Úvod do teorie grup

2. O rozkladech v množinách

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 6--9.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401361

kladných sudých čísel a množina všech kladných lichých čísel, jejichž průnik jest zřejmě $\emptyset$. Pojem průniku dvou množin se dá opět rozšířiti na pojem průniku systému množin: Průnikem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří do každé z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$. Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden průnik a že tento průnik jest podmnožinou v každém prvku systému $\bar{A}$. Průnik systému $\bar{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{p}\bar{A}$ a v případě, že jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, symbolem $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{a}$, atp.

Cvičení. 1. $A \vee \emptyset = A$; $A \vee A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.

2. $A \vee (A \cap B) = A$; $A \cap (A \vee B) = A$.

3. Když $A \subset B$, pak $A \vee B = B$, $A \cap B = A$; naopak, když platí jedna z těchto rovností, pak $A \subset B$.

4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

5. $(A \vee B) \cap C = (A \cap C) \vee (B \cap C)$; $(A \cap B) \vee C = (A \vee C) \cap (B \vee C)$.

6. Když množina A má konečný počet $n \geqq 0$ prvků, pak má 2^n podmnožin.

2. O rozkladech v množinách.

Nechť G značí (všude v této knížce) libovolnou neprázdnou množinu. *Rozkladem* v G rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní. Pojem rozkladu v množině jest jedním z nejdůležitějších a snad i nejsložitějším pojmem, které se v této knížce vyskytují a proto doporučujeme, aby si jej čtenář dobře osvojil. Podle definice má tedy každý rozklad v G alespoň jeden prvek, každý prvek rozkladu jest neprázdná podmnožina v G a zejména si zapamatujme, že průnik každých dvou prvků rozkladu jest prázdná množina. Jednoduchým příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel jest systém skládající se z jednoho prvku, jímž jest množina všech kladných sudých čísel. Obecněji jest příkladem rozkladu v G systém skládající se z jednoho prvku, jímž jest libovolná neprázdná podmnožina v G. Systém množin [4] na str. 3. jest příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel $\geqq 2$.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad v G. Libovolný prvek v G může býti nejvýše v jednom prvku rozkladu $\bar{A}$, protože každé dva prvky v $\bar{A}$ jsou disjunktní; může se ovšem státi, že není vůbec v žádném prvku rozkladu $\bar{A}$. Když však rozklad $\bar{A}$ jest takový, že každý prvek v G jest v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, pak pravíme, že rozklad $\bar{A}$ *pokrývá* množinu G, nebo že jest *na* množině G anebo že jest rozkladem množiny G. Je-li tedy $\bar{A}$ rozklad množiny G, existuje ke každému prvku $a \in G$ prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že $a \in \bar{a}$. Na př. v hořejších příkladech jest poslední příkladem rozkladu na množině všech přirozených čísel $\geqq 2$, neboť každé přirozené číslo $\geqq 2$ jest buď prvočíslo anebo jest součinem několika prvočísel a tedy se vyskytuje v některém prvku toho rozkladu. Důležitými příklady rozkladů na množině G jsou oba t. zv. *krajní* rozklady množiny G: *největší* a *nejmenší* rozklad množiny G. Největší rozklad množiny G, který označujeme symbolem $\overline{G}_{\max}$, se skládá z jediného prvku G; nejmenší rozklad, $\overline{G}_{\min}$, jest systém všech množin skládajících se vždy z jednoho prvku množiny G. Na př. množina, jejímž jediným prvkem jest množina všech přirozených čísel jest největší rozklad množiny všech přirozených čísel a systém všech množin, z nichž každá se skládá z jednoho přirozeného čísla, jest její nejmenší rozklad. Všimněme si, že libovolný rozklad $\overline{A}$ v množině G jest rozkladem na množině $\mathrm{s}\overline{A}$.

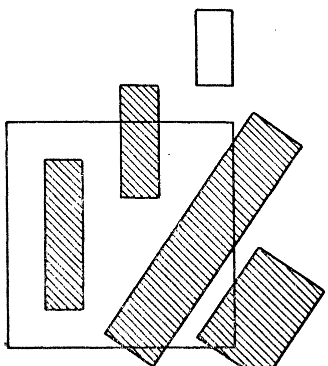
Uvažujme nyní o vztazích mezi rozklady a podmnožinami v G! Nechť $\overline{A}$ značí nějaký rozklad a B nějakou podmnožinu v G. Množina všech prvků $\bar{a} \in \overline{A}$ incidentních s B jest jistá podmnožina v $\overline{A}$; nazýváme ji *obal* podmnožiny B v rozkladu $\overline{A}$ a označujeme symbolem $B \sqsubset \overline{A}$ anebo $\overline{A} \sqsupset B$. $B \sqsubset \overline{A}$ může ovšem býti prázdná množina a tento případ nastane, když a jen když každý prvek v rozkladu $\overline{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní. Ale i jinak se dá tento případ $B \sqsubset \overline{A} = \emptyset$ charakterisovati. Jestliže každý prvek v rozkladu $\overline{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní, pak $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$, poněvadž $\mathrm{s}\overline{A}$ obsahuje jenom prvky, které jsou v některém prvku rozkladu $\overline{A}$; jestliže naopak $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$, pak každý prvek rozkladu $\overline{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní, neboť každý prvek v $\overline{A}$ jest částí množiny $\mathrm{s}\overline{A}$. Můžeme tedy říci, že rovnost $B \sqsubset \overline{A} = \emptyset$ platí, když a jen když $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$. Je-li $B \sqsubset \overline{A} \neq \emptyset$, pak jest ovšem $B \sqsubset \overline{A}$ rozkladem v G.

Další pojem vztahující se na rozklad $\overline{A}$ a podmnožinu B jest pojem průseku. *Průsek* rozkladu $\overline{A}$ s podmnožinou B anebo podmnožiny B s rozkladem $\overline{A}$, jest množina neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\overline{A}$ s podmnožinou B; označujeme jej symbolem $\overline{A} \sqcap B$ anebo $B \sqcap \overline{A}$. Také průsek $\overline{A} \sqcap B$ může býti prázdná množina a jest zřejmé, že tento případ opět nastane, když a jen když každý prvek v rozkladu $\overline{A}$ a podmnožina B jsou disjunktní anebo, podle hořejší úvahy, když a jen když $\mathrm{s}\overline{A} \cap B = \emptyset$. Jinak jest ovšem $\overline{A} \sqcap B$ rozklad v G a dokonce rozklad v B.

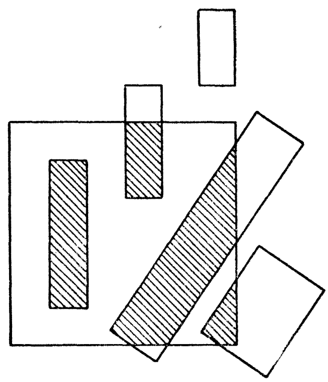
Všimněme si, že když $\overline{A}$ jest rozklad *na* množině G a $B \neq \emptyset$, pak $B \sqsubset \overline{A}$ i $\overline{A} \sqcap B$ jsou neprázdné systémy množin, z nichž první jest podmnožina v $\overline{A}$ a druhý jest rozklad na B. Každý rozklad $\overline{A}$ na G a neprázdná podmnožina B v G určují tedy jednak jistou neprázdnou podmnožinu v $\overline{A}$, totiž obal $B \sqsubset \overline{A}$, a jednak jistý rozklad na B, totiž průsek $\overline{A} \sqcap B$.

Příklady obalu a průseku rozkladu s podmnožinou jsou znázorněny na obr. 1. a 2., v nichž G jest množina všech bodů v nákresné rovině, B jest množina všech bodů uvnitř a na obvodě čtverce a rozklad $\overline{A}$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech jednotlivých obdélníků. Vyčárkováním jsou vyznačeny v obr. 1. prvky obalu $B \sqsubset \overline{A}$ a v obr. 2. prvky průseku $\overline{A} \sqcap B$.

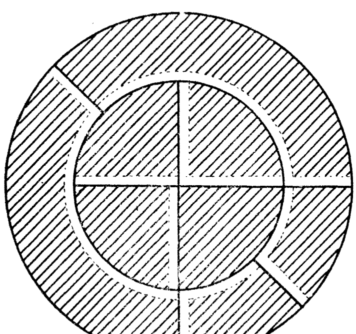
Uvažujme nyní ještě o vztazích mezi rozklady v G! Při tom se pro jednoduchost omezíme na případ, že jde o rozklady *na* G. Nechť tedy $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ značí nějaké rozklady na G. Mezi rozklady $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ může býti takový vztah, že každý prvek jednoho z nich, na př. rozkladu $\overline{G}_2$, jest součtem některých prvků rozkladu $\overline{G}_1$. V tom případě pravíme, že $\overline{G}_2$ jest *zákryt* rozkladu $\overline{G}_1$ anebo že $\overline{G}_1$ jest *zjemnění* rozkladu $\overline{G}_2$ a tento vztah vyjadřujeme symbolem $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_1$ anebo $\overline{G}_1 \leqq \overline{G}_2$. Zřejmě na př. platí vztahy $\overline{G}_{\max} \geqq \overline{G}_1 \geqq \overline{G}_{\min}$.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Předpokládejme, že pro rozklady $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ platí vztah $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_1$. Pak jest každý prvek $\bar{a}_2$ rozkladu $\overline{G}_2$ součtem některých prvků v $\overline{G}_1$ a jest zřejmé, že systém těchto prvků jest rozklad prvku $\bar{a}_2$. Rovněž jest zřejmé, že systém všech podmnožin v rozkladu $\overline{G}_1$, z nichž každá se skládá ze všech prvků rozkladu $\overline{G}_1$, které jsou části vždy téhož prvku v $\overline{G}_2$, jest jistý rozklad $\overline{\overline{G}}_1$ rozkladu $\overline{G}_1$; pravíme, že tento rozklad $\overline{\overline{G}}_1$ *vynucuje* zákryt $\overline{G}_2$. Můžeme tedy říci, že rozklad $\overline{G}_1$ obdržíme z rozkladu $\overline{G}_2$, když každý prvek rozkladu $\overline{G}_2$ nahradíme vhodným jeho rozkladem; a rozklad $\overline{G}_2$ obdržíme z rozkladu $\overline{G}_1$, když na $\overline{G}_1$ zvolíme vhodný rozklad $\overline{\overline{G}}_1$ a utvoříme součty všech prvků rozkladu $\overline{\overline{G}}_1$, které leží vždy v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{G}}_1$.

Příklad zákrytu $\overline{G}_2$ a zjemnění $\overline{G}_1$ jest znázorněn na obr. 3. G jest množina všech bodů na obvodě a uvnitř větší kružnice, $\overline{G}_2$ se skládá ze dvou prvků, totiž z množiny bodů na obvodě větší kružnice a uvnitř mezikruží a z množiny bodů na obvodě a uvnitř menší kružnice a konečně $\overline{G}_1$ se skládá z množin bodů ve výsecích mezikruží a menší kružnice, při čemž body na hranicích se počítají vždy jenom k jednomu výseku, jak jest čárkováním vyznačeno.

Cvičení. 1. $\mathrm{s}\overline{A} \sqsubset \overline{A} = \overline{A} = \mathrm{s}\overline{A} \sqcap \overline{A}$.

2. $\mathrm{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqsubset \overline{A} = B \sqsubset \overline{A}$;
$\mathrm{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$;
$\mathrm{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqsubset \overline{A} = \mathrm{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqsubset \overline{A}$.

3. Když $B \sqsubset \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$, pak pro každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ platí buď $\bar{a} \subset B$ anebo $\bar{a} \cap B = \emptyset$; a naopak.

4. Když $B \supset C$, pak $(C \sqsubset \overline{A}) \sqcap B = C \sqsubset (\overline{A} \sqcap B)$;
$(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap C = \overline{A} \sqcap C$.

5. Pro každé tři rozklady $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3$ na G platí: 1. $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_1$; 2. když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_1$, pak $\overline{G}_1 = \overline{G}_2$; 3. když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_3$, pak $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_3$.

6. Když a jen když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, pak ze vztahů $\bar{a}_1 \in \overline{G}_1, \bar{a}_2 \in \overline{G}_2, \bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \neq \emptyset$ plyne $\bar{a}_1 \supset \bar{a}_2$.

3. O zobrazeních.

V denním životě setkáváme se napořád se zjevy, které souvisí s matematickým pojmem zobrazení. V nejjednodušším případě mají takové zjevy toto schema: Máme dvě neprázdné množiny G, G^* a mezi prvky obou množin nějaký vztah, jímž jest ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*. Na př. [1] mezi diváky při určitém divadelním představení a mezi vstupenkami pro to představení vydanými jest vztah daný tím, že každý divák jest přítomen na základě právě jedné vstupenky; [2] mezi žáky určité školy a jejími třídami jest vztah daný tím, že každý žák patří právě do jedné třídy; [3] určení počtu n nějakých věcí záleží v tom, že ke každé věci přiřadíme právě jedno přirozené číslo $1, 2, \ldots, n$ a sice obvykle tím způsobem, že vezmeme vždy jednu z nich do rukou a současně ji označíme (znakem anebo jenom v mysli) jedním z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Nechť tedy G, G^* značí neprázdné množiny. *Zobrazením* množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž jest ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*; jinak řečeno, jímž jest každý prvek množiny G *zobrazen* právě na jeden prvek množiny G^*. Zobrazení množiny G do G^* nazývá se také *funkce* na množině G do množiny G^*. Zobrazují-li nějaká zobrazení $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ množiny G do G^* každý prvek v G vždy na stejný prvek v G^*, nazýváme je