CVIČENÍ 2

11. Dány jsou vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, přičemž $\boldsymbol{a}' = [3, 4, -2, 14]$, $\boldsymbol{b}' = [2, 0, -6, 3]$. Určete $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ ($|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ značí euklidovské délky vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$).

12. Dokažte, že matice $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh t & -\mathrm{i} \sinh t \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$, kde t je reálné a $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, je ortogonální.

(Uvedená matice se vyskytuje v teorii relativity.)

13. Dokažte, že součin dvou ortogonálních matic je matice ortogonální.

14. Dokažte, že pro matici $\boldsymbol{A}$ stupně 3 platí vztah

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = -\lambda^3 + S_1 \lambda^2 - S_2 \lambda + |\boldsymbol{A}|,$$

kde $S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ je stopa matice $\boldsymbol{A}$, $S_2 = \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{33}$ je součet hlavních minorů stupně 2 v matici $\boldsymbol{A}$. (Srov. 9.3.2.)

15. Dokažte, že pro libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ stupně n platí

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = (-1)^n |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|.$$

16. Určete jednotkové charakteristické vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

17. Dokažte, že součet charakteristických kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matice $\boldsymbol{A}$ je roven její stopě (tj. $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$) a jejich součin je roven determinantu $|\boldsymbol{A}|$. (Použijte věty o symetrických funkcích kořenů.)

18. Dokažte, že všechny charakteristické kořeny matice $\boldsymbol{A}$ jsou různé od nuly právě tehdy, když je $\boldsymbol{A}$ regulární. (Použijte výsledku cvičení 17.)

19. Dokažte, že charakteristické kořeny inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ jsou rovny převráceným hodnotám charakteristických kořenů matice $\boldsymbol{A}$.

20. Ověřte Cayleyovu-Hamiltonovu větu o matici $\varphi(\boldsymbol{A})$, je-li

$$\text{a) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Určete charakteristický a minimální polynom matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. Určete minimální polynom matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

11. $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 2 \,.\, 3 + 0 + 2 \,.\, 6 + 14 \,.\, 3 = 60, |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(9 + 16 + 4 + 196)} = 15, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(4 + 0 + 36 + 9)} = 7.$

12. Použijte vztahu $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

16. Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, pro něž je $\boldsymbol{x}_1' = [1/2, \sqrt{3}/2, 0]$, $\boldsymbol{x}_2' = [-3/4, \sqrt{3}/4, 1/2]$, $\boldsymbol{x}_3' = [\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{3}/2]$.
a vektory opačné.

20. $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^2 - 15\boldsymbol{A}^2 - 18\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^3 - 10\boldsymbol{A}^2 + 26\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$.

21. $\varphi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$, $\psi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$.

22. $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, $\lambda^2 - 5\lambda + 6$.