16. HODNOST A NULITA MATICE

Pojem hodnosti matice, známý z nauky o determinantech, jsme uvedli v poznámce 1.6. S pojmem hodnosti matice úzce souvisí pojem nulity čtvercové matice.

16.1. Definice nulity matice. Je-li $\boldsymbol{A}$ *čtvercová* matice stupně n a je-li a její hodnost, pak *nulitou* matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\alpha = n - a\,;$$

značíme je symbolem nul $\boldsymbol{A}$.

16.2. Poznámka. Z předešlé definice nulity matice plyne, že když má matice $\boldsymbol{A}$ nulitu α, existuje v matici $\boldsymbol{A}$ aspoň jeden nenulový determinant stupně $a = n - \alpha > 0$, kdežto všechny determinanty řádu $n - \alpha + 1$, pokud existují, jsou rovny nule.

16.3. Poznámka. Výrok, že matice $\boldsymbol{A}$ stupně n má nulitu $\alpha = n$, znamená, že všechny prvky matice $\boldsymbol{A}$ jsou nuly.

Naproti tomu výrok, že matice $\boldsymbol{A}$ stupně n má nulitu $\alpha = 0$, značí, že $\boldsymbol{A}$ je regulární.

Uveďme ještě následující dvě věty 16.4 a 16.6, které se dokazují v teorii lineárních rovnic.

16.4. Věta. 1. Nechť matice $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$ je čtvercová stupně n a má nulitu α.

Pak existuje α nezávislých řešení soustavy n homogenních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{61}$$

2. Když naopak existuje k nezávislých řešení soustavy (61), pak pro nulitu α matice $\boldsymbol{A}$ platí

$$\alpha \geqq k .$$

16.5. Poznámky. 1. Každý systém nezávislých řešení v počtu α soustavy (61) tvoří fundamentální systém řešení v tom smyslu, že každé řešení soustavy rovnic (61) je lineární kombinací jednotlivých řešení fundamentálního systému. Přitom se fundamentální systém řešení soustavy (61) nalezne, když se např. Frobeniovou metodou určí fundamentální systém řešení soustavy redukované ze soustavy (61), tj. soustavy skládající se z nezávislých rovnic v počtu $a = n - \alpha$ vybraných ze soustavy (61). Srov. poznámku 6.3.

2. Soustava (61) určuje zřejmě takové vektory $\boldsymbol{x}$ v n-rozměrném prostoru, jejichž transformované vektory.

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

vzniklé lineární transformací o matici $\boldsymbol{A}$ jsou nulové. Podle věty 16.4. je nul $\boldsymbol{A}$ rovna největšímu počtu lineárně nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}$ transformují na nulový vektor.

16.6. Věta. Libovolná matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}_1$ vzniklá z $\boldsymbol{A}$ rozšířením o sloupec, který je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$, mají stejnou hodnost.

Podobně je tomu, je-li matice $\boldsymbol{A}_1$ rozšířena o řádek, který je lineární kombinací řádků dané matice $\boldsymbol{A}$.

Důkaz přenecháváme čtenáři.

V dalším výkladu se obeznámíme s několika jinými důležitými větami o hodnosti, popř. nulitě matic.

16.7. Věta o hodnosti součinu dvou matic. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ čtvercové matice stupně n a jsou-li a, b jejich hodnosti, pak pro hodnost c matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ platí vztah

$$c \leqq a , \quad c \leqq b . \tag{62}$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{A} = \|a_{jk}\|$, $\boldsymbol{B} = \|b_{jk}\|$, $\boldsymbol{AB} = \|c_{jk}\|$. Pak podle věty 16.6 mají stejnou hodnost matice $\boldsymbol{A}$ a matice

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \; a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \; a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \; c_{11} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \; c_{n1} \end{bmatrix}.$$

Podobně mají stejnou hodnost matice $\boldsymbol{A}$ a matice

$$\boldsymbol{A}_n = \left[\begin{array}{c:c} a_{11} \dots a_{1n} & c_{11} \dots c_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & c_{n1} \dots c_{nn} \end{array}\right] = [\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{AB}] .$$

Protože matice $\boldsymbol{AB} = \|c_{jk}\|$ o hodnosti c je částí matice $\boldsymbol{A}_n$, máme

$$c \leqq a .$$

Podle věty 16.4 existuje $n - b$ lineárně nezávislých řešení rovnice $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$. Každé takové řešení vyhovuje rovnicím

$$(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} ,$$

neboť je

$$(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) = \boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0} .$$

Avšak nezávislých řešení soustavy $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ je nanejvýš $n - c$.

Proto

$$n - c \geqq n - b \quad \text{neboli} \quad c \leqq b .$$

16.8. Věta o nulitě součinu dvou matic. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice stupně n a nechť α, β jsou jejich nulity. Je-li γ nulita matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, pak platí vztah

$$\gamma \leqq \alpha + \beta . \tag{63}$$

To znamená, že nulita součinu dvou čtvercových matic téhož stupně n je nanejvýš rovna součtu nulit obou matic.

Důkaz: Podle definice nulity existují lineárně nezávislé vektory

a) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_\alpha$ (v počtu α), přičemž $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$,
b) $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_\beta$ (v počtu β), přičemž $\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$,
c) $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_\gamma$ (v počtu γ), přičemž $\boldsymbol{C}\boldsymbol{c}_h = \boldsymbol{0}$,

kde $j = 1, 2, \dots, \alpha$; $k = 1, 2, \dots, \beta$; $h = 1, 2, \dots, \gamma$. Ze vztahu

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0},$$

plyne

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}_k) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b}_k,$$

takže je

$$\gamma \geqq \beta.$$

i) Je-li $\gamma = \beta$, je zřejmě $\gamma \leqq \alpha + \beta$.

ii) Buď $\gamma > \beta$. Pak za vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_\gamma$ můžeme zvolit vektory

$$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_\beta, \boldsymbol{c}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{c}_\gamma.$$

Označme pro $i = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \gamma$:

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}_i. \tag{64}$$

Pak je

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}_i) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{0}.$$

Tvrdíme, že vektory $\boldsymbol{y}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{y}_\gamma$ jsou nezávislé. Kdyby totiž byly závislé, existoval by nenulový vektor $\boldsymbol{a}$ o $\gamma - \beta$ složkách takový, že

$$[\boldsymbol{y}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{y}_\gamma]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

kde $[\boldsymbol{y}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{y}_\gamma]$ značí matici, jejíž jednotlivé sloupce představují vektory

$$\boldsymbol{y}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{y}_\gamma.$$

Ze vztahu (64) dostáváme

$$[\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}_\gamma]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

takže

$$\boldsymbol{B}[\boldsymbol{c}_{\beta+1}, \dots, \boldsymbol{c}_\gamma]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

neboli

$$\boldsymbol{B}([\boldsymbol{c}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_\gamma]\, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}\,.$$

Vektor $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{c}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_\gamma]\, \boldsymbol{a}$ není nulový, neboť jinak by vektory

$$\boldsymbol{c}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_\gamma$$

byly závislé, což je proti předpokladu. Protože vektor $\boldsymbol{r}$ se transformuje maticí $\boldsymbol{B}$ v nulový vektor, je závislý na vektorech $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta$. Vzhledem k tomu jsou vektory

$$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta, \boldsymbol{c}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_\gamma$$

závislé. To však je proti předpokladu. Proto vektory $\boldsymbol{y}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{y}_\gamma$ jsou nezávislé, jak jsme tvrdili.

Podle předpokladu však existuje nejvýše α nezávislých vektorů takových, že se maticí $\boldsymbol{A}$ transformují v nulový vektor. Proto

$$\gamma - \beta \leqq \alpha$$

a odtud

$$\gamma \leqq \alpha + \beta\,.$$

Tím je věta dokázána. Ve zvláštních případech (viz věty 16.9 a 16.10) je nulita součinu dvou matic právě rovna součtu nulit obou matic.

16.9. Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice stupně n. Nechť $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ jsou libovolné nesoudělné polynomy.
Pak je

$$\operatorname{nul}[f(\boldsymbol{A}) \,.\, g(\boldsymbol{A})] = \operatorname{nul} f(\boldsymbol{A}) + \operatorname{nul} g(\boldsymbol{A})\,.$$

D ů k a z: Nulity matic $f(\boldsymbol{A})$, $g(\boldsymbol{A})$, $f(\boldsymbol{A}) \,.\, g(\boldsymbol{A})$ označme postupně symboly α, β, γ. Podle věty 16.8 platí

$$\gamma \leqq \alpha + \beta\,.$$

Stačí proto dokázat, že $\gamma \geqq \alpha + \beta$.

Protože $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ jsou nesoudělné polynomy, existují polynomy $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ takové, že

$$f(\lambda)\, F(\lambda) + g(\lambda)\, G(\lambda) = 1\,.$$

Pak je

$$f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A}) + g(\boldsymbol{A})\,G(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}\,. \tag{65}$$

Protože $\alpha = \operatorname{nul} f(\boldsymbol{A})$, $\beta = \operatorname{nul} g(\boldsymbol{A})$, existují nezávislé vektory

a) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\alpha$ takové. že pro $j = 1, 2, \ldots, \alpha$ platí $f(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$,

b) $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_\beta$ takové, že pro $k = 1, 2, \ldots, \beta$ platí $g(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$.

Tvrdíme, že vektory

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\alpha\,, \quad \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_\beta \tag{66}$$

jsou nezávislé.

Jsou-li totiž závislé, existuje vektor $\boldsymbol{z}$ o $\alpha + \beta$ složkách takový, že aspoň jedna z jeho prvních α a posledních β souřadnic je nenulová, a platí

$$[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_\beta]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\,. \tag{67}$$

Násobíme-li tuto rovnici maticí (65), obdržíme vzhledem k vztahům

$$g(\boldsymbol{A})\,G(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_k = G(\boldsymbol{A})\,[g(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_k] = G(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

vztah

$$[\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_1, \ldots, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_\beta]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

neboli

$$[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_1, \ldots, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_\beta]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\,. \tag{68}$$

Z rovnice (67) násobením maticí $\boldsymbol{C} = f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})$ dostaneme

$$[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_\beta]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\,.$$

Protože pak

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_j = f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_j = F(\boldsymbol{A})\,f(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_j = F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\,,$$

z předešlé rovnice plyne

$$[\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_1, \ldots, f(\boldsymbol{A})\,F(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{y}_\beta]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\,.$$

Odečtením této rovnice od rovnice (68) obdržíme

$$[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}]\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\,. \tag{69}$$

Protože aspoň jedna z prvních α souřadnic vektoru $\mathbf{z}$ je nenulová, plyne z rovnice (69), že vektory, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\alpha$ jsou závislé. To však je proti předpokladu. Tím je ukázáno, že vektory (66) jsou nezávislé.

Každý z vektorů (66) vyhovuje relaci

$$f(\mathbf{A})\, g(\mathbf{A})\, \mathbf{x}_j = \mathbf{0}\,,$$

$$f(\mathbf{A})\, g(\mathbf{A})\, \mathbf{y}_k = \mathbf{0}\,,$$

neboť matice $f(\mathbf{A})$, $g(\mathbf{A})$ jsou zaměnitelné. Proto $\gamma \geqq \alpha + \beta$, čímž je věta dokázána.

16.10. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice o nulitě α, kdežto $\mathbf{B}$ je regulární matice téhož stupně n, takže nul $\mathbf{B} = \beta = 0$. Pak je

$$\text{nul}\ \mathbf{AB} = \text{nul}\ \mathbf{A} + \text{nul}\ \mathbf{B} = \text{nul}\ \mathbf{A}\,,$$

$$\text{nul}\ \mathbf{BA} = \text{nul}\ \mathbf{B} + \text{nul}\ \mathbf{A} = \text{nul}\ \mathbf{A}\,.$$

Důkaz: Podle vět 16.7 a 16.8 je např.

$$\alpha = \max(\alpha, \beta) \leqq \text{nul}\ \mathbf{AB} \leqq \alpha + \beta = \alpha\,,$$

takže

$$\alpha \leqq \text{nul}\ \mathbf{AB} \leqq \alpha\,,$$

a tedy

$$\text{nul}\ \mathbf{AB} = \alpha = \alpha + \beta\,.$$

16.11. Poznámka. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice stupně n. Nechť $\mathbf{Q}$ je regulární čtvercová matice téhož stupně n. Pak podle věty 16.10 má matice $\mathbf{AQ}$, a tedy i matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}\,, \tag{70}$$

touž nulitu jako matice $\mathbf{A}$.

16.12. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je matice stupně n a $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$, kde $\mathbf{Q}$ je libovolná regulární matice téhož stupně n. Pak platí tato dvě tvrzení:

1. $$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}|\,, \tag{71}$$

takže matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{B}$ mají stejný charakteristický polynom.

2. Pro libovolné přirozené k platí

$$\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}\,. \tag{72}$$

Důkaz: 1. Protože

$$\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} - \lambda\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{Q}\,,$$

máme $|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{Q}^{-1}|\,|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$.

2. Úplnou indukcí. Pro $k = 1$ vztah (72) je správný. Buď $k > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro exponent $k - 1$. Pak je

$$\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}) =$$
$$= \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1})\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}\,.$$

16.13. Věta. Nechť γ $(1 \leqq \gamma < n)$ značí nulitu čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ stupně n. Pak existuje regulární matice $\boldsymbol{Q}$ taková, že matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ je tvaru

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\gamma \\ \}n-\gamma \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{\gamma} & \underbrace{\quad}_{n-\gamma} \end{array} \end{array}, \tag{73}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je určitá matice typu $\gamma(n - \gamma)$, kdežto $\boldsymbol{L}$ je čtvercová matice stupně $n - \gamma$.

Důkaz: Protože $\gamma\,(\geqq 1)$ je nulita matice $\boldsymbol{A}$, existují nezávislé vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\gamma$ takové, že se lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}$ transformují v nulový vektor. Nechť

$$\boldsymbol{x}_{\gamma+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$$

značí další vektory takové, že všechny vektory

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$$

jsou nezávislé. Pak matice

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$$

je regulární a matice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ má v prvních sloupcích v počtu γ samé nuly. Totéž platí o matici $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$. Tím je tvrzení dokázáno.

16.14. Věta. Mezi maticemi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{L}$, o nichž je řeč v předešlé větě 16.13, platí tyto vztahy:

1. $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (-\lambda)^{\gamma_1} |\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{E}|$;

2. $\operatorname{nul} \boldsymbol{A}^k = \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots,$

3. $\operatorname{nul} \boldsymbol{L} \leqq \gamma_1$.

Přitom je $\gamma_1 = \operatorname{nul} \boldsymbol{A}$.

Důkaz: 1. Podle (71) je $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}|$. Z tvaru matice (73) plyne

$$|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}| = (-\lambda)^{\gamma_1} |\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{E}|,$$

odkud plyne tvrzení 1.

2. Podle odst. 16.11 a věty 16.12.2 platí pro $k = 1, 2, \ldots$ vztah

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{A}^k = \operatorname{nul} \boldsymbol{B}^k .$$

Proto stačí ukázat, že je

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{B}^k = \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} . \tag{74}$$

Pro $k = 1$ je vztah zřejmě správný. Proto předpokládejme, že $k > 1$. Je zřejmé, že

$$\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{B}^{k-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_1 \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \\ \scriptstyle \gamma_1 \quad n-\gamma_1 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{k-1} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}^{k-1} \end{array}\right] \\ \scriptstyle \gamma_1 \quad n-\gamma_1 \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_k \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}^k \end{array}\right] \\ \scriptstyle \gamma_1 \quad n-\gamma_1 \end{array} \begin{array}{l} \}\scriptstyle \gamma_1 \\ \}\scriptstyle n-\gamma_1 \\ \end{array},$$

kde $\boldsymbol{K}_{k-1}$, $\boldsymbol{K}_k$ značí vhodné matice. Protože nulita matice $\boldsymbol{B}$ je γ_1 a její hodnost $n - \gamma_1$, jsou poslední sloupce v počtu $n - \gamma_1$ v matici $\boldsymbol{B}$ lineárně nezávislé. Poslední sloupce v počtu $n - \gamma_1$ v poslední matici $\boldsymbol{B}^k$ jsou lineárními kombinacemi oněch sloupců v matici $\boldsymbol{B}$, přičemž koeficienty v těchto lineárních kombinacích jsou souřadnicemi vektorů v $(n - \gamma_1)$-rozměrném prostoru. Tyto vektory jsou sloupce matice $\boldsymbol{L}^{k-1}$. Označíme-li tedy písmeny $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ libovolné stejnolehlé matice řádu $n - \gamma_1$, utvořené z posledních $n - \gamma_1$ sloupců matic $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^k$, máme vztah

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^{k-1} .$$

Hodnost matice $\boldsymbol{B}^k$ je rovna hodnosti takové matice $\boldsymbol{Y}$, která má největší možnou hodnost, a tedy nejmenší nulitou. Protože podle vět 16.7 a 16.8 je

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1} \leqq \operatorname{nul} \boldsymbol{Y} \leqq \operatorname{nul} \boldsymbol{X} + \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1}, \tag{75}$$

vidíme, že nejmenší nulitu má taková matice $\boldsymbol{Y}$, jejíž stejnolehlá matice $\boldsymbol{X}$ má nulitu 0. Taková matice $\boldsymbol{X}$ existuje, neboť poslední sloupce v počtu $n - \gamma_1$ v matici $\boldsymbol{B}$ jsou lineárně nezávislé. Zvolíme-li tedy za $\boldsymbol{X}$ uvažovanou matici, podle (75) obdržíme vztah

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{Y} = \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1}.$$

Odtud máme

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{B}^k = n - \operatorname{hodnost} \boldsymbol{B}^k = n - \operatorname{hodnost} \boldsymbol{Y} =$$
$$= n - n + \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{Y} = \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{Y} = \gamma_1 + \operatorname{nul} \boldsymbol{L}^{k-1}.$$

Tím je dokázáno tvrzení 2.

3. Podle předešlého tvrzení pro $k = 2$ máme

$$\operatorname{nul} \boldsymbol{L} = \gamma_2 - \gamma_1,$$

kde $\gamma_1 = \operatorname{nul} \boldsymbol{A}$, $\gamma_2 = \operatorname{nul} \boldsymbol{A}^2$. Protože matice $\boldsymbol{L}$ je řádu $n - \gamma_1$, její hodnost je

$$n - \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1) = n - \gamma_2.$$

Proto obsahuje právě $n - \gamma_2$ nezávislých řádků. Odtud plyne, že v posledních $n - \gamma_1$ řádcích matice $\boldsymbol{B}$ je právě $n - \gamma_2$ nezávislých řádků. Tedy hodnost matice $\boldsymbol{B}$ je nanejvýš rovna číslu $n - \gamma_2 + \gamma_1$, takže

$$\gamma_1 = \operatorname{nul} \boldsymbol{B} \geqq n - (n - \gamma_2 + \gamma_1) = \gamma_2 - \gamma_1$$

čímž je dokázáno i tvrzení 3.

16.15. Poznámka. Všimněme si, že výsledek 16.14.3 můžeme zapsat ve tvaru

$$\gamma_1 - \gamma_0 \geqq \gamma_2 - \gamma_1, \tag{76}$$

kde $\gamma_k = \operatorname{nul} \boldsymbol{A}^k$, pro $k = 0, 1, 2$.