

Základy teorie matic

Cvičení 2

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971.
pp. 104--105.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401344>

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

CVIČENÍ 2

11. Dány jsou vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} , přičemž $\mathbf{a}' = [3, 4, -2, 14]$, $\mathbf{b}' = [2, 0, -6, 3]$. Určete $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ ($|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ značí euklidovské délky vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b}).

12. Dokažte, že matice $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh t & -i \sinh t \\ 0 & 0 & i \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$, kde t je reálné

a $i = \sqrt{-1}$, je ortogonální.

(Uvedená matice se vyskytuje v teorii relativity.)

13. Dokažte, že součin dvou ortogonálních matic je matice ortogonální.
14. Dokažte, že pro matici \mathbf{A} stupně 3 platí vztah

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = -\lambda^3 + S_1 \lambda^2 - S_2 \lambda + |\mathbf{A}|,$$

kde $S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ je stopa matice \mathbf{A} , $S_2 = \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{33}$ je součet hlavních minorů stupně 2 v matici \mathbf{A} . (Srov. 9.3.2.)

15. Dokažte, že pro libovolnou matici \mathbf{A} stupně n platí

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = (-1)^n |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|.$$

16. Určete jednotkové charakteristické vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

17. Dokažte, že součet charakteristických kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matice \mathbf{A} je roven její stopě (tj. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$) a jejich součin je roven determinantu $|\mathbf{A}|$. (Použijte věty o symetrických funkcích kořenů.)
18. Dokažte, že všechny charakteristické kořeny matice \mathbf{A} jsou různé od nuly právě tehdy, když je \mathbf{A} regulární. (Použijte výsledku cvičení 17.)

19. Dokažte, že charakteristické kořeny inverzní matice \mathbf{A}^{-1} jsou rovny převráceným hodnotám charakteristických kořenů matice \mathbf{A} .

20. Ověřte Cayleyovu-Hamiltonovu větu o matici $\varphi(\mathbf{A})$, je-li

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Určete charakteristický a minimální polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. Určete minimální polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

11. $\mathbf{a}'\mathbf{b} = 2 \cdot 3 + 0 + 2 \cdot 6 + 14 \cdot 3 = 60, |\mathbf{a}| = \sqrt{(9 + 16 + 4 + 196)} = 15, |\mathbf{b}| = \sqrt{(4 + 0 + 36 + 9)} = 7.$
12. Použijte vztahu $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$
16. Vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, pro něž je $\mathbf{x}'_1 = [1/2, \sqrt{3}/2, 0],$
 $\mathbf{x}'_2 = [-3/4, \sqrt{3}/4, 1/2], \mathbf{x}'_3 = [\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{3}/2].$
 a vektory opačné.
20. $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{O}, \mathbf{A}^2 - 15\mathbf{A}^2 - 18\mathbf{A} = \mathbf{O}, \mathbf{A}^3 - 10\mathbf{A}^2 + 26\mathbf{A} - 9\mathbf{E} = \mathbf{O}.$
21. $\varphi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2, \psi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2).$
22. $\lambda^2 - 4\lambda + 4, \lambda^2 - 5\lambda + 6.$