15. MINIMÁLNÍ POLYNOM MATICE

15.1. Definice vzájemně nezávislých matic. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{M}$ značí matice téhož typu.

Uvedené matice se nazývají *vzájemně nezávislé*, stručněji *nezávislé*, když maticové rovnici

$$x_1\mathbf{A} + x_2\mathbf{B} + \ldots + x_m\mathbf{M} = \mathbf{O} \tag{54}$$

lze vyhovět čísly $x_1, x_2, \ldots, x_m$ jen tehdy, je-li

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0\,.$$

V opačném případě se uvedené matice nazývají *vzájemně závislé*, stručněji *závislé*.

Když zejména $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{M}$ jsou vektory v n-rozměrném prostoru, dává definice 15.1 pojem vzájemně nezávislých, stručněji nezávislých vektorů (7.4).

Příklad 17. Ukažme, že při každém přirozeném čísle $p \leqq n^2$ představuje každých p vzájemně různých matic, které jsou vybrány mezi maticemi $\mathbf{E}_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, matice vzájemně nezávislé

Řešení: Nechť vybrané matice jsou

$$\mathbf{E}_{r_1s_1}, \mathbf{E}_{r_2s_2}, \ldots, \mathbf{E}_{r_ps_p}\,,$$

přičemž ovšem $r_1, r_2, \ldots, r_p$ a podobně $s_1, s_2, \ldots, s_p$ jsou jisté kombinace (s opakováním) utvořené z čísel $1, 2, \ldots, n$. Předpokládáme, že tyto matice jsou vzájemně různé; důsledkem toho je, že každé dvě dvojice jejich indexů se liší alespoň v jednom čísle.

Rovnice (54) má nyní tvar

$$x_{r_1s_1}\mathbf{E}_{r_1s_1} + x_{r_2s_2}\mathbf{E}_{r_2s_2} + \ldots + x_{r_ps_p}\mathbf{E}_{r_ps_p} = \mathbf{O}$$

(kde jsme místo $x_1, x_2, \ldots, x_p$ psali vhodněji $x_{r_1s_1}, x_{r_2s_2}, \ldots, x_{r_ps_p}$). Levá strana této rovnice je matice n-tého řádu $\|c_{jk}\|$, jejíž prvky

$c_{r_1s_1}, c_{r_2s_2}, \ldots, c_{r_ps_p}$ jsou čísla $x_{r_1s_1}, x_{r_2s_2}, \ldots, x_{r_ps_p}$, kdežto všechny ostatní jsou rovny 0. Hořejší maticové rovnici lze tedy vyhovět jenom čísly $x_{r_1s_1} = 0$, $x_{r_2s_2} = 0, \ldots, x_{r_ps_p} = 0$. Tím je důkaz proveden.

Vidíme, že ať zvolíme přirozené číslo $p \leqq n^2$ jakkoli, vždycky existuje p matic stupně n, které jsou vzájemně nezávislé.

Naproti tomu víc než n^2 vzájemně nezávislých matic stupně n neexistuje. To je obsahem následující věty.

15.2. Věta. Libovolné čtvercové matice n-tého stupně

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n^2}, \ldots, \mathbf{A}_{n^2+k}$$

v počtu $n^2 + k > n^2$ jsou vždy vzájemně závislé.

Důkaz: Rovnice

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_r\mathbf{A}_r = \mathbf{O}, \quad \text{kde} \quad r = n^2 + k,$$

zastupuje celkem n^2 lineárních homogenních rovnic o neznámých x_ν v počtu $r = n^2 + k$. Tyto rovnice mají vždy netriviální řešení, neboť neznámých je víc než rovnic.

15.3. Poznámky. 1. Z věty 15.2 plyne, že každý systém vzájemně nezávislých čtvercových matic stupně n obsahuje nejvýš n^2 matic.

2. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice libovolného stupně n, pak ve skupině matic

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^r \quad (r \geqq n^2)$$

existuje matice $\mathbf{A}^p$ taková, že matice

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{p-1}$$

jsou vzájemně nezávislé, kdežto matice

$$\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{p-1}, \mathbf{A}^p$$

jsou vzájemně závislé.

15.4. Definice minimálního polynomu matice. Je-li $p \geqq 1$ celé číslo, o němž je řeč v poznámce 15.3.2, a jsou-li $a_0, a_1, \ldots, a_p$ taková čísla, že $a_0 \neq 0$ a platí

$$a_0 \mathbf{A}^p + a_1 \mathbf{A}^{p-1} + \ldots + a_p \mathbf{A}^0 = \mathbf{O},$$

pak nazýváme *minimální polynom matice* $\mathbf{A}$ polynom

$$\psi(\lambda) = a_0 \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \ldots + a_p \tag{55}$$

15.5. Poznámky. 1. Minimální polynom matice $\mathbf{A}$ je určen jednoznačně až na konstantní od nuly různý faktor.

Vskutku, nechť platí

$$a_0 \mathbf{A}^p + a_1 \mathbf{A}^{p-1} + \ldots + a_p \mathbf{A}^0 = \mathbf{O},$$

$$b_0 \mathbf{A}^p + b_1 \mathbf{A}^{p-1} + \ldots + b_p \mathbf{A}^0 = \mathbf{O},$$

kde $a_0 b_0 \neq 0$. Pak při $\mu = a_0/b_0$ $(\neq 0)$ máme

$$(a_1 - \mu b_1) \,.\, \mathbf{A}^{p-1} + \ldots + (a_p - \mu b_p) \mathbf{A}^0 = \mathbf{O}.$$

Odtud vzhledem ke vzájemné nezávislosti matic $\mathbf{A}^0, \ldots, \mathbf{A}^{p-1}$ plyne: $a_i = \mu b_i$, pro $i = 0, 1, \ldots, p$.

2. Z definice minimálního polynomu plyne, že $\psi(\lambda) = 0$ je algebraická rovnice nejnižšího stupně, které matice $\mathbf{A}$ vyhovuje, tj. $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

3. Mezi charakteristickým polynomem $\varphi(\lambda)$ a minimálním polynomem $\psi(\lambda)$ téže matice $\mathbf{A}$ stupně n platí jednoduché vztahy. Než je odvodíme, dokážeme následující důležitou větu, která se nazývá *Cayleyova-Hamiltonova*.

15.6. Věta. Je-li $\mathbf{A}$ libovolná čtvercová matice stupně n a $\varphi(\lambda)$ její charakteristický polynom, pak matice $\varphi(\mathbf{A})$ je nulová, takže

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Důkaz: Nechť

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n, \quad \text{kde } c_0 = (-1)^n.$$

Matice adj $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ má za prvky A_{jk} algebraické doplňky prvků v matici $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Proto prvky A_{jk} jsou polynomy stupně nejvýš $n - 1$ v proměnné λ. Je tedy

$$A_{jk} = \sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh}\lambda^h ,$$

takže

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \|A_{jk}\| = \left\|\sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh}\lambda^h\right\| = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \|a_{jkh}\| =$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h ;$$

přitom je

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} a_{11h} & \dots & a_{1nh} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1h} & \dots & a_{nnh} \end{bmatrix} .$$

Podle definice adjungované matice platí

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \operatorname{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|\, \mathbf{E} ,$$

takže

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h = \left(\sum_{h=0}^{n} c_{n-h}\lambda^h\right) \mathbf{E} .$$

Odtud je

$$\mathbf{A} \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \mathbf{A}_h - \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^{h+1} \mathbf{A}_h = \sum_{h=0}^{n} (c_{n-h}\mathbf{E})\, \lambda^h .$$

Porovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda, \dots, \lambda^n$ obdržíme (doporučujeme čtenáři, aby si ověřil, že tento postup je dovolen)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}_0 \phantom{{}- \mathbf{A}_0} &= c_n \mathbf{E} , \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 &= c_{n-1} \mathbf{E} , \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 &= c_{n-2} \mathbf{E} , \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2} &= c_1 \mathbf{E} , \\ - \mathbf{A}_{n-1} &= c_0 \mathbf{E} . \end{aligned}$$

Násobíme-li zleva tyto rovnice postupně maticemi $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^n$, sčítáním dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}^2\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}\mathbf{A}_0) + (\mathbf{A}^3\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}^2\mathbf{A}_1) + \dots - \mathbf{A}^n\mathbf{A}_{n-1} =$$

$$= \varphi(\mathbf{A}) .$$

Jak patrno, na levé straně se všechny členy navzájem ruší, takže

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$$

Příklad 18. Přímým výpočtem dokažme, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ stupně 2 je

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$$

Řešení: Položme $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pak bude

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc =$$

$$= \lambda^2 - (a + d)\,\lambda + ad - bc\,.$$

Dále je

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Proto

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - (a + d)\,\mathbf{A} + (ad - bc)\,\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd & bc + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Je tedy

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$$

15.7. Poznámka. Z předešlé věty plyne, že pro stupeň p minimálního polynomu libovolné matice $\mathbf{A}$ n-tého stupně platí

$$p \leqq n\,,$$

takže matice $\mathbf{A}^0$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^n$ jsou vždy vzájemně závislé.

15.8. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně n. Nechť $\psi(\lambda)$ je její minimální polynom, kdežto $g(\lambda)$ je libovolný polynom, pro který platí

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$$

Pak polynom $g(\lambda)$ je dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$.

D ů k a z: Dělme polynom $g(\lambda)$ polynomem $\psi(\lambda)$. Pak podle algoritmu dělení se zbytkem platí

$$g(\lambda) = \psi(\lambda)\,.\,h(\lambda) + r(\lambda)\,,$$

kde $h(\lambda)$ značí podíl a $r(\lambda)$ zbytek, který je stupně nižšího než polynom $\psi(\lambda)$ nebo je nulový.

Odtud plyne

$$\mathbf{O} = g(\mathbf{A}) = \psi(\mathbf{A})\,.\,h(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A})\,.$$

Protože $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, plyne odtud $r(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Vzhledem k tomu, že $\psi(\lambda) = 0$ je rovnice nejnižšího stupně, které matice $\mathbf{A}$ vyhovuje, je $r(\lambda)$ nulový polynom. Je tedy

$$g(\lambda) = \psi(\lambda)\,.\,h(\lambda)\,,$$

takže minimální polynom $\psi(\lambda)$ dělí (beze zbytku) polynom $g(\lambda)$.

15.9. Důsledek. Podle vět 15.6 a 15.8 je charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$ každé matice dělitelný jejím minimálním polynomem. Proto každý kořen minimálního polynomu je zároveň kořenem charakteristického polynomu téže matice.

15.10. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně n. Minimální polynom $\psi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ je až na konstantu c ($\neq 0$) roven podílu charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ a největšího společného dělitele $d(\lambda)$ všech minorů $(n - 1)$-ho stupně v matici $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, takže

$$c\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}\,.$$

D ů k a z: Rozvineme-li determinant $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ ve shodě s Laplaceovou větou podle prvků některého řádku, jsou v tomto rozvoji koeficienty těchto prvků jejich algebraickými doplňky, tedy minory stupně $n - 1$, násobené číslem $+1$ nebo -1. Je tedy polynom $\varphi(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$ dělitelný největším společným dělitelem $d(\lambda)$ všech minorů stupně $n - 1$, takže

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda)\, d(\lambda)\,,$$

přičemž $q(\lambda)$ značí vhodný polynom stupně $\geqq 0$.

Dále je

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \operatorname{adj} (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \varphi(\lambda)\, \boldsymbol{E}\,.$$

Prvky matice $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ mají největšího společného dělitele $d(\lambda)$, takže

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = d(\lambda)\,.\,\boldsymbol{B}\,,$$

kde $\boldsymbol{B}$ značí vhodnou matici, jejíž prvky jsou nesoudělné polynomy v proměnné λ.

Vidíme, že je

$$d(\lambda)\,.\,(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{B} = q(\lambda)\, d(\lambda)\, \boldsymbol{E}\,,$$

a odtud plyne

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{B} = q(\lambda)\,\boldsymbol{E} \tag{56}$$

pro všechna λ, pro něž $d(\lambda) \neq 0$. Tudíž odpovídající si prvky (polynomy v λ) v maticích $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{B}$, $q(\lambda)\,\boldsymbol{E}$ se sobě rovnají pro nekonečně mnoho čísel λ, a proto jsou si rovny pro každé λ. Tedy rovnost (56) platí pro každé λ.

Nechť α značí stupeň polynomu $d(\lambda)$. Pak polynom $q(\lambda)$ je stupně $n - \alpha$ a prvky matice $\boldsymbol{B}$ jsou polynomy stupně $\leqq n - \alpha - 1$. Položme

$$\boldsymbol{B} = \sum_{h=0}^{n-\alpha-1} \lambda^h \boldsymbol{B}_h\,, \quad q(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h}\lambda^h\,,$$

přičemž ovšem $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \ldots, \boldsymbol{B}_{n-\alpha-1}$ značí vhodné (číselné) matice.

Podle (56) pak máme

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \sum_{h=0}^{n-\alpha-1} \lambda^h \boldsymbol{B}_h = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h}\lambda^h \boldsymbol{E}\,.$$

Porovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda, \ldots, \lambda^{n-\alpha}$ obdržíme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\mathbf{B}_0 & &= a_{n-\alpha}\mathbf{E}\,,\\
&\mathbf{A}\mathbf{B}_1 &- \mathbf{B}_0 &= a_{n-\alpha-1}\mathbf{E}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\\
&\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} &- \mathbf{B}_{n-\alpha-2} &= a_1\mathbf{E}\\
& &- \mathbf{B}_{n-\alpha-1} &= a_0\mathbf{E}\,.
\end{aligned}$$

Násobíme-li zleva tyto rovnice postupně maticemi $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}^{n-\alpha}$, po sečtení dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{O} &= \mathbf{A}\mathbf{B}_0 + (\mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0) + \ldots + (\mathbf{A}^{n-\alpha}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} - \\
&\quad - \mathbf{A}^{n-\alpha-1}\mathbf{B}_{n-\alpha-2}) - \mathbf{A}^{n-\alpha}\mathbf{B}_{n-\alpha-1} = \\
&= a_0\mathbf{A}^{n-\alpha} + a_1\mathbf{A}^{n-\alpha-1} + \ldots + a_{n-\alpha}\mathbf{A}^0 = q(\mathbf{A})\,.
\end{aligned}$$

Je tedy

$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$$

Proto (podle věty 15.8) je polynom $q(\lambda)$ dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$. Je-li $p(\lambda)$ příslušný podíl, můžeme psát

$$q(\lambda) = \psi(\lambda)\, p(\lambda)\,. \tag{57}$$

Ukažme, že také naopak je polynom $\psi(\lambda)$ dělitelný polynomem $q(\lambda)$, takže $p(\lambda)$ je rovný nenulové konstantě.

Vedle λ vezměme v úvahu další proměnnou μ a položme

$$\psi(\lambda) - \psi(\mu) = (\lambda - \mu)\, F(\lambda, \mu)\,,$$

kde $F(\lambda, \mu)$ značí vhodný polynom proměnných λ, μ.

Odtud je

$$\psi(\lambda)\,\mathbf{E} - \psi(\mathbf{A}) = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\, F(\lambda, \mathbf{A})\,.$$

Ježto $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, obdržíme

$$\psi(\lambda)\,\mathbf{E} = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\, F(\lambda, \mathbf{A})$$

a odtud násobením polynomem $q(\lambda)$ plyne

$$\psi(\lambda)\, q(\lambda)\,\mathbf{E} = (\lambda\mathbf{E} - A)\, q(\lambda)\, F(\lambda, \mathbf{A})\,.$$

Vzhledem k vztahu (56) máme odtud

$$\psi(\lambda)\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{B} = -(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,q(\lambda)\,F(\lambda, \mathbf{A})\,.$$

Protože $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| \neq 0$ pro všechna λ s výjimkou konečného počtu hodnot, existuje matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ a platí vztah

$$\psi(\lambda)\,\mathbf{B} = -q(\lambda)\,F(\lambda, \mathbf{A})$$

pro všechna λ až na konečný počet výjimek. Odtud (podobně jako v důkazu rovnosti (56)) soudíme na jeho platnost pro všechna λ. Protože prvky matice $\mathbf{B}$ nemají společného dělitele v proměnné λ, existuje ke každému kořenovému činiteli $\lambda - \lambda_0$ polynomu $q(\lambda)$ aspoň jeden prvek b_{jk} v matici $\mathbf{B}$, který není dělitelný tímto kořenovým činitelem, a tedy ani polynomem $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0}$, kde α_0 značí násobnost kořenového činitele $\lambda - \lambda_0$ v polynomu $q(\lambda)$.

Označíme-li F_{jk} prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci matice $F(\lambda, \mathbf{A})$, z poslední rovnice plyne vztah

$$\psi(\lambda)\,b_{jk} = -q(\lambda)\,F_{jk}\,,$$

takže polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný výrazem $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0}$.

Z toho soudíme, že polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný polynomem $q(\lambda)$.

Proto ze vztahu (57) máme

$$p(\lambda) = c\,, \tag{58}$$

kde c je nenulová konstanta. Odtud vychází

$$\varphi(\lambda) = c\psi(\lambda)\,d(\lambda)\,,$$

takže

$$c\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}\,.$$

Protože $\psi(\lambda)$ je minimální polynom, je také $c\psi(\lambda)$ minimálním polynomem.

15.11. Věta. Každý kořen charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ libovolné matice $\mathbf{A}$ je kořenem jejího minimálního polynomu.

Důkaz: Z rovnice (56) plyne

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| \,.\, |\mathbf{B}| = [q(\lambda)]^n \, |\mathbf{E}| = [q(\lambda)]^n \,,$$

kde n značí stupeň matice $\mathbf{A}$. Odtud podle (57) a (58) máme

$$\varphi(\lambda) \, |\mathbf{B}| = c^n [\psi(\lambda)]^n = c_1 [\psi(\lambda)]^n \,.$$

Ostatní je už zřejmé.

15.12. Poznámka. Z odst. 15.9 a z předešlé věty 15.11 plyne, že charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$ má tytéž kořeny jako minimální polynom $\psi(\lambda)$ téže matice $\mathbf{A}$; jen násobnost kořenů nemusí být stejná.

Příklad 19. Určeme minimální polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Určíme nejprve charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$. Obdržíme

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 \,.$$

Minory 3. stupně v matici $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ jsou

$$\begin{array}{llll} -\lambda(\lambda^2 + 4), & -2\lambda^2, & -2\lambda^2, & -8\lambda \\ -\lambda(\lambda + 2), & -\lambda^2(\lambda + 1), & -\lambda^2, & -2\lambda(\lambda + 2)\,, \\ -\lambda(\lambda - 2), & \lambda^2, & -\lambda^2(\lambda - 1), & -2\lambda(\lambda - 2)\,, \\ 2\lambda, & \lambda^2, & \lambda^2, & -\lambda(\lambda^2 - 4)\,. \end{array}$$

Jejich největší společný dělitel $d(\lambda) = \lambda$. Proto minimální polynom matice $\mathbf{A}$ je

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)} = \lambda^3 \,.$$

Odtud podle definice minimálního polynomu soudíme, že je

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{O}\,, \quad \mathbf{A}^2 \neq \mathbf{O}\,, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{O}\,.$$

15.13. Věta. Je-li $g(\mathbf{A})/h(\mathbf{A})$ racionální funkce v matici $\mathbf{A}$, existuje takový polynom $p(\lambda)$, že platí

$$\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})} = p(\mathbf{A})\,.$$

Důkaz: Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$ a nechť $\psi(\lambda)$ je její minimální polynom.

Protože $|h(\mathbf{A})| \neq 0$ a kromě toho podle (52) je

$$|h(\mathbf{A})| = h(\lambda_1) \,.\, h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n)\,,$$

nevymizí $h(\lambda)$ pro žádné z čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Proto žádný kořenový činitel $\lambda - \lambda_k$ polynomu $\varphi(\lambda)$ není dělitelem polynomu $h(\lambda)$, a proto též žádný kořenový činitel polynomu $\psi(\lambda)$ nedělí polynom $h(\lambda)$. Proto polynomy $h(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ jsou nesoudělné. Existují tedy takové polynomy $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, že platí

$$h(\lambda)\, p(\lambda) - \psi(\lambda)\, q(\lambda) = g(\lambda)\,.$$

Odtud máme

$$h(\mathbf{A})\, p(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})\,,$$

takže

$$p(\mathbf{A}) = \frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}\,.$$

15.14. První věta o nilpotentních maticích. Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má všechny kořeny nulové právě tehdy, existuje-li přirozené číslo k takové, že platí

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}\,.$$

Důkaz: Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice $\mathbf{A}$, pak podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}^k$ kořeny

$$\lambda_1^k\, \ldots, \lambda_n^k$$

při každém celém $k \geqq 0$. Když tedy pro určité celé $k > 0$ platí $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, pak kořeny rovnice

$$|\mathbf{A}^k - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{O} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^n = 0$$

jsou vesměs nuly, takže

$$\lambda_1^k = \lambda_2^k = \ldots = \lambda_n^k = 0\,,$$

a proto

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0\,.$$

Když naopak pro nějakou matici $\mathbf{A}$ je

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n\,,$$

pak podle 15.12 máme minimální polynom

$$\psi(\lambda) = \lambda^k$$

při vhodném celém $k > 0$. Odtud vychází

$$\mathbf{O} = \psi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k$$

neboli

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}\,.$$

15.15. Druhá věta o nilpotentních maticích. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně n a nechť při vhodném celém $k > 0$ je

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}\,.$$

Pak je-li $\mathbf{B}$ zaměnitelná s maticí $\mathbf{A}$, platí

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{B}|\,. \tag{59}$$

Speciálně pro $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ máme

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 1\,. \tag{60}$$

Důkaz: a) Nejprve dokážeme vztah (60). Podle věty 15.14 je

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = (-\lambda)^n\,;$$

odkud pro $\lambda = -1$ dostáváme vztah (60).

b) Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Pak jsou též vzájemně zaměnitelné matice $t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ při každém t. Skutečně

$$(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,.$$

Odtud plyne, že též $(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}$, $\boldsymbol{A}$ jsou vzájemně zaměnitelné za předpokladu, že $t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ je regulární.

Označme

$$\boldsymbol{X} = (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\,.$$

Pak je

$$\boldsymbol{X}^k = \left[(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}\,\boldsymbol{A}\right]^k = (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-k}\,\boldsymbol{A}^k = \\ = (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-k}\,\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}\,.$$

Proto podle (60) je

$$|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}| = 1$$

neboli

$$|(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = 1\,.$$

Položme

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{E} = (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}\,.$$

Pak je $|\boldsymbol{Y}| = 1$ a kromě toho

$$(t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} + (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} + (t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,.$$

Matice $t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ je regulární pro nekonečně mnoho hodnot t, a proto rovnost

$$|t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + t\boldsymbol{E}|$$

platí pro nekonečně mnoho hodnot t. Protože jde o rovnost dvou polynomů, platí tato rovnost identicky. Pro $t = 0$ obdržíme

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|\,.$$