11. UNITÁRNÍ MATICE

11.1. Hermitovská délka vektoru. V hermitovské geometrii se obvykle uvažuje o komplexních vektorech na rozdíl od geometrie euklidovské, kde uvažované vektory jsou zpravidla reálné.

V hermitovské geometrii přiřazujeme ke každému vektoru

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ délku s $(\geqq 0)$ danou vzorcem

$$s = \sqrt{(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n)}\,,$$

kde $\bar{x}_k$ značí komplexně sdružené číslo s číslem x_k.

Druhá mocnina s^2 délky vektoru $\boldsymbol{x}$ je tedy prvkem součinu matice $\bar{\boldsymbol{x}}'$ s maticí $\boldsymbol{x}$, tj.

$$[s^2] = \bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}\,.$$

11.2. Definice unitární transformace. Lineární transformace $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$ o čtvercové matici $\boldsymbol{U}$ se nazývá *unitární*, když transformovaný vektor $\boldsymbol{x}^*$ má vždy touž hermitovskou délku jako původní vektor $\boldsymbol{x}$.

V tom případě se také matice $\boldsymbol{U}$ nazývá unitární.

11.3. Věta o unitárních maticích. Matice $\boldsymbol{U}$ je unitární, právě když platí vztah

$$\bar{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}\,. \tag{34}$$

Důkaz: a) Nechť

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$$

značí unitární transformaci, takže platí

$$(\bar{\boldsymbol{x}}^*)'\,\boldsymbol{x}^* = \bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}\,. \tag{35}$$

Odtud plyne

$$(\overline{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}})'(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}$$

neboli

$$\bar{\boldsymbol{x}}'(\overline{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}\,. \tag{36}$$

Zvolíme-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde $\boldsymbol{e}_j$ značí vektor, jehož všechny souřadnice jsou nuly mimo j-tou, která je rovna 1, dostaneme (podobně jako u ortogonálních matic) pro prvky c_{jk} matice $\overline{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U}$ vztah

$$c_{jj} = 1\,.$$

Zvolíme-li však za $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{e}_{jk}$, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě souřadnice j-té a k-té které jsou rovny 1, obdržíme (podobně jako v důkazu věty 10.3) relaci (pro $j \neq k$)

$$c_{jk} + c_{kj} = 0\,.$$

Zvolíme-li konečně za $\boldsymbol{x}$ vektor, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě j-té, rovné 1, a kromě k-té, rovné číslu i, obdržíme podobným způsobem vztah

$$c_{jk} - c_{kj} = 0\,.$$

Je tedy $c_{jj} = 1$, $c_{jk} = 0$ pro $j \neq k$, kde $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tím jsme dokázali, že platí vztah (34).

b) Je-li splněna rovnice (34), pak platí vztah (36), a tudíž i vztah (35). To však znamená, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$ je unitární transformace a matice $\boldsymbol{U}$ unitární.

Příklad 15. Určíme všechny unitární matice stupně $n = 2$.

Řešení: Je-li matice $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ unitární, pak podle (34) platí vztah

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proto prvky u_{ik}, $\bar{u}_{ik}$ splňují rovnice

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11}u_{11} + \bar{u}_{21}u_{21} &= 1\,, \quad \bar{u}_{12}u_{11} + \bar{u}_{22}u_{21} = 0\,, \\ \bar{u}_{11}u_{12} + \bar{u}_{21}u_{22} &= 0\,, \quad \bar{u}_{12}u_{12} + \bar{u}_{22}u_{22} = 1\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Z těchto vztahů především plyne, že u_{11}, u_{22} mají stejné absolutní hodnoty. Je totiž

$$u_{11}\bar{u}_{11} = u_{11}\bar{u}_{11}(\bar{u}_{12}u_{12} + \bar{u}_{22}u_{22}) = \bar{u}_{11}u_{12} \,.\, u_{11}\bar{u}_{12} +$$
$$+ u_{11}\bar{u}_{11} \,.\, u_{22}\bar{u}_{22} = -\bar{u}_{21}u_{22} \,.\, u_{11}\bar{u}_{12} + u_{11}\bar{u}_{11} \,.\, u_{22}\bar{u}_{22} =$$
$$= \bar{u}_{21}u_{22} \,.\, \bar{u}_{22}u_{21} + u_{11}\bar{u}_{11} \,.\, u_{22}\bar{u}_{22} =$$
$$= (u_{11}\bar{u}_{11} + u_{21}\bar{u}_{21})\, u_{22}\bar{u}_{22} = u_{22}\bar{u}_{22} \,.$$

Odečteme-li první od poslední rovnice soustavy (37), dostaneme z předešlého vztahu rovnici

$$\bar{u}_{12}u_{12} = \bar{u}_{21}u_{21} \,.$$

To znamená, že též čísla u_{12}, u_{21} mají stejné absolutní hodnoty. Proto označíme-li $|u_{11}| = u$, $|u_{12}| = v$, kde $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, můžeme psát

$$u_{11} = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \,, \quad u_{12} = v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \qquad (38)$$
$$u_{21} = v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varrho} \,, \quad u_{22} = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} \,,$$

přičemž φ, ψ, ϱ, ω jsou vhodná reálná čísla. Když $uv \neq 0$, z relací (37) dostáváme

$$u^2 + v^2 = 1 \,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\varrho)} = 0 \,. \qquad (39)$$

Existuje proto takové $\Phi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, že je

$$u = \cos \Phi \,, \quad v = \sin \Phi \,.$$

Z druhé relace (39) plyne

$$\psi - \varphi = \omega - \varrho + (2k + 1)\,\pi,$$

kde k je celé číslo. Přitom čísla φ, ψ, ϱ, ω jsou rovnicemi (38) určena až na celé násobky čísla 2π. Můžeme tedy v poslední rovnici vynechat člen $2k\pi$, takže je

$$\psi - \varphi = \omega - \varrho + \pi\,(= 2\tau) \,.$$

Odtud plyne

$$\psi = \varphi + 2\tau \,, \quad \omega = 2\tau + \varrho - \pi \,.$$

Píšeme-li

$$\varphi = \varphi_1 - \tau, \quad \varrho = \varrho_1 - \tau,$$

obdržíme

$$\psi = \varphi_1 + \tau, \quad \omega = \varrho_1 + \tau - \pi.$$

Rovnice (38) přejdou v rovnice (kde jsme u φ a ϱ vynechali indexy)

$$u_{11} = e^{i(\varphi-\tau)} \cos \Phi, \quad u_{12} = e^{i(\varrho-\tau)} \sin \Phi,$$
$$u_{21} = e^{i(\varphi+\tau)} \sin \Phi, \quad u_{22} = -e^{i(\varrho+\tau)} \cos \Phi.$$

Tyto zahrnují i případy $u = 0$ $(\varphi = \pi/2)$ a $v = 0$ $(\Phi = 0)$. Naopak pro každá reálná čísla Φ, φ, ϱ, τ je matice

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} e^{i(\varphi-\tau)} \cos \Phi & e^{i(\varrho-\tau)} \sin \Phi \\ e^{i(\varphi+\tau)} \sin \Phi & -e^{i(\varrho+\tau)} \cos \Phi \end{bmatrix}$$

unitární, jak se snadno zjistí výpočtem. Vidíme, že matice $\boldsymbol{U}$ představuje všechny unitární matice stupně $n = 2$.

11.4. Věta o kořenech charakteristické rovnice unitární matice. Všechny kořeny charakteristické rovnice $|\boldsymbol{U} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ každé unitární matice $\boldsymbol{U}$ mají absolutní hodnotu rovnou 1.

Uvedené tvrzení lze dokázat podobně jako u ortogonální matice (věta 10.4). Jiný, kratší důkaz je tento: Nechť λ_0 je kořen charakteristické rovnice unitární matice $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{x}$ příslušný charakteristický vektor, takže $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$. Protože matice $\boldsymbol{U}$ je unitární, máme

$$\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}'(\bar{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}})'\,(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = (\bar{\lambda}_0\bar{\boldsymbol{x}})'\,(\lambda_0\boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}_0\lambda_0(\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}).$$

Odtud plyne $\bar{\lambda}_0\lambda_0 = 1$, neboť prvek matice $\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ je > 0.

11.5. Definice hermitovské matice. Čtvercová matice $\boldsymbol{H}$ se nazývá *hermitovská*, platí-li

$$\boldsymbol{H}' = \bar{\boldsymbol{H}},$$

tj. jsou-li prvky h_{jj} v hlavní diagonále matice $\boldsymbol{H}$ reálné, kdežto prvek h_{jk} je pro $j \neq k$ komplexně sdružený s prvkem h_{kj}, takže je vždy

$$\bar{h}_{jk} = h_{kj}.$$

11.6. Věta. Všechny unitární matice $\mathbf{U}$ stupně $n \geqq 2$, pro něž je $|\mathbf{U} + \mathbf{E}| \neq 0$, dají se vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{H}}{\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}}, \tag{40}$$

kde $\mathbf{H}$ je hermitovská matice stupně n taková, že $|\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}| \neq 0$.

Důkaz: a) Buď $\mathbf{U}$ daná unitární matice, pro niž je $|\mathbf{U} + \mathbf{E}| \neq 0$. Utvořme matici

$$\mathbf{H} = \mathrm{i}(\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1}. \tag{41}$$

Ukážeme, že matice $\mathbf{H}$ je hermitovská s vlastností $|\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}| \neq 0$ a že pro ni platí vzorec (40).

Násobením zprava matice $\mathbf{H}$ maticí $\mathbf{E} + \mathbf{U}$ obdržíme

$$\mathbf{H}(\mathbf{E} + \mathbf{U}) = \mathrm{i}(\mathbf{E} - \mathbf{U}). \tag{42}$$

Záměnou $-\mathrm{i}$ za i plyne

$$\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{E} + \overline{\mathbf{U}}) = -\mathrm{i}(\mathbf{E} - \overline{\mathbf{U}}).$$

Přechodem k transponovaným maticím plyne

$$(\mathbf{E} + \overline{\mathbf{U}}')\overline{\mathbf{H}}' = \mathrm{i}(\overline{\mathbf{U}}' - \mathbf{E}).$$

Násobením zleva maticí $\mathbf{U}$ obdržíme se zřetelem ke vztahu $\mathbf{U}\overline{\mathbf{U}}' = \mathbf{E}$

$$(\mathbf{U} + \mathbf{E})\overline{\mathbf{H}}' = \mathrm{i}(\mathbf{E} - \mathbf{U}).$$

Odtud násobením zleva maticí $(\mathbf{U} + \mathbf{E})^{-1}$ plyne

$$\overline{\mathbf{H}}' = \mathrm{i}(\mathbf{U} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{U}).$$

Matice $\mathbf{U} + \mathbf{E}$, $\mathbf{E} - \mathbf{U}$ jsou zřejmě zaměnitelné. Proto jsou zaměnitelné i matice $(\mathbf{U} + \mathbf{E})^{-1}$, $\mathbf{E} - \mathbf{U}$, takže podle (41) je

$$\overline{\mathbf{H}}' = \mathrm{i}(\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{U} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{H}$$

neboli $\overline{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}$. To znamená, že matice $\mathbf{H}$ je hermitovská. Navíc je matice $\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}$ regulární. Je totiž

$$\begin{aligned}\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H} &= (\mathbf{E} + \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1} + (\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1} = \\ &= (\mathbf{E} + \mathbf{U} + \mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1} = 2\mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1},\end{aligned}$$

takže

$$|\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}| = 2^n |\mathbf{E} + \mathbf{U}|^{-1} \neq 0 .$$

Ze vztahu (42) pak plyne

$$(\mathbf{H} + \mathrm{i}\mathbf{E})\,\mathbf{U} = \mathrm{i}\mathbf{E} - \mathbf{H}$$

neboli (po vynásobení číslem $-\mathrm{i}$)

$$(\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H})\,\mathbf{U} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{H} .$$

Odtud dostáváme vztàh (40).

b) Buď nyní $\mathbf{H}$ hermitovská matice, pro niž je $|\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}| \neq 0$. Ukažme, že matice $\mathbf{U}$ daná vzorcem (40) je unitární s vlastností $|\mathbf{U} + \mathbf{E}| \neq 0$.

Předně je

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{E} - \mathrm{i}\overline{\mathbf{H}}}{\mathbf{E} + \mathrm{i}\overline{\mathbf{H}}},$$

$$\overline{\mathbf{U}}' = \frac{\mathbf{E} - \mathrm{i}\overline{\mathbf{H}}'}{\mathbf{E} + \mathrm{i}\overline{\mathbf{H}}'} .$$

Protože $\mathbf{H}$ je hermitovská, je $\overline{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}$, takže máme

$$\overline{\mathbf{U}}' = \frac{\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H}}{\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{H}}$$

a odtud plyne

$$\overline{\mathbf{U}}'\mathbf{U} = \mathbf{E} .$$

To znamená, že $\mathbf{U}$ je unitární.

Mimoto je

$$\mathbf{U} + \mathbf{E} = (\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{H})(\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H})^{-1} + \mathbf{E} = 2(\mathbf{E} - \mathrm{i}\mathbf{H})^{-1}$$

a odtud vidíme, že je $|\mathbf{U} + \mathbf{E}| \neq 0$.

Tím je věta dokázána.

11.7. Poznámka. Ve větě 11.6 jsme předpokládali, že matice $\mathbf{U} + \mathbf{E}$ je regulární. V další větě se tohoto předpokladu zřekneme.

11.8. Věta. Všechny unitární matice $\boldsymbol{U}$ stupně $n \geqq 2$ lze vyjádřit vzorcem

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \frac{\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\boldsymbol{H}}, \tag{43}$$

kde $\boldsymbol{H}$ značí hermitovskou matici stupně n a φ je reálné číslo.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{U}$ značí libovolnou unitární matici stupně n, takže je

$$\overline{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}.$$

Nechť φ je libovolné reálné číslo. Dokážeme, že matice

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\boldsymbol{U}$$

je též unitární. Platí opravdu

$$\overline{\boldsymbol{V}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\overline{\boldsymbol{U}}, \quad \overline{\boldsymbol{V}}' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\overline{\boldsymbol{U}}'$$

a odtud plyne

$$\overline{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}.$$

Je zřejmé, že je-li λ_0 kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{U}$, pak $\lambda_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ je kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{V} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\boldsymbol{U}$.

Podle věty 11.4 jsou všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{U}$ tvaru

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n};$$

φ_k značí vhodná reálná čísla (popř. i stejná), která jsou určena až na celé násobky čísla 2π.

Zřejmě můžeme zvolit takové reálné číslo φ, že pro $k = 1, 2, \ldots, n$ je

$$\varphi_k - \varphi \not\equiv \pi \pmod{2\pi},$$

tj. takové, že žádné z čísel

$$\varphi_1 - \varphi, \varphi_2 - \varphi, \ldots, \varphi_n - \varphi$$

se nerovná lichému násobku čísla π. Pak žádné z čísel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_2 - \varphi)}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_n - \varphi)}$$

není rovno -1. To znamená, že charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{V} = e^{-i\varphi}\boldsymbol{U}$, jejíž kořeny jsou právě uvedená čísla, nemá kořen -1. Existuje tedy hermitovská matice $\boldsymbol{H}$ vyznačující se tím, že je $|\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}| \neq 0$ a platí

$$\boldsymbol{V} = e^{-i\varphi}\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}}$$

neboli

$$\boldsymbol{U} = e^{i\varphi}\frac{\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 16. Vypočtěme (explicitně) všechny unitární matice stupně 2.

Řešení: Zvolme takovou libovolnou hermitovskou matici stupně 2, aby bylo $|\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}| \neq 0$, tedy matici

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{bmatrix},$$

přičemž a, b, c, d jsou reálná čísla, splňující nerovnost

$$|\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} 1 - ia, & -ib + c \\ -ib - c, & 1 - id \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{44}$$

To znamená, že má platit

$$1 + b^2 + c^2 - ad - i(a + d) \neq 0 ,$$

takže aspoň jedno z čísel $a + d$, $1 + b^2 + c^2 - ad$ je různé od nuly.

Je-li $a + d = 0$, tj. $d = -a$, pak zřejmě

$$1 + b^2 + c^2 - ad \geqq 1 .$$

Je-li $1 + b^2 + c^2 - ad = 0$, pak je

$$ad = 1 + b^2 + c^2 \geqq 1 ,$$

takže obě čísla a, d jsou od nuly různá a mají stejné znaménko, a tedy

$$a + d \neq 0\,.$$

Vidíme tedy, že ať zvolíme $\boldsymbol{H}$ jakkoli, je vždycky splněn vztah (44).

Dále je

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\boldsymbol{H}) = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}d & \mathrm{i}b - c \\ \mathrm{i}b + c & 1 - \mathrm{i}a \end{bmatrix}$$

takže

$$(\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\boldsymbol{H}) \operatorname{adj}(\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\boldsymbol{H}) = \begin{bmatrix} 1 + \mathrm{i}a & \mathrm{i}b - c \\ \mathrm{i}b + c & 1 + \mathrm{i}d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}d & \mathrm{i}b - c \\ \mathrm{i}b + c & 1 - \mathrm{i}a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + ad - b^2 - c^2 + \mathrm{i}(a - d) & -2(c - \mathrm{i}b) \\ 2(c + \mathrm{i}b) & 1 + ad - b^2 - c^2 - \mathrm{i}(a - d) \end{bmatrix}$$

Proto

$$\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\boldsymbol{H}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1 + ad - b^2 - c^2 + \mathrm{i}(a - d)}{1 - ad + b^2 + c^2 - \mathrm{i}(a + d)} & \dfrac{-2(c - \mathrm{i}b)}{1 - ad + b^2 + c^2 - \mathrm{i}(a + d)} \\ \dfrac{2(c + \mathrm{i}b)}{1 - ad + b^2 + c^2 - \mathrm{i}(a + d)} & \dfrac{1 + ad - b^2 - c^2 + \mathrm{i}(a - d)}{1 - ad + b^2 + c^2 - \mathrm{i}(a + d)} \end{bmatrix}$$

je explicitní výraz pro všechny unitární matice druhého řádu. Tento výraz se ovšem dá převést na transcendentní tvar, uvedený v příkladě 15.