20. TRANSFORMACE PÁRŮ MATIC

20.1. Úvodní poznámka. K. Weierstrass (1815–1897) ve svém proslulém pojednání *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (uveřejněném v časopise Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften v r. 1868) řešil tento problém:

Jsou dány dva páry čtvercových matic $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}_1$ téhož stupně n. Jaké jsou nutné a postačující podmínky k tomu, aby existovaly takové regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ stupně n, že platí vztahy

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{HPK}\,, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{HQK}\,.$$

K. Weierstrass se zabýval případem, že pro některá čísla λ, μ je

$$|\lambda\boldsymbol{P} + \mu\boldsymbol{Q}| \neq 0\,.$$

Jeho řešení spočívá na pojmu tzv. elementárních dělitelů, o nichž se zmíníme v kap. 22. Z předcházející teorie plyne snadno jiné řešení, které se také vztahuje na případ, kdy pro některá λ, μ je $|\lambda\boldsymbol{P} + \mu\boldsymbol{Q}| \neq 0$. Toto řešení je obsaženo v následujících dvou větách, z nichž v první předpokládáme regulárnost matice $\boldsymbol{P}$.

20.2. Věta. Nechť $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}_1$ jsou dva páry čtvercových matic téhož stupně n, přičemž $|\boldsymbol{P}| \neq 0$.

Pak existují regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ stupně n, pro něž platí

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{HPK}\,, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{HQK} \tag{112}$$

právě tehdy, je-li $|\boldsymbol{P}_1| \neq 0$ a obě matice $\boldsymbol{QP}^{-1}$, $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}$ mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz: Existují-li regulární matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$, které splňují vztahy (112), zřejmě je

$$|\boldsymbol{P}_1| = |\boldsymbol{H}|\,.\,|\boldsymbol{P}|\,.\,|\boldsymbol{K}| \neq 0\,,$$

takže matice $\mathbf{P}_1$ je regulární. Mimoto platí

$$\mathbf{K} = (\mathbf{HP})^{-1}\,\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1\,,$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQ}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1})\,\mathbf{P}_1\,,$$

takže

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{H}(\mathbf{QP}^{-1})\,\mathbf{H}^{-1}\,. \tag{113}$$

Jsou tedy matice $\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}$, $\mathbf{QP}^{-1}$ podobné.

Jsou-li naopak matice $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$ regulární a jsou-li obě matice

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1},\ \mathbf{QP}^{-1}$$

podobné, takže existuje taková regulární matice $\mathbf{H}$, že platí (113), můžeme určit matici $\mathbf{K}$ vzorcem

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1\,.$$

Pak máme

$$\mathbf{HPK} = \mathbf{HP}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1) = \mathbf{H}(\mathbf{PP}^{-1})\,\mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1 = (\mathbf{HH}^{-1})\,\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{HQK} = (\mathbf{HQP}^{-1}\mathbf{H}^{-1})\,\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\,.$$

Proto existují regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, které splňují vztahy (112). Odtud plyne tvrzení věty 20.2 už bez obtíží.

20.3. Věta. Nechť $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$; $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_1$ jsou dva páry takových čtvercových matic téhož stupně n, že je

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_1| = 0\,,$$

avšak při vhodných číslech λ_0, μ_0 je

$$|\lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q}| \neq 0\,.$$

Pak existují takové regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ stupně n, že platí vztahy (112), právě když obě matice

$$\mathbf{Q}(\lambda_0\mathbf{P} + \mu_0\mathbf{Q})^{-1}\,,\quad \mathbf{Q}_1(\lambda_0\mathbf{P}_1 + \mu_0\mathbf{Q}_1)^{-1}$$

mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz: Z předpokladu plyne, že matice

$$\mathbf{R} = \lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q}$$

je regulární, takže $|\mathbf{R}| \neq 0$, přičemž je zřejmě $\lambda_0 \mu_0 \neq 0$. Existují-li regulární matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ takové, že platí (112), je

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_0 \mathbf{P}_1 + \mu_0 \mathbf{Q}_1 = \lambda_0 \mathbf{HPK} + \mu_0 \mathbf{HQK} = \mathbf{H}(\lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q})\, \mathbf{K},$$

takže

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{HRK},$$

a současně platí

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQK}.$$

Proto

$$|\mathbf{R}_1| = |\mathbf{H}|\,|\mathbf{R}|\,|\mathbf{K}| \neq 0$$

a matice

$$\mathbf{QR}^{-1}, \quad \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1^{-1}$$

jsou podobné, jak plyne z předešlé věty 20.2.

Když naopak $|\mathbf{R}_1| \neq 0$ a jsou-li $\mathbf{QR}^{-1}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1^{-1}$ podobné, existují takové regulární čtvercové matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ stupně n, že

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{HRK}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQK},$$

takže

$$\lambda_0 \mathbf{P}_1 + \mu_0 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}(\lambda_0 \mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{Q})\, \mathbf{K} = \lambda_0 \mathbf{HPK} + \mu_0 \mathbf{HQK},$$

$$\mu_0 \mathbf{Q}_1 = \mu_0 \mathbf{HQK}.$$

Odečtením obou rovnic obdržíme

$$\lambda_0 \mathbf{P}_1 = \lambda_0 \mathbf{HPK}.$$

Současně je

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{HQK}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda_0 \neq 0$, plynou odtud vztahy (112).