17. CHARAKTERISTICKÁ ČÍSLA MATICE

Úvahy obsažené v následujících odst. 17.1. – 20.3. tvoří v hlavních rysech teorii, která pochází od českého matematika Eduarda Weyra (1852 – 1894). Tato teorie je založena na pojmu tzv. charakteristických čísel. Weyrova teorie je obsahově rovnocenná s důležitou teorií elementárních dělitelů, o níž bude řeč v odst. 22.1. – 23.6. a svojí průhlednou algebraickou strukturou ji předčí.

17.1. Úmluva a označení. 1. V dalším vezmeme v úvahu libovolnou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ stupně $n \geqq 1$, o níž budeme předpokládat, že její charakteristická rovnice má 0 za α-násobný kořen, *přičemž* $\alpha \geqq 1$.

2. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ použijeme označení

$$\gamma_k = \text{nul}\, \boldsymbol{A}^k .$$

17.2. Věta. Číslo 0 je α-násobným kořenem charakteristických rovnic všech matic $\boldsymbol{A}^k$, kde k je libovolné přirozené číslo.

Důkaz: Buďte

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\alpha}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-\alpha}$$

kořeny charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, kde $\lambda_1 \,.\, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-\alpha} \neq 0$. Pak podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{A}^k$ kořeny

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\alpha}, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_{n-\alpha}^k .$$

17.3. Věta. Značí-li α násobnost kořene 0 charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, pak pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí

$$\gamma_k \leqq \alpha . \tag{77}$$

D ů k a z: a) Tvrzení je zřejmě správné pro $k = 0$, neboť $\gamma_0 = 0 < \alpha$.

b) Dokážeme je pro $k = 1$. Podle 9.3.2 je charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{A}$

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + S_n = 0,$$

kde S_j značí součet hlavních minorů řádu j v matici $\boldsymbol{A}$. Protože 0 je α-násobný kořen rovnice $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$, je

$$S_{n-\alpha} \neq 0 .$$

Odtud plyne, že v matici $\boldsymbol{A}$ je aspoň jeden minor řádu $n - \alpha$ nenulový. Proto hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je $a \geqq n - \alpha$, takže

$$a = n - \gamma_1 \geqq n - \alpha ,$$

a tedy

$$\gamma_1 \leqq \alpha .$$

3. Pro $k > 1$ tvrzení plyne z věty 17.2 vzhledem k předešlému výsledku (pro $k = 1$).

17.4. Věta. Nechť α je násobnost kořene 0 charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$.

Pak pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí vztahy

1. Vždy je

$$\gamma_k \leqq \gamma_{k+1} ; \tag{78}$$

2. když pro určité k platí $\gamma_k = \alpha$, pak je

$$\alpha = \gamma_k = \gamma_{k+1} \ldots ;$$

3. když pro určité k je $\gamma_k < \alpha$, pak

$$\gamma_k < \gamma_{k+1} ; \tag{79}$$

4. vždy je

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \geqq \gamma_{k+2} - \gamma_{k+1} . \tag{80}$$

D ů k a z: 1. První tvrzení plyne ze vztahu $\boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k . \boldsymbol{A}$ podle věty 16.7, podle něhož je

$$n - \gamma_{k+1} \leqq n - \gamma_k .$$

2. Je-li $\gamma_k = \alpha$, pak podle (78) a (77) máme

$$\alpha = \gamma_k \leqq \gamma_{k+1} \leqq \alpha\,,$$

takže

$$\gamma_{k+1} = \alpha = \gamma_{k+2} = \ldots.$$

3. Buď $\gamma_k < \alpha$. Tvrzení 3 dokážeme úplnou indukcí vzhledem ke stupni matice. Ukážeme nejprve že tvrzení platí pro každou matici stupně $n = 1$. Nechť je $\boldsymbol{A} = [a]$ matice stupně $n = 1$, jejíž charakteristická rovnice má α-násobný $(\alpha \geqq 1)$ kořen $\lambda = 0$. Zde je $\alpha = 1$, takže $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. Máme tedy

$$\gamma_0 = 0\,, \quad 1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots.$$

Je-li tedy při některém $k \geqq 0$ nulita $\gamma_k < \alpha$ (v našem případě pro $k = 0$), pak je

$$0 = \gamma_0 = \gamma_k < \gamma_{k+1} = \gamma_1 = 1\,.$$

Nechť tedy matice $\boldsymbol{A}$ má stupeň $n \geqq 2$ a předpokládejme, že dokazované tvrzení je správné pro všechny matice stupně $\leqq n - 1$.

Když $k = 0$, je $\gamma_0 = 0 < \alpha$ a skutečně je $\gamma_0 < \gamma_1$ $(\geqq 1)$.

Nechť je $\gamma_k < \alpha$ pro určité $k \geqq 1$. Pak nutně $\gamma_1 < n$. Podle vět 16.13 a 16.14 existuje matice $\boldsymbol{L}$ řádu $n - \gamma_1$ $(< n)$ taková, že má $(\alpha - \gamma_1)$-násobný charakteristický kořen 0 a pro $j = 1, 2, \ldots$ platí

$$\gamma_j = \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{j-1}\,. \tag{81}$$

Odtud pro $j = k$ máme

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} = \gamma_k - \gamma_1 < \alpha - \gamma_1\,,$$

takže podle indukčního předpokladu je

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} < \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k\,.$$

Proto je

$$\gamma_k - \gamma_{k+1} = \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} - \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k < 0\,,$$

čímž je dokázáno tvrzení 3.

4. Tvrzení 4 dokážeme opět indukcí vzhledem ke stupni matice. Ukažme předně, že platí pro každou matici stupně $n = 1$. Nechť $\boldsymbol{A} = [a]$ je libovolná matice stupně 1, jejíž charak-

teristický kořen $\lambda = 0$ je α-násobný (kde $\alpha \geqq 1$). Proto je

$$\gamma_0 = 0, \quad 1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots,$$

takže tvrzení je správné.

Nechť nyní matice $\boldsymbol{A}$ je stupně $n \geqq 2$ a předpokládejme, že tvrzení 4 je správné pro všechny matice stupně $m \leqq n - 1$. Pro $k = 0$ věta platí podle vztahu (76). Nechť tedy $k \geqq 1$.

Je-li $\gamma_1 = n$, máme

$$n = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots$$

a tvrzení zřejmě platí.

Nechť tedy $\gamma_1 < n$. Použijme vztahu (81). Dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} - \gamma_k \quad &= \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k \quad - \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1}, \\ \gamma_{k+2} - \gamma_{k+1} &= \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k+1} - \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k. \end{aligned}$$

Protože matice $\boldsymbol{L}$ je stupně $< n$, podle indukčního předpokladu pravá strana první rovnosti není menší než pravá strana druhé rovnosti, tj.

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k - \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} \geqq \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k+1} - \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^k,$$

čímž je tvrzení 4 dokázáno.

17.5. Upozornění. Podle věty 17.4.2 a 17.4.3 soudíme, že v posloupnosti matic

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \dots, \boldsymbol{A}^r, \dots \tag{82}$$

existuje první matice $\boldsymbol{A}^r$ taková, že její nulita

$$\gamma_r = \alpha,$$

a pak také všechny následující matice mají nulitu rovnou α.

Naproti tomu nulity předcházejících matic (před $\boldsymbol{A}^r$) rostou, takže je

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r = \alpha = \gamma_{r+1} = \dots$$

Mimoto platí pro každá tři sousední čísla $\gamma_k, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}$ vztah (80). Položme

$$\alpha_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \dots, \alpha_r = \gamma_r - \gamma_{r-1}. \tag{83}$$

Pak nulity matic (82) postupně jsou

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha\,.$$

Přitom všechna čísla

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

jsou přirozená a podle (80) splňují vztahy

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_r > 0\,. \tag{84}$$

17.6. Definice charakteristických čísel matice. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice stupně n a nechť a je α-násobný ($\alpha \geqq 1$) kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$, takže 0 je α-násobný kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} - a\mathbf{E}$. Nechť

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha$$

značí nulity matic

$$\mathbf{A} - a\mathbf{E}, (\mathbf{A} - a\mathbf{E})^2, \ldots, (\mathbf{A} - a\mathbf{E})^r\,.$$

Pak přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ se nazývají *charakteristická čísla* matice $\mathbf{A}$, příslušná k jejímu charakteristickému kořenu a.

17.7. Poznámka. Podle poznámky 9.3.3. má matice $\mathbf{A}'$ sdružená s maticí $\mathbf{A}$ tytéž kořeny jako tato. Dále platí, že při každém čísle a a celém $k = 0, 1, \ldots,$ jsou matice $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^k$, $(\mathbf{A}' - a\mathbf{E})^k$ sdružené; tedy mají stejnou hodnost, a tedy i nulitu. Vidíme, že k témuž kořenu matice $\mathbf{A}$ a s ní sdružené matice $\mathbf{A}'$ přísluší stejná charakteristická čísla těchto matic.

Příklad 20. Určeme charakteristická čísla příslušná k charakteristickému kořenu 0 matice $\mathbf{A}$ z příkladu 19 (odst. 15.12). Řešení: Charakteristický polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

je $\varphi(\lambda) = \lambda^4$, jak jsme zjistili v příkladu 19. Má proto daná matice čtyřnásobný charakteristický kořen $\lambda = 0$.

Podle výpočtu minorů 3. řádu v uvedeném příkladu jsou pro $\lambda = 0$ tyto minory vesměs rovny nule. Proto matice $\boldsymbol{A}$ má všechny minory řádu 3 rovny nule. Naproti tomu existují v matici $\boldsymbol{A}$ nenulové minory řádu 2, např. minor v levém rohu nahoře. Má tedy matice $\boldsymbol{A}$ hodnost $h_1 = 2$ a její nulita je

$$\gamma_1 = \alpha_1 = 4 - 2 = 2\,.$$

Utvořme nyní $\boldsymbol{A}^2$. Obdržíme

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že $\boldsymbol{A}^2$ má hodnost $h_2 = 1$, takže její nulita je

$$\gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4 - 1 = 3\,.$$

Odtud dostáváme

$$\alpha_2 = 1\,.$$

Konečně se zjistí, že $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$, takže její hodnost $h_3 = 0$ a nulita

$$\gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4\,.$$

Proto je

$$\alpha_3 = 1\,.$$

Proto k (čtyřnásobnému) charakteristickému kořenu 0 matice $\boldsymbol{A}$ přísluší charakteristická čísla

$$\alpha_1 = 2\,, \quad \alpha_2 = 1\,, \quad \alpha_3 = 1\,.$$

17.8. Věta o minimálním polynomu matice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná čtvercová matice stupně n a nechť

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$

jsou vzájemně různé kořeny charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, přičemž $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ značí násobnosti těchto kořenů.

Nechť charakteristická čísla příslušná ke kořenu

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \text{ jsou } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p_1}, \\ \lambda_2 \text{ jsou } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_s \text{ jsou } \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p_s}. \end{array}$$

Pak polynom

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$

je minimální polynom matice $\mathbf{A}$.

Důkaz: Podle definice charakteristických čísel, matice

$$\begin{array}{l} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1} \text{ má nulitu } \alpha, \\ (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^{p_2} \text{ má nulitu } \beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{E})^{p_s} \text{ má nulitu } \sigma. \end{array}$$

Protože polynomy

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$

jsou nesoudělné, má podle věty 16.9 matice

$$\psi(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^{p_2} \ldots (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{E})^{p_s}$$

nulitu

$$\alpha + \beta + \ldots + \sigma = n,$$

takže

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Splňuje tedy matice $\mathbf{A}$ rovnici $\psi(\lambda) = 0$.

Nechť $f(\lambda)$ je libovolný polynom a nechť $d(\lambda)$ je největší společný dělitel polynomů $f(\lambda)$, $\psi(\lambda)$. Pak existují takové polynomy $f_1(\lambda)$, $\psi_1(\lambda)$, že je

$$f_1(\lambda) f(\lambda) + \psi_1(\lambda)\, \psi(\lambda) = d(\lambda).$$

Odtud plyne

$$f_1(\mathbf{A}) f(\mathbf{A}) + \psi_1(\mathbf{A})\, \psi(\mathbf{A}) = d(\mathbf{A}).$$

Protože $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, je

$$f_1(\mathbf{A}) f(\mathbf{A}) = d(\mathbf{A}). \tag{85}$$

Když se nějaký vektor $\mathbf{x}$ lineární substitucí o matici $f(\mathbf{A})$ transformuje v nulový vektor $\mathbf{0}$, takže

$$f(\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

podle (85) platí

$$d(\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Proto

$$\operatorname{nul} f(\mathbf{A}) \leqq \operatorname{nul} d(\mathbf{A}).$$

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $f(\lambda)$, při vhodném polynomu $d_1(\lambda)$ máme

$$d_1(\lambda)\, d(\lambda) = f(\lambda), \tag{86}$$

takže

$$d_1(\mathbf{A})\, d(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}).$$

Když pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ platí

$$d(\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

pak je

$$f(\mathbf{A}) \mathbf{x} = d_1(\mathbf{A}) [d(\mathbf{A}) \mathbf{x}] = \mathbf{0}.$$

Odtud plyne

$$\operatorname{nul} d(\mathbf{A}) \leqq \operatorname{nul} f(\mathbf{A}),$$

takže vzhledem k hořejšímu výsledku dostáváme

$$\operatorname{nul} f(\mathbf{A}) = \operatorname{nul} d(\mathbf{A}).$$

Předpokládejme nyní, že $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, takže

$$\operatorname{nul} f(\mathbf{A}) = n = \operatorname{nul} d(\mathbf{A}).$$

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $\psi(\lambda)$, při vhodném $q(\lambda)$ máme

$$\psi(\lambda) = q(\lambda)\, d(\lambda).$$

Je-li $d(\lambda)$ nižšího stupně než $\psi(\lambda)$, je

$$\text{nul}\, d(\mathbf{A}) < n\,.$$

Polynom $d(\lambda)$ je pak totiž součinem polynomů

$$(\lambda - \lambda_1)^{c_1}, (\lambda - \lambda_2)^{c_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{c_s}\,,$$

kde $0 \leqq c_i \leqq p_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, přičemž alespoň pro jeden index j platí $c_j < p_j$, takže $\text{nul}\,(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})^{c_j}$ je menší než násobnost kořene λ_j. Podle 16.9 je tedy

$$\text{nul}\, d(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{s} \text{nul}\,(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{c_i} < \alpha + \beta + \ldots + \sigma = n\,.$$

Proto

$$\psi(\lambda) = c \,.\, d(\lambda)\,, \text{ kde } c \neq 0 \text{ je konstanta}\,.$$

Z (86) plyne

$$f(\lambda) = \frac{1}{c}\, d_1(\lambda)\, \psi(\lambda)\,.$$

Vychází tedy, že každý polynom $f(\lambda)$, pro nějž $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, je dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$. Zejména je tedy minimální polynom dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$, a tedy $\psi(\lambda)$ je minimální polynom matice $\mathbf{A}$.

Tím je důkaz proveden.

17.9. Poznámka. Posloupnost čísel

$$[(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{p_2}), \ldots, (\sigma_1, \ldots, \sigma_{p_s})]$$

skládající se ze skupin všech charakteristických čísel příslušných k jednotlivým vzájemně různým kořenům matice $\mathbf{A}$, přičemž čísla v každé skupině jsou uspořádána jako (84), nazývá se *Weyrova charakteristika* matice $\mathbf{A}$.

Vidíme, že součet členů v každé skupině Weyrovy charakteristiky se rovná násobnosti příslušného kořene matice $\mathbf{A}$, a tedy součet všech členů v charakteristice dává stupeň matice $\mathbf{A}$.