

20. Transformace párů matic

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971.
pp. 144--146.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401349>

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

20. TRANSFORMACE PÁRŮ MATIC

20.1. Úvodní poznámka. K. Weierstrass (1815–1897) ve svém proslulém pojednání *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (uveřejněném v časopise Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften v r. 1868) řešil tento problém:

Jsou dány dva páry čtvercových matic $P, Q; P_1, Q_1$ téhož stupně n . Jaké jsou nutné a postačující podmínky k tomu, aby existovaly takové regulární matice H, K stupně n , že platí vztahy

$$P_1 = HPK, \quad Q_1 = HQK.$$

K. Weierstrass se zabýval případem, že pro některá čísla λ, μ je

$$|\lambda P + \mu Q| \neq 0.$$

Jeho řešení spočívá na pojmu tzv. elementárních dělitelů, o nichž se zmíníme v kap. 22. Z předcházející teorie plyne snadno jiné řešení, které se také vztahuje na případ, kdy pro některá λ, μ je $|\lambda P + \mu Q| \neq 0$. Toto řešení je obsaženo v následujících dvou větách, z nichž v první předpokládáme regulárnost matice P .

20.2. Věta. Necht' $P, Q; P_1, Q_1$ jsou dva páry čtvercových matic téhož stupně n , přičemž $|P| \neq 0$.

Pak existují regulární matice H, K stupně n , pro něž platí

$$P_1 = HPK, \quad Q_1 = HQK \quad (112)$$

právě tehdy, je-li $|P_1| \neq 0$ a obě matice $QP^{-1}, Q_1P_1^{-1}$ mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz: Existují-li regulární matice H, K , které splňují vztahy (112), zřejmě je

$$|P_1| = |H| \cdot |P| \cdot |K| \neq 0,$$

takže matice P_1 je regulární. Mimoto platí

$$\begin{aligned} K &= (HP)^{-1} P_1 = P^{-1} H^{-1} P_1, \\ Q_1 &= HQ(P^{-1} H^{-1}) P_1, \end{aligned}$$

takže

$$Q_1 P_1^{-1} = H(QP^{-1}) H^{-1}. \quad (113)$$

Jsou tedy matice $Q_1 P_1^{-1}$, QP^{-1} podobné.

Jsou-li naopak matice P , P_1 regulární a jsou-li obě matice

$$Q_1 P_1^{-1}, QP^{-1}$$

podobné, takže existuje taková regulární matice H , že platí (113), můžeme určit matici K vzorcem

$$K = P^{-1} H^{-1} P_1.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} HPK &= HP(P^{-1} H^{-1} P_1) = H(PP^{-1}) H^{-1} P_1 = (HH^{-1}) P_1 = P_1 \\ HQK &= (HQP^{-1} H^{-1}) P_1 = Q_1 P_1^{-1} P_1 = Q_1. \end{aligned}$$

Proto existují regulární matice H , K , které splňují vztahy (112). Odtud plyne tvrzení věty 20.2 už bez obtíží.

20.3. Věta. Necht P , Q ; P_1 , Q_1 jsou dva páry takových čtvercových matic téhož stupně n , že je

$$|P| = |Q| = |P_1| = |Q_1| = 0,$$

avšak při vhodných číslech λ_0 , μ_0 je

$$|\lambda_0 P + \mu_0 Q| \neq 0.$$

Pak existují takové regulární matice H , K stupně n , že platí vztahy (112), právě když obě matice

$$Q(\lambda_0 P + \mu_0 Q)^{-1}, \quad Q_1(\lambda_0 P_1 + \mu_0 Q_1)^{-1}$$

mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz: Z předpokladu plyne, že matice

$$\mathbf{R} = \lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q}$$

je regulární, takže $|\mathbf{R}| \neq 0$, přičemž je zřejmé $\lambda_0 \mu_0 \neq 0$. Existují-li regulární matice \mathbf{H} , \mathbf{K} takové, že platí (112), je

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_0 \mathbf{P}_1 + \mu_0 \mathbf{Q}_1 = \lambda_0 \mathbf{HPK} + \mu_0 \mathbf{HQB} = \mathbf{H}(\lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q}) \mathbf{K},$$

takže

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{HRK},$$

a současně platí

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQB}.$$

Proto

$$|\mathbf{R}_1| = |\mathbf{H}| |\mathbf{R}| |\mathbf{K}| \neq 0$$

a matice

$$\mathbf{QR}^{-1}, \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-1}$$

jsou podobné, jak plyne z předešlé věty 20.2.

Když naopak $|\mathbf{R}_1| \neq 0$ a jsou-li \mathbf{QR}^{-1} , $\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-1}$ podobné, existují takové regulární čtvercové matice \mathbf{H} , \mathbf{K} stupně n , že

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{HRK}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQB},$$

takže

$$\lambda_0 \mathbf{P}_1 + \mu_0 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}(\lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q}) \mathbf{K} = \lambda_0 \mathbf{HPK} + \mu_0 \mathbf{HQB},$$

$$\mu_0 \mathbf{Q}_1 = \mu_0 \mathbf{HQB}.$$

Odečtením obou rovnic obdržíme

$$\lambda_0 \mathbf{P}_1 = \lambda_0 \mathbf{HPK}.$$

Současně je

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQB}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda_0 \neq 0$, plynou odtud vztahy (112).