24. Aplikace předešlé teorie na řešení systému lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971.
pp. 169--172.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401353

24. APLIKACE PŘEDEŠLÉ TEORIE NA ŘEŠENÍ SYSTÉMU LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Mějme systém lineárních homogenních diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\,, \end{aligned} \tag{133}$$

kde a_{jk} značí dané konstanty.

Systém (133) můžeme zapsat jedinou maticovou rovnicí (v. odst. 21)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}\,. \tag{134}$$

Jde o určení obecného řešení systému (133). Metoda, kterou vyložíme, spočívá v tom, že místo neznámých funkcí $y_1, \ldots, y_n$ zavedeme jejich lineární kombinace s konstantními koeficienty, $z_1, \ldots, \ldots, z_n$, přičemž tyto kombinace zvolíme tak, aby vyhovovaly systému diferenciálních rovnic, který je pokud možno jednoduchého tvaru. Řešením tohoto nového systému obdržíme funkce $z_1, \ldots, z_n$.

Nuže zaveďme lineární kombinace $z_1, \ldots, z_n$ neznámých funkcí $y_1, \ldots, y_n$ vztahy

$$\begin{aligned} y_1 &= k_{11}z_1 + k_{12}z_2 + \ldots + k_{1n}z_n\,, \\ y_2 &= k_{21}z_1 + k_{22}z_2 + \ldots + k_{2n}z_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= k_{n1}z_1 + k_{n2}z_2 + \ldots + k_{nn}z_n\,, \end{aligned} \tag{135}$$

přičemž o konstantách k_{ij} především předpokládáme jen to, že matice

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} \ldots k_{1n} \\ \vdots \\ k_{n1} \ldots k_{nn} \end{bmatrix}$$

je regulární. Lineární substituci (135) můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{z}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Odtud a z rovnice (134) plyne

$$\mathbf{K}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{z}\,,$$

takže

$$\mathbf{z}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{z}\,. \tag{136}$$

Podle předcházející teorie můžeme zvolit matici $\mathbf{K}$ tak, aby matice $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$ byla Weierstrassovým kanonickým tvarem $\mathbf{W}$ matice $\mathbf{A}$, tedy

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 \end{matrix} & \mathbf{0} & \dots \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} c_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_2 \end{matrix} & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array}\right] \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} e_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} e_2 \\ \vphantom{1} \end{matrix}$$

přičemž $c_1, c_2, \dots, c_m$ značí kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$.

Ze vztahu (136) dostaneme pak

$$\begin{aligned} z_1' &= c_1 z_1 + z_2\,, \\ z_2' &= c_1 z_2 + z_3\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{e_1}' &= c_1 z_{e_1}\,, \\ z_{e_1+1}' &= c_2 z_{e_1+1} + z_{e_1+2}\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{e_1+e_2}' &= c_2 z_{e_1+e_2}\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{137}$$

Je zřejmé, že se systém (137) dá řešit snadněji než systém (133), neboť diferenciální rovnice pro funkce $z_{e_1}, z_{e_1+e_2}, \ldots, z_{e_1+\ldots+e_m}$ jsou homogenní diferenciální rovnice 1. řádu, z nichž lze tyto funkce vypočíst. Pomocí nich můžeme pak řešit postupně ostatní diferenciální rovnice systému (137), které jsou, jak je patrno, vesměs diferenciálními lineárními (nehomogenními) rovnicemi prvního řádu. Tím určíme funkce $z_1, \ldots, z_n$ a ze vztahů (135) obdržíme pak funkce $y_1, \ldots, y_n$.

Příklad 26. Řešme systém diferenciálních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= - y_2 + y_3\,, \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4\,, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4\,, \\ y_4' &= \phantom{-2y_1 + {}} 2y_2 - 2y_3\,. \end{aligned}$$

Řešení: Matice této soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Je to tedy matice rovná matici $\mathbf{A}$ z příkl. 23. Za matici $\mathbf{K}$, která převádí matici $\mathbf{A}$ na kanonický tvar, zvolíme matici uvedenou ve zmíněném příkl. 23, tj. matici

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

přičemž

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lineární substitucí o matici $\boldsymbol{K}$, tj. substitucí

$$\begin{aligned}
y_1 &= \phantom{2z_1 - {}} 2z_2 + z_4\,, \\
y_2 &= z_1 - z_3\,, \\
y_3 &= z_1 + z_3\,, \\
y_4 &= 2z_1 - 4z_2 - z_4\,,
\end{aligned}$$

přejde daný systém v soustavu diferenciálních rovnic

$$z_1' = 0\,,\ z_2' = z_3\,,\ z_3' = z_4\,,\ z_4' = 0\,.$$

Její řešení je

$$\begin{aligned}
z_1 &= C_1\,, \\
z_2 &= C_2 + C_3 x + \tfrac{1}{2} C_4 x^2\,, \\
z_3 &= C_3 + C_4 x\,, \\
z_4 &= C_4\,,
\end{aligned}$$

kde C_1, C_2, C_3, C_4 jsou libovolné konstanty. Odtud obdržíme obecné řešení daného systému ve tvaru

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2C_2 + 2C_3 x + C_4(1 + x^2)\,, \\
y_2 &= C_1 - C_3 - C_4 x\,, \\
y_3 &= C_1 + C_3 + C_4 x\,, \\
y_4 &= 2C_1 - 4C_2 - 4C_3 x - C_4(1 + 2x^2)\,.
\end{aligned}$$