9. CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MATICE

9.1. Transformace vektoru x ve vektor $\lambda \mathbf{x}$. Nechť $\mathbf{A}$ značí libovolnou čtvercovou matici stupně n. Hledejme, zda existuje v n-rozměrném prostoru vektor $\mathbf{x}$, který se lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ změní ve vektor $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}$, kde λ je nějaké číslo.

Všimněme si, že v této úloze je pro $\lambda = 1$ zahrnuta úloha určit vektory, které se lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ nezmění. Přitom ovšem nás zajímají nenulové vektory, tj. vektory, jejichž souřadnice nejsou vesměs nuly.

Označme prvky matice $\mathbf{A}$ symboly a_{jk}, takže $\mathbf{A} = [a_{jk}]$. Souřadnice každého vektoru $\mathbf{x}$, který má uvažovanou vlastnost, vyhovují lineárním rovnicím

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

neboli rovnicím

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Proto existuje-li vektor $\mathbf{x}$ s uvedenými vlastnostmi, je

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{27}$$

Levá strana této rovnice je polynom n-tého stupně proměnné λ, takže (27) představuje algebraickou rovnici n-tého stupně pro neznámou λ.

9.2. Definice. Právě zmíněný polynom

$$\varphi(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$$

nazývá se *charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A}$.

Algebraická rovnice n-tého stupně $\varphi(\lambda) = 0$ nazývá se *charakteristická rovnice* matice $\boldsymbol{A}$. V případě, že matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická, mluvíme též o *sekulární rovnici* matice $\boldsymbol{A}$. V maticovém zápisu má tedy charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{A}$ tvar

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0\,.$$

Kořeny charaktetistické rovnice matice $\boldsymbol{A}$ se nazývají *charakteristické kořeny*, stručněji *kořeny* matice $\boldsymbol{A}$, někdy též *vlastní hodnoty* matice $\boldsymbol{A}$.

9.3. Poznámky. 1. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kořeny matice $\boldsymbol{A}$, je

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)\,.$$

2. Nechť S_k značí součet hlavních minorů k-tého stupně v matici $\boldsymbol{A}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Přenecháváme čtenáři, aby si ověřil platnost vzorce

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + S_n\,. \quad (28)$$

3. Ze vzorce (28) vidíme, že matice $\boldsymbol{A}$ a s ní sdružená matice $\boldsymbol{A}'$ mají tytéž kořeny.

Z úvahy v odst. 9.1. plyne tato věta:

9.4. Věta. Když se nějaký nenulový vektor $\boldsymbol{x}$ transformuje lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}$ ve vektor $\lambda\boldsymbol{x}$, je číslo λ kořenem matice $\boldsymbol{A}$.

Vektory příslušné k některému kořenu λ matice $\boldsymbol{A}$ se nazývají *charakteristické vektory vzhledem k* (nebo *při*) *lineární transformaci o matici* $\boldsymbol{A}$; stručněji *charakteristické vektory matice* $\boldsymbol{A}$. Vypočtou se ze soustavy rovnic (26).

Příklad 10. Určeme všechny charakteristické vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Charakteristický polynom $\varphi(\lambda)$ je v tomto případě

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ 7 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = (\lambda - 11)(\lambda - 1),$$

takže $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$.

Pro $\lambda_1 = 11$ dostáváme soustavu rovnic

$$-3x_1 + 3x_2 = 0, \quad 7x_1 - 7x_2 = 0.$$

takže $x_1 = x_2 = t$, kde t je libovolné číslo.

Podobně pro $\lambda_2 = 1$ dostáváme rovnice

$$7x_1 + 3x_2 = 0, \quad 7x_1 + 3x_2 = 0,$$

takže $x_2 = -\frac{7}{3} x_1$ neboli $x_1 = 3t$, $x_2 = -7t$.

Hledané charakteristické vektory jsou tedy $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3t \\ -7t \end{bmatrix}$, kde t značí libovolné číslo.