji aA a podobně místo $A\{a\}$ Aa, takže na př. aA značí množinu součinů prvku a s každým prvkem v A; místo AA píšeme někdy stručněji A^2. Platí-li rovnost $AB = BA$, nazývají se podmnožiny A, B *zaměnitelné* anebo *vzájemně komutativní*; tento případ se vyznačuje tím, že součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$ jest součinem některého prvku $b' \in B$ s některým prvkem $a' \in A$ a současně součin každého prvku $b \in B$ s každým prvkem $a \in A$ jest součinem některého prvku $a' \in A$ s některým prvkem $b' \in B$. Když grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský, pak ovšem každé dvě podmnožiny v $\mathfrak{G}$ jsou zaměnitelné. V opačném případě platí pro některé prvky $a, b \in \mathfrak{G}$: $ab \neq ba$ a odtud plyne, že každé dvě podmnožiny $A, B \subset \mathfrak{G}$ nemusí býti zaměnitelné, jak jest tomu na př. v případě $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Na př. součin AB podmnožiny $A = \{1\}$ s podmnožinou $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ v grupoidu $\mathfrak{Z}$ jest $\{\ldots, -1, 1, 3, \ldots\}$ a zřejmě jest roven součinu BA; když $A = \{0, 1\}$, $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$, máme $AB = BA = Z$. Všimněme si, že pro každý grupoid $\mathfrak{G}$ platí vztah $GG \subset \mathfrak{G}$.

Nechť A značí nějakou neprázdnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$. Když $AA \subset A$, t. j. když součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in A$ jest opět prvek v A, pak pravíme, že A jest *grupoidní* podmnožina v $\mathfrak{G}$. V tomto případě určuje násobení $\boldsymbol{M}$ v $\mathfrak{G}$ jisté t. zv. *částečné násobení* v A, $\boldsymbol{M}_A$, které jest definováno takto: $\boldsymbol{M}_A$ přiřazuje ke každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in A$ týž prvek $ab \in A$ jako násobení $\boldsymbol{M}$. Množina A spolu s částečným násobením $\boldsymbol{M}_A$ jest jistý grupoid $\mathfrak{A}$; pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *podgrupoid* v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ jest *nadgrupoid* na $\mathfrak{A}$ a píšeme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ anebo $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Když pak A jest vlastní podmnožina v $\mathfrak{G}$, pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *vlastní* podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ jest vlastní nadgrupoid na $\mathfrak{A}$. Když dokonce platí vztah $GA \subset A$ (anebo $AG \subset A$, anebo současně $GA \subset A \supset AG$), nazývá se $\mathfrak{A}$ *levý* (anebo *pravý*, anebo *oboustranný*) *ideál* v $\mathfrak{G}$. Případ $A \neq G$ charakterisujeme opět přívlastkem *vlastní*. Na př. podmnožina všech celých násobků některého přirozeného čísla m v grupoidu $\mathfrak{Z}$ jest grupoidní, neboť součin (t. j. součet v obvyklém smyslu) každých dvou celých násobků čísla m jest opět celý násobek čísla m; tato podmnožina spolu se sečítáním v obvyklém smyslu jest tedy podgrupoid v $\mathfrak{Z}$ a to v případě $m > 1$ zřejmě vlastní podgrupoid v $\mathfrak{Z}$. Jiný příklad jest tento: Podmnožina všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$, jest grupoidní, neboť když některé dvě permutace $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ nechávají prvek a beze změny, pak zřejmě platí totéž o jejich součinu $\boldsymbol{p} . \boldsymbol{q}$ (t. j. o složené permutaci $\boldsymbol{qp}$); tato podmnožina spolu se skládáním permutací v obvyklém smyslu jest tedy podgrupoid v $\mathfrak{S}_n$.

V souhlase s tím, že na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole, mluvíme někdy na př. o průniku nějaké podmnožiny $B \subset \mathfrak{G}$ a podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ve smyslu průniku podmnožiny B a pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$; v podobném smyslu mluvíme o součinu podmnožiny B s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, o součinu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ s podmnožinou B, dále o obalu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v nějakém rozkladu $\overline{A}$, o průseku rozkladu $\bar{A}$ s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, atp., a užíváme označení na př. $B \cap \mathfrak{A}$ anebo $\mathfrak{A} \cap B$, $B\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{A} \sqsubset \bar{A}$ anebo $\bar{A} \sqsupset \mathfrak{A}$, $\bar{A} \sqcap \mathfrak{A}$ anebo $\mathfrak{A} \sqcap \bar{A}$, atp.

Uvažujme nyní o nějakých dvou podgrupoidech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $A \cap B$ jejich polí A, B není prázdný. Pro libovolné prvky a, $b \in A \cap B$ platí jednak vztahy $ab \subset AA \subset A$ a jednak $ab \in \in BB \subset B$, takže $ab \in A \cap B$ a odtud vychází, že $A \cap B$ jest grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik* podgrupoidů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Pamatujme si, že pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ jest definován jenom v případě, že pole obou podgrupoidů mají společné prvky. Na př. existuje průnik podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}_n$, při čemž pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$ se skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$ a pole B podgrupoidu $\mathfrak{B}$ se skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $b \in H$, neboť obě množiny A, B mají společný alespoň jeden prvek a to identickou permutaci množiny H, která nechává beze změny všechny prvky množiny H. Pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ se dá snadno rozšířiti na pojem průniku systému podgrupoidů v $\mathfrak{G}$: Máme-li nějaký systém podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$ a průnik $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$ jejich polí není prázdný, pak tento průnik, jak se snadno zjistí, jest grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ a příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik* systému podgrupoidů $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots\}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{a}_1 \cap \bar{\mathfrak{a}}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{\mathfrak{a}}$, anebo podobně.

Tento odstavec ukončíme vymezením některých pojmů týkajících se součinu uspořádané skupiny prvků anebo množin. Uvažujme o několika prvcích $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, při čemž $n \geqq 2$. Co rozumíme součinem uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$? Součin uspořádané dvojice ($n = 2$) prvků a_1, a_2 máme již definován a víme, že jej označujeme $a_1 . a_2$, kratčeji $a_1 a_2$. V případě $n = 3$ definujeme součin uspořádané trojice prvků a_1, a_2, a_3 takto: Jest to kterýkoli z obou prvků $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$ a označujeme jej symbolem $a_1 . a_2 . a_3$, kratčeji $a_1a_2a_3$; tento symbol má tedy význam jednak součinu prvku a_1 s prvkem a_2a_3 a jednak součinu prvku a_1a_2 s prvkem a_3. V případě $n = 4$ definujeme součin uspořádané skupiny prvků a_1, a_2, a_3, a_4 takto: Jest to kterýkoli z prvků $a_1(a_2a_3a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1a_2a_3)a_4$ a označujeme jej symbolem $a_1 . a_2 . a_3 . a_4$, kratčeji $a_1a_2a_3a_4$; tento symbol má tedy význam kteréhokoli z prvků

$$a_1(a_2(a_3a_4)), \quad a_1((a_2a_3)a_4), \quad (a_1a_2)(a_3a_4), \quad (a_1(a_2a_3))a_4, \quad ((a_1a_2)a_3)a_4.$$

Tyto zvláštní případy postačí, abychom pochopili tuto definici: Součinem uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$ rozumíme libovolný prvek množiny $\{a_1 \ldots a_n\}$ takto definované: Pro $n = 2$ skládá se množina $\{a_1a_2\}$ z jediného prvku a_1a_2; pro $n > 2$ jest

$$\{a_1 \ldots a_n\} = \{a_1\}\{a_2 \ldots a_n\} \vee \{a_1a_2\}\{a_3 \ldots a_n\} \vee \ldots \vee \{a_1 \ldots a_{n-1}\}\{a_n\}.$$

Součin uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$ označujeme symbolem $a_1 . a_2 . \ldots . a_n$, kratčeji $a_1 \ldots a_n$. Zřejmě jest takových součinů jenom konečný počet a symbol $a_1 \ldots a_n$ značí kterýkoli z těchto prvků. Zejména má každá uspořádaná trojice prvků $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ nejvýše dva součiny: $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$; jestliže má jenom jeden součin, t. j. jestliže pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$, pak se násobení grupoidu $\mathfrak{G}$ a rovněž grupoid $\mathfrak{G}$ nazývají *asociativní*. Grupoidy, které se v matematice nejčastěji studovaly, mají vlastnost, že každá uspořádaná skupina několika prvků má jenom jeden součin; jak později (na str. 45.) ukážeme, mají tuto důležitou vlastnost právě grupoidy asociativní. Na př. jest grupoid $\mathfrak{Z}$ asociativní, neboť podle definice jeho násobení jsou součiny $a(bc)$, $(ab)c$ každé uspořádané trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{Z}$ součty v obvyklém smyslu $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ a tedy jsou si rovny. Podobně i grupoid $\mathfrak{Z}_n$ $(n \geqq 1)$ jest asociativní. Vskutku, podle definice jeho násobení jsou součiny $a(bc)$, $(ab)c$ každé uspořádané trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{Z}_n$ zbytky dělení čísel $a + r$, $s + c$ číslem n, při čemž r (s) značí zbytek dělení čísla $b + c$ $(a + b)$ číslem n. Protože čísla $a + r$, $a + (b + c)$ se liší jenom o celý násobek čísla n, jest $a(bc)$ zbytek dělení čísla $a + (b + c)$ číslem n (v. pozn. pod čarou na str. 25.) a podobně vidíme, že $(ab)c$ jest zbytek dělení čísla $(a + b) + c$ číslem n. Z rovnosti $a + (b + c) = (a + b) + c$ pak vychází $a(bc) = (ab)c$. Rovněž grupoid $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ jest asociativní, neboť jsou-li $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ libovolné prvky v $\mathfrak{S}_n$, jsou podle definice násobení v $\mathfrak{S}_n$ součiny $\boldsymbol{p}.(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q}).\boldsymbol{r}$ složené permutace $(\boldsymbol{rq})\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{qp})$ a podle výsledku na str. 13. jsou si rovny.

Jako příklad výpočtu součinu vypočtěme všechny součiny 1 . 2 . 3 . 4 v grupoidu popsaném ve cvič. 4. v odst. 5! Podle příslušné multiplikační tabulky máme:

$$\{1 . 2 . 3\} = \{1\} . \{2 . 3\} \vee \{1 . 2\} . \{3\} = \{1\} . \{1\} \vee \{3\} . \{3\} = \\ = \{1\} \vee \{2\} = \{1, 2\};$$

$$\{2 . 3 . 4\} = \{2\} . \{3 . 4\} \vee \{2 . 3\} . \{4\} = \{2\} . \{2\} \vee \{1\} . \{4\} = \\ = \{2\} \vee \{2\} = \{2\};$$

$$\{1 . 2 . 3 . 4\} = \{1\} . \{2 . 3 . 4\} \vee \{1 . 2\} . \{3 . 4\} \vee \{1 . 2 . 3\} . \{4\} = \\ = \{1\} . \{2\} \vee \{3\} . \{2\} \vee \{1, 2\} . \{4\} = \{3\} \vee \{5\} \vee \{2, 4\} = \\ = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Všechny součiny 1 . 2 . 3 . 4 jsou tedy tyto: 2, 3, 4, 5.

Nechť nyní $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$! *Součinem* uspořádané skupiny podmnožin $A_1, \ldots, A_n$ rozumíme podmnožinu v $\mathfrak{G}$ skládající se ze všech součinů $a_1 \ldots a_n$, kde $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, a označujeme jej symbolem $A_1 . A_2 . \ldots . A_n$, kratčeji $A_1 \ldots A_n$. Když některá podmnožina $A_1, \ldots, A_n$ jest prázdná, rozumíme těmito symboly prázdnou množinu a v tomto případě součin $A_1 \ldots A_n$ nezávisí na uspořádání podmnožin $A_1, \ldots, A_n$. Podle této definice a podle definice součinu $a_1 \ldots a_n$ jest každý prvek a množiny $A_1 \ldots A_n$ součinem jistého prvku $a_1 \ldots a_k$ s jistým prvkem $a_{k+1} \ldots a_n$, při čemž $1 \leqq k \leqq n - 1$, takže $a \in (A_1 \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots A_n)$ a naopak, součin libovolného prvku množiny $A_1 \ldots A_k$ s libovolným prvkem množiny $A_{k+1} \ldots A_n$, při každém takovém k, jest jistý prvek $a \in A_1 \ldots A_n$. Odtud vychází rovnost

$$A_1 \ldots A_n = A_1(A_2 \ldots A_n) \vee (A_1A_2)(A_3 \ldots A_n) \vee \ldots \vee (A_1 \ldots A_{n-1})A_n.$$

Když A značí nějakou podmnožinu v $\mathfrak{G}$, pak místo $\underbrace{A \ldots A}_{n}$ píšeme kratčeji A^n, takže pro $n \geqq 2$ máme

$$A^n = AA^{n-1} \vee A^2A^{n-2} \vee \ldots \vee A^{n-1}A.$$

Hořejší definice součinu uspořádané skupiny prvků anebo množin zřejmě zobecňují definice součinu uspořádané skupiny dvou prvků anebo množin.

Příklad. Nechť A značí podmnožinu $\{1, 2, 4\}$ v grupoidu popsaném ve cvič. 4. v odst. 5! Pak jest

$A^2 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1 . 1, 1 . 2, 1 . 4, 2 . 1, 2 . 2, 2 . 4, 4 . 1, 4 . 2, 4 . 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$A^3 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \vee \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$A^4 = \{1, 2, 4,\} . \{1, 2, 3, 4, 5\} \vee \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \vee \{1, 2, 3, 4, 5\} . \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Cvičení. 1. Když podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ jest součtem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ jest součtem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB jest součet součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$

2. Když podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ jest průnikem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ jest průnikem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB jest částí průniku součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$ Zejména tedy platí pro každé podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ tyto vztahy: 1. $(A \cap B)C \subset AC \cap BC$; 2. $C(A \cap B) \subset CA \cap CB$. Pomocí vhodných příkladů ukažte, že se v těchto vztazích znaménko $\subset$ nedá vždycky nahraditi znaménkem $=$.

3. Nechť A značí libovolnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$ a m, n libovolná přirozená čísla. Platí tyto vztahy: 1. $A^mA^n \subset A^{m+n}$; 2. $(A^m)^n \subset A^{mn}$.

4. Nechť $A \subset B$ značí libovolné podmnožiny v $\mathfrak{G}$ a n libovolné přirozené číslo. Platí vztah $A^n \subset B^n$.

5. Nechť n značí libovolné přirozené číslo. Pro pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ platí vztah $G^n \supset G^{n+1}$, takže $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$

6. Nechť n, G mají týž význam jako v předcházejícím cvič. 5! G^n jest grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ a příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ jest oboustranný ideál v $\mathfrak{G}$. — Poznámka. Tento oboustranný ideál se označuje $\mathfrak{G}^n$.

7. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak 1. každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$ est asociativní, 2. pro všechny podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ platí rovnost $A(BC) = (AB)C$.

8. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid a A, B jsou grupoidní a zaměnitelné podmnožiny v $\mathfrak{G}$, pak také podmnožina AB jest grupoidní. Poznámka. Když $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou zaměnitelné podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, nazývá se podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k součinu jejich polí, *součin* podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ označuje se $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

9. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak množina všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou zaměnitelné s každým prvkem v $\mathfrak{G}$, jest grupoidní, není-li prázdná. Poznámka. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *centrum* grupoidu $\mathfrak{G}$.

10. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a násobení jest definováno takto: Součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ jest největší společná míra čísel a, b. Ukažte že grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský a asociativní.

7. O homomorfním zobrazení grupoidů.

Nechť $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili (na str. 28.) rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G^* grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly, které jsme popsali (v odst. **3.**) při studiu zobrazení množin. Podle této definice týká se tedy pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem míti nějaký vztah k násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^*$. Pro teorii grupoidů jsou nejdůležitější t. zv. *homomorfní* zobrazení, která, stručně řečeno, jsou charakterisována tím, že zachovávají násobení v obou grupoidech. Podrobná definice jest tato: Libovolné zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ se nazývá homomorfní, když součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ jest zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení $\boldsymbol{d}$, t. j. když pro $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $\boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b$. Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *homomorfismus*. Název homomorfní zobrazení jest v literatuře ustálen, ale jest dlouhý a proto budeme zpravidla místo něho používati názvu *deformace*. Již při studiu zobrazení množin jsme si všimli, že nemusí vždycky existovati zobrazení nějaké množiny na libovolnou jinou množinu; odtud plyne, že zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a ovšem tím méně deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí existovati. Jestliže nějaká deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje, pak pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest *homomorfní* s grupoidem $\mathfrak{G}$.

Nechť na př. n značí libovolné přirozené číslo a $\boldsymbol{d}$ zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ na grupoid $\mathfrak{Z}_n$ definované takto: Pro $a \in \mathfrak{Z}$ jest $\boldsymbol{d}a \in \mathfrak{Z}_n$ zbytek dělení