22. PŘEHLED TEORIE ELEMENTÁRNÍCH DĚLITELŮ

V následujících odstavcích 22.1.–23.7. uvedeme stručný přehled důležité teorie elementárních dělitelů, která pochází od K. Weierstrasse (v. 20.1.). Věty uvádíme většinou bez důkazů. T značí těleso komplexních čísel.

22.1. Definice svazku matic. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ značí čtvercové matice téhož stupně n nad tělesem T, přičemž $\mathbf{A}$ je regulární.

Množina čtvercových matic stupně n tvaru

$$\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

kde λ značí libovolné číslo, se nazývá *regulární svazek matic* určený maticemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

22.2. Zavedení pojmu elementárních dělitelů regulárního svazku matic.

1. Nechť D_k značí (pro $k = 1, 2, \ldots, n$) největšího společného dělitele všech minorů k-tého stupně v matici $\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Je tedy D_k polynom proměnné λ stupně $\leqq k$. Zvláště pak $D_n = |\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$ je polynom stupně n, neboť $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Snadno se zjistí, že pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ je polynom D_{k+1} dělitelný polynomem D_k, takže

$$\frac{D_{k+1}}{D_k}$$

je polynom proměnné λ.

2. Zvolme libovolný polynom $\lambda - a$ (a je komplexní číslo), zvaný stručně *základ*. Označme h_k exponent nejvyšší mocniny základu $\lambda - a$, která dělí polynom D_k. To znamená, že když $\lambda - a$ nedělí D_k, pak je $h_k = 0$. Když ale $\lambda - a$ dělí D_k, pak také $(\lambda - a)^{h_k}$ dělí D_k, zatímco $(\lambda - a)^{h_k + 1}$ nedělí polynom D_k.

3. Vlastnosti exponentů h_k (pro libovolný základ $\lambda - a$):

a) $h_k \leqq h_{k+1}$,

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $h_{k+1} = 0$.

b) Když pro určité j nastane $h_j = 0$, $h_{j+1} > 0$, pak

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_j = 0\,,$$
$$0 < h_{j+1} < \ldots < h_n\,.$$

4. Položme

$$e'_1 = h_1, e'_2 = h_2 - h_1, \ldots, e'_u = h_n - h_{n-1}\,. \qquad (120)$$

Potom platí: a) $e'_k = 0$ jen tehdy, když $h_k = 0$;

b) $e'_1 \leqq e'_2 \leqq \ldots \leqq e'_n$;

c) Když pro určité j platí $e_j = 0$, $e_{j+1} > 0$, pak je

$$e'_1 = e'_2 = \ldots = e'_j = 0$$
$$e'_{j+1} > 0\,,\; e'_{j+2} > 0\,,\; e'_n > 0\,. \qquad (121)$$

přičemž

$$e'_{j+1} + e'_{j+2} + \ldots + e'_n = h_n\,. \qquad (122)$$

5. Jsou-li e'_k čísla definována vztahy (120) a platí-li (121), pak polynomy

$$(\lambda - a)^{e'_{j+1}}, (\lambda - a)^{e'_{j+2}}, \ldots, (\lambda - a)^{e'_n} \qquad (123)$$

se nazývají *elementární dělitelé* matice $\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$, popř. elementární dělitelé svazku $\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$ nebo též determinantu $|\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ patřící k základu $\lambda - a$.

22.3. Věta. 1. Elementární dělitelé (123) mohou patřit jen k základu $\lambda - a$, který dělí determinant $|\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

2. Součin elementárních dělitelů patřících k témuž základu $\lambda - a$ je roven nejvyšší mocnině $(\lambda - a)^{h_n}$, která dělí determinant $|\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

3. Součin všech elementárních dělitelů patřících ke všem možným základům je roven až na multiplikativní konstantu determinantu $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

Důkaz: 1. Když $\lambda - a$ nedělí determinant $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}|$, pak všechna

$$h_n = h_{n-1} = \ldots = h_1 = 0,$$

a tedy též

$$e'_n = e'_{n-1} = \ldots = e'_1 = 0.$$

2. Druhé tvrzení plyne ze vztahu (122).

3. Třetí tvrzení je důsledkem druhého.

Příklad 22. Určeme všechny elementární dělitele svazku $\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}$, přičemž matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

a $a_1 a_2 \neq 0$.

Řešení:

$$\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 + b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 + b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_2 + b_2 \end{bmatrix}.$$

Zřejmě je $|\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}| = (\lambda a_1 + b_1)^3 (\lambda a_2 + b_2) = a_1^3 a_2 (\lambda + b_1/a_1)^3 \cdot (\lambda + b_2/a_2)$. Předpokládejme, že $(b_2/a_2) \neq (b_1/a_1)$. Pak elementární dělitelé mohou příslušet pouze k dvěma základům, a to $\lambda + b_1/a_1$, $\lambda + b_2/a_2$.

1. Pro základ $\lambda + b_1/a_1$ zřejmě je

$$h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2, h_4 = 3,$$
$$e'_1 = 0, e'_2 = 1, e'_3 = 1, e'_4 = 1.$$

Příslušní elementární dělitelé jsou tři a jsou vesměs rovni $\lambda + b_1/a_1$.

2. Pro základ $\lambda + b_2/a_2$ zřejmě je

$$h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0, h_4 = 1\,,$$
$$e'_1 = 0, e'_2 = 0, e'_3 = 0, e'_4 = 1\,.$$

Příslušný elementární dělitel je $\lambda + b_2/a_2$. Součin všech elementárních dělitelů je roven

$$(\lambda + b_1/a_1)^3 (\lambda + b_2/a_2) = \frac{1}{a_1^3 a_2} |\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|\,.$$

22.4. Definice. Nechť polynom $\lambda - a$ dělí determinant $|\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|$ a nechť (pro $k = 1, 2, \ldots, n$) mají čísla h_k význam uvedený v odst. 22.2.2.

Každý minor k-tého stupně v matici $\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, dělitelný mocninou $(\lambda - a)^{h_k}$, se nazývá *regulární minor* k-tého stupně vzhledem k základu $\lambda - a$.

22.5. Věta. 1. Každý regulární minor stupně k (pro $k = 2, 3, \ldots, n$) v matici $\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ vzhledem k základu $\lambda - a$ obsahuje aspoň jeden regulární minor stupně $k - 1$ vzhledem k témuž základu $\lambda - a$.

2. Každý regulární minor stupně $k - 1$ v matici $\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ vzhledem k základu $\lambda - a$ je jako minor obsažen v aspoň jednom regulárním minoru stupně k v matici $\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ vzhledem k témuž základu $\lambda - a$.

Důkaz viz např. [13], 7–11.

Na základě uvedených vět se dá dokázat následující věta.

22.6. Weierstrassova věta. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou libovolné matice stupně n, z nichž $\boldsymbol{A}$ je regulární. Nechť

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, (\lambda - a_2)^{e_2}, \ldots, (\lambda - a_m)^{e_m}$$

představují všechny elementární dělitele determinantu $|\lambda \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$, přičemž $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nemusí být vzájemně různé, takže

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_m = n\,.$$

Pak existují regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ stupně n, pro něž platí

$$\boldsymbol{HAK} = \boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{HBK} = \boldsymbol{W}\,,$$

kde

$$
\boldsymbol{W} = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} a_1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_1 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_1 \end{matrix} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \hline
\boldsymbol{0} & \begin{matrix} a_2 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_2 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_2 \end{matrix} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \hline
\multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \hline
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & \begin{matrix} a_m & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_m & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_m \end{matrix}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l} \}\, e_1 \\ \\ \}\, e_2 \\ \\ \}\, e_m \end{array}
\\
\begin{array}{cccc} \underbrace{\qquad\qquad}_{e_1} & \underbrace{\qquad\qquad}_{e_2} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{e_m} \end{array} &
\end{array}
\qquad (124)
$$

22.7. Poznámky. 1. Matice $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{W}$ je tzv. *Weierstrassův kanonický tvar* svazku $\lambda\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.

2. Všimněme si, že v uvedeném tvaru matice $\boldsymbol{W}$ se vyskytují pouze kořeny a exponenty elementárních dělitelů svazku $\lambda\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.

3. Věta 22.6 má četné aplikace. Jednou z nich je např. následující věta, která udává nové řešení problému z odst. 20.1 o současné transformaci dvou matic.

22.8. Věta. Nechť $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}_1$ značí dva páry matic téhož stupně n a nechť je např. matice $\boldsymbol{P}$ regulární.

Pak existují takové regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ stupně n, že je

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{HPK}\,, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{HQK} \qquad (125)$$

právě tehdy, když $|\boldsymbol{P}_1| \neq 0$ a když oba svazky matic $\lambda\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$, $\lambda\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}_1$ mají všechny elementární dělitele stejné.

Důkaz provedeme jen v hrubých rysech. a) Uvedená podmínka je nutná. Existují-li regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ o vlastnostech (125), dostáváme

$$|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{H}|\,|\mathbf{P}|\,|\mathbf{K}| \neq 0\,,$$

takže $\mathbf{P}_1$ je regulární. Dále pro libovolné číslo λ je

$$\lambda\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}(\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,\mathbf{K}\,.$$

Odtud plyne

$$|\lambda\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1| = |\mathbf{H}|\,|\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|\,|\mathbf{K}| = c|\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|\,,$$

kde $c \neq 0$ je vhodná konstanta. Proto základy elementárních dělitelů obou svazků $\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, $\lambda\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$ jsou stejné. Dá se dokázat (důkaz neuvádíme), že i jejich exponenty jsou stejné.

b) Ukážeme, že uvedená podmínka je postačující. Nechť $|\mathbf{P}| \neq 0$, $|\mathbf{P}_1| \neq 0$ a nechť

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, (\lambda - a_2)^{e_2}, \ldots, (\lambda - a_m)^{e_m}$$

jsou elementární dělitelé obou svazků $\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, $\lambda\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$. Podle Weierstrassovy věty 22.6 existují takové regulární matice $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{K}_1$; $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{K}_2$ stupně n, že je

$$\mathbf{H}_1\mathbf{P}\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}\,,\quad \mathbf{H}_1\mathbf{Q}\mathbf{K}_1 = \mathbf{W}\,,$$
$$\mathbf{H}_2\mathbf{P}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{E}\,,\quad \mathbf{H}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{W}\,,$$

kde $\mathbf{W}$ značí matici kanonického tvaru. Odtud plyne

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1})\,,$$
$$\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1)\,\mathbf{Q}(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1})\,.$$

Existují tedy takové regulární matice $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^{-1}$ stupně n, že je

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{K}\,,\quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{K}\,.$$

22.9. Věta o podobných maticích. Dvě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ téhož stupně n jsou podobné právě tehdy, když charakteristické determinanty těchto matic mají stejné elementární dělitele.

D ů k a z: a) Ukažme nejprve, že uvedená podmínka je nutná. Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož stupně n jsou podobné. Pak existuje taková regulární matice $\boldsymbol{Q}$, že je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}.$$

Zároveň platí

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}, \quad |\boldsymbol{E}| = 1.$$

Tedy podle předešlé věty oba svazky matic $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$, $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$ mají všechny elementární dělitele stejné. Avšak

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (-1)^n |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|, \quad |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}|.$$

Proto také determinanty $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$, $|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}|$ mají stejné elementární dělitele.

b) Ukažme nyní, že uvedená podmínka stačí. Nechť tedy $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$, $|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}|$, a tudíž i $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$, $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}|$ mají stejné elementární dělitele. Pak podle věty 22.8 existují takové regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$, že je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}.$$

Odtud máme $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K}^{-1}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$, takže matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou podobné.

22.10. Weierstrassův neboli Jordanův kanonický tvar matice. Buď $\boldsymbol{B}$ libovolná matice stupně n. Vezměme v úvahu matice $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, kde ovšem $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice řádu n. Svazek matic $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$ je zřejmě maticí $\boldsymbol{B}$ jednoznačně určen a je regulární.

Použijme Weierstrassovu větu 22.6 na matice $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$. Podle ní existuje regulární matice $\boldsymbol{K}$ stupně n, pro niž platí

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W},$$

kde matice $\boldsymbol{W}$ má tvar (124). Přitom $a_1, a_2, \ldots, a_m$ značí kořeny a $e_1, e_2, \ldots, e_m$ exponenty příslušných elementárních dělitelů svazku $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$.

Matice $\boldsymbol{W}$ se nazývá *Weierstrassův* neboli *Jordanův kanonický tvar* matice $\boldsymbol{B}$, stručněji *kanonický tvar* matice $\boldsymbol{B}$.

Vidíme, že každá čtvercová matice je podobná svému kanonickému tvaru.

Příklad 23. Určeme pro matici $\boldsymbol{A}$ z příkl. 19 a 20

1. elementární dělitele svazku matic $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$;
2. Weierstrassův kanonický tvar tohoto svazku;
3. kanonický tvar matice $\boldsymbol{A}$;
4. matici $\boldsymbol{K}$, která převádí matici $\boldsymbol{A}$ na její kanonický tvar.

Řešení: 1. Uvažovaný svazek matic je

$$\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -2 & +2 & \lambda \end{bmatrix} \tag{126}$$

Protože $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$, liší se v maticích $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ stejnolehlé minory 1. a 3. stupně právě jenom znaménkem, kdežto stejnolehlé minory 2. a 4. stupně jsou stejné. Odtud vzhledem k výpočtům v příkladu 19 (str. 100) máme

$$\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \lambda^4 .$$

takže elementární dělitelé svazku (126) patří pouze k základu λ. Dále dostáváme s přihlédnutím k oněm výpočtům

$$h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 1, h_4 = 4 ,$$
$$e'_1 = 0, e'_2 = 0, e'_3 = 1, e'_4 = 3 .$$

Elementární dělitelé svazku matic $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ jsou tedy λ, λ^3.

2. Weierstrassův kanonický tvar tohoto svazku je

$$\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

3. Kanonický tvar matice $\boldsymbol{A}$ je matice $\boldsymbol{W}$.

4. Matici $\boldsymbol{K}$ určíme ze vztahu $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W}$ neboli

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{W} . \tag{127}$$

Označíme-li

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix},$$

máme vztah (127) ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud po vynásobení obdržíme porovnáním stejnolehlých prvků na obou stranách celkem 16 lineárních rovnic a 16 neznámých $a_1, b_1, c_1, \ldots, d_4$. Obecná teorie zaručuje, že tyto rovnice mají netriviální řešení, tj. že všechny neznámé nejsou rovny nule.

Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}
&(1) & -a_2 + a_3 &= 0\,, \\
&(2) & -b_2 + b_3 &= 0\,, \\
&(3) & -c_2 + c_3 &= b_1\,, \\
&(4) & -d_2 + d_3 &= c_1\,, \\
&(5) & -2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 &= 0\,, \\
&(6) & -2b_1 + b_2 + b_3 - b_4 &= 0\,, \\
&(7) & -2c_1 + c_2 + c_3 - c_4 &= b_2\,, \\
&(8) & -2d_1 + d_2 + d_3 - d_4 &= c_2\,, \\
&(9) & 2a_1 - a_2 - a_3 + a_4 &= 0\,, \\
&(10) & 2b_1 - b_2 - b_3 + b_4 &= 0\,, \\
&(11) & 2c_1 - c_2 - c_3 + c_4 &= b_3\,, \\
&(12) & 2d_1 - d_2 - d_3 + d_4 &= c_3\,, \\
&(13) & 2a_2 - 2a_3 &= 0\,, \\
&(14) & 2b_2 - 2b_3 &= 0\,, \\
&(15) & 2c_2 - 2c_3 &= b_4\,, \\
&(16) & 2d_2 - 2d_3 &= c_4\,.
\end{aligned}$$

Protože rovnice (13), (14), (9), (10) jsou násobky rovnic (1), (2), (5), (6), můžeme je vypustit, takže k řešení zbývá tato soustava rovnic

$$\begin{array}{llll}
(1^*) & a_3 = a_2\,, & (5^*) & a_4 = -2a_1 + 2a_2\,,\\
(2^*) & b_3 = b_2\,, & (6^*) & b_4 = -2b_1 + 2b_2\,,\\
(3^*) & c_3 = b_1 + c_2\,, & (7^*) & c_4 = -2c_1 + 2c_2 + b_1 - b_2\,,\\
(4^*) & d_3 = c_1 + d_2\,, & (8^*) & d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 - c_2\,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(9^*) & c_4 = -2c_1 + 2c_2 + b_1 + b_2\,,\\
(10^*) & d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 + c_2 + b_1\,,\\
(11^*) & b_4 = 2c_2 - 2c_2 - 2b_1 = -2b_1\,,\\
(12^*) & c_4 = 2d_2 - 2d_2 - 2c_1 = -2c_1\,.
\end{array}$$

Z rovnic (9*) a (7*) plyne

$$b_2 = 0\,,$$

kdežto z (8*) a (10*) máme

$$2c_2 = -b_1\,.$$

Dosadíme-li tyto dva výsledky do předešlých rovnic, dostaneme

$$\begin{array}{lll}
a_3 = a_2\,, & d_3 = d_2 + c_1\,, & d_4 = -2d_1 + 2d_2 + c_1 + \tfrac{1}{2}b_1\\
b_2 = b_3 = 0\,, & a_4 = 2a_2 - 2a_1\,, & 2c_2 = -b_1\,.\\
2c_3 = b_1\,, & b_4 = -2b_1\,, & c_4 = -2c_1
\end{array}$$

Máme tedy 10 rovnic pro 16 neznámých. Můžeme proto 6 veličin zvolit (ale tak, aby matice K byla regulární).

Zvolíme-li např. $a_1 = 0$, $b_1 = 2$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$, $a_2 = 1$, $d_2 = 0$, pak bude $b_2 = 0$, $c_2 = -1$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0$, $c_3 = 1$, $d_3 = 0$, $a_4 = 2$, $b_4 = -4$, $c_4 = 0$, $d_4 = -1$ a obdržíme

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

přitom $|\mathbf{K}| = -4$, takže matice $\mathbf{K}$ je regulární.