8. VEKTOROVÉ PROSTORY

8.1. Báze. Vezměme v úvahu aritmetický vektorový prostor V_n nad tělesem T.

Podle definice prostoru V_n (7.1.2) jsou jeho prvky matice typu $n/1$ nad tělesem T. V prostoru V_n jsou tedy definovány pojmy rovnosti, sečítání a skalárního násobení pro jeho prvky. Tyto operace splňují zákony komutativní, asociativní a distributivní, jak o nich byla řeč v odst. 5.1 a 5.2.

Dále se prostor V_n vyznačuje existencí bází tohoto prostoru. Každá uspořádaná skupina n vzájemně nezávislých vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ v prostoru V_n tvoří *bázi* tohoto prostoru. To znamená, že každý prvek (vektor) $\boldsymbol{x}' \in V_n$ je lineární kombinací uvedených vektorů s jistými koeficienty $x_1, \ldots, x_n$ z tělesa T

$$\boldsymbol{x}' = x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n \,. \tag{19}$$

Je zřejmé, že čísla x_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ jsou určena jednoznačně. Matice

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n]$$

se nazývá *matice báze* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice stupně n. Naopak, každá regulární čtvercová matice stupně n nad tělesem T je maticí vhodné báze prostoru V_n.

Pomocí matice $\boldsymbol{A}$ můžeme vzorec (19) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \,;$$

přitom $\boldsymbol{x}$ značí vektor o souřadnicích $x_1, \ldots, x_n$. Vektor $\boldsymbol{x}$ je tzv. *souřadný vektor* vektoru $\boldsymbol{x}'$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$; jeho složky nazýváme souřadnicemi neboli složkami vektoru $\boldsymbol{x}'$ *vzhledem k* (někdy též *při*) *bázi* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Je-li dána báze prostoru V_n, má vzhledem k ní každý vektor v prostoru V_n právě jeden souřadný vektor.

Jednotkové vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tvoří v prostoru V_n bázi, a sice tzv. *základní bázi* prostoru V_n. Každý vektor $\mathbf{e}_\alpha$ je definován tak, že jeho α-tá souřadnice je 1, kdežto všechny ostatní souřadnice jsou 0 $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Matice základní báze je zřejmě jednotková matice stupně n. Každý vektor v prostoru V_n splývá se svým souřadným vektorem při této základní bázi.

Buďte $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ báze prostoru V_n a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ příslušné matice. Buď $\boldsymbol{x}' \in V_n$ libovolný vektor a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jeho souřadné vektory při uvedených bázích. Pak máme $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{By}$ a odtud vycházejí tyto vztahy mezi vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{By}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Ax}. \tag{20}$$

Vidíme, že souřadné vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ téhož vektoru při bázích o maticích $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou vázány vztahy (20).

8.2. Podprostory ve vektorovém prostoru. V_n. Každých m vzájemně nezávislých vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V_n$ $(1 \leqq m \leqq n)$ určuje *m-rozměrný podprostor* v prostoru V_n. Tímto podprostorem rozumíme množinu všech vektorů $\boldsymbol{x}' \in V_n$, které jsou lineárními kombinacemi vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ s libovolnými koeficienty $x_1, \ldots, x_m$ z tělesa T. Označujeme jej $V_{m(n)}$. Vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ tvoří bázi podprostoru $V_{m(n)}$.

V případě $m < n$ existují vektory např. $\boldsymbol{a}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V_n$ (v počtu $n - m$), které spolu s vektory báze podprostoru $V_{m(n)}$ tvoří bázi prostoru V_n: $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Každý vektor $\boldsymbol{x}' \in V_{m(n)}$ je mezi vektory prostoru V_n charakterizován tím, že jeho souřadný vektor $\boldsymbol{x}$ vzhledem k této bázi má všechny souřadnice, $m + 1$-ou počínajíc, rovny nule

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V případě $m = n$ splývá každý podprostor $V_{m(n)}$ s prostorem V_n. Proto prostor V_n též nazýváme *aritmetický n-rozměrný* *vektorový prostor*, stručněji: *n-rozměrný vektorový prostor* (nad tělesem T).

Nechť $V_{m_1(n)}, \ldots, V_{m_k(n)}$ značí k ($\geqq 1$) podprostorů v prostoru V_n, přičemž podprostor $V_{m_\alpha(n)}$ je m_α-rozměrný ($1 \leqq \alpha \leqq k$). Říkáme, že prostor V_n je *přímým součtem* těchto podprostorů, jestliže

(a) vektor $\boldsymbol{0}$ je jediný společný prvek těchto podprostorů;

(b) každý vektor v prostoru V_n je jediným způsobem určen jako součet k vektorů vybraných po jednom z každého podprostoru $V_{m_\alpha(n)}$.

Píšeme pak $V_n = V_{m_1(n)} + \ldots + V_{m_k(n)}$.

Nechť

$$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{m_1}; \boldsymbol{q}_{m_1+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_{m_1+m_2}; \ldots; \boldsymbol{q}_{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+1}, \ldots$$
$$\ldots, \boldsymbol{q}_{m_1+m_2+ + +m_k} \tag{21}$$

jsou báze oněch podprostorů v prostoru V_n.

Snadno se zjistí, že prostor V_n je přímým součtem podprostorů $V_{m_1(n)}, \ldots, V_{m_k(n)}$ právě tehdy, když jejich báze (21) tvoří dohromady bázi prostoru V_n (když vektorů vyskytujících se v bázích (21) je celkem n a jsou vzájemně nezávislé).

Každý vektor $\boldsymbol{x}' \in V_{m_\alpha(n)}$ je pak mezi vektory prostoru V_n charakterizován tím, že jeho souřadný vektor $\boldsymbol{x}$ vzhledem k této bázi má při $\alpha = 1$ všechny souřadnice $(m_1 + 1)$-ou počínajíc rovny nule a při $\alpha \geqq 2$ prvou až $(m_1 + \ldots + m_{\alpha-1})$-tou a dále $(m_1 + \ldots + m_\alpha + 1)$-tou až n-tou souřadnici rovnu nule.

8.3. Lineární zobrazení vektorového prostoru V_n.* Lineární transformace o čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ n-tého stupně nad tělesem T (viz 7.6) určuje jisté zobrazení $\mathscr{A}$ vektorového prostoru V_n do téhož prostoru V_n. Toto zobrazení je definováno tak, že ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in V_n$ je přiřazen vektor

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{22}$$

Zobrazení $\mathscr{A}$ nazýváme *lineární zobrazení určené maticí* $\boldsymbol{A}$ nebo též *lineární operátor určený maticí* $\boldsymbol{A}$, stručněji: *lineární* *zobrazení*, popř. *lineární operátor*. Píšeme $\mathbf{x}' = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}'$ ($\mathbf{x}$) se nazývá *obraz* (*vzor*) vektoru $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}'$) v zobrazení $\mathscr{A}$, stručněji *$\mathscr{A}$-obraz* (*$\mathscr{A}$-vzor*).

Je zřejmé, že zobrazení $\mathscr{A}$ má tyto vlastnosti:

(a) pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_n$ je $\mathscr{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathscr{A}\mathbf{x}_1 + \mathscr{A}\mathbf{x}_2$;
(b) pro $\mathbf{x} \in V_n$, $t \in T$ je $\mathscr{A}(t\mathbf{x}) = t\mathscr{A}\mathbf{x}$.

Je-li matice $\mathbf{A}$ regulární, má každý vektor z prostoru V_n právě jeden $\mathscr{A}^{-1}$-vzor. V tomto případě je $\mathbf{A}$ tzv. *prosté* zobrazení vektorového prostoru V_n na sebe. K prostému zobrazení $\mathscr{A}$ existuje tzv. *inverzní* zobrazení $\mathscr{A}^{-1}$ vektorového prostoru V_n na sebe; je definováno tak, že ke každému vektoru $\mathbf{x} \in V_n$ je přiřazen jeho $\mathscr{A}$-vzor. Inverzní zobrazení $\mathscr{A}^{-1}$ je určeno maticí $\mathbf{A}^{-1}$, a je tedy vyjádřeno vzorcem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in V_n$).

V případě regulární matice $\mathbf{A}$ můžeme zobrazení $\mathscr{A}$ chápat takto: $\mathscr{A}^{-1}$-vzor každého vektoru $\mathbf{x}' \in V_n$ je souřadný vektor vektoru $\mathbf{x}'$ při bázi prostoru V_n, která má matici $\mathbf{A}$.

8.4. Invariantní podprostory vzhledem k lineárnímu zobrazení. Buď $\mathscr{A}$ lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe určené maticí $\mathbf{A}$. Buď $V_{m(n)}$ ($1 \leqq m \leqq n$) m-rozměrný podprostor v prostoru V_n.

Říkáme, že podprostor $V_{m(n)}$ *je vzhledem k* (neboli *při*) *zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní*, jestliže obraz $\mathscr{A}\mathbf{x}$ každého vektoru $\mathbf{x} \in V_{m(n)}$ je opět v podprostoru $V_{m(n)}$: $\mathscr{A}\mathbf{x} \in V_{m(n)}$.

Snadno se zjistí, že podprostor $V_{m(n)}$ je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní tehdy a jen tehdy, když $\mathscr{A}$-obraz každého prvku některé jeho báze leží opět v podprostoru $V_{m(n)}$. (Při důkazu toho, že tato podmínka stačí, použije se hořejších vlastností (a), (b) zobrazení $\mathscr{A}$.)

Vezměme v úvahu k ($\geqq 1$) podprostorů v prostoru V_n: $V_{m_1(n)}, \ldots, V_{m_k(n)}$, přičemž podprostor $V_{m_\alpha(n)}$ je m_α-rozměrný ($\alpha = 1, \ldots, k$) a prostor V_n je přímým součtem těchto podprostorů.

Předpokládejme, že každý podprostor $V_{m_\alpha(n)}$ je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní.

Označme (viz odst. 8.2) bázi podprostoru $V_{m_\alpha(n)}$

$$\mathbf{q}_{m_0 + \ldots + m_{\alpha-1} + 1}, \ldots, \mathbf{q}_{m_0 + \ldots + m_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, k;\ m_0 = 0),$$

takže vektory

$$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{m_0+\ldots+m_k} \quad (m_0 + \ldots + m_k = n) \tag{23}$$

tvoří bázi prostoru V_n.

Kvůli kratšímu označení v dalším píšeme $i_{\alpha-1}$ místo $m_0 + \ldots$ $\ldots + m_{\alpha-1}$.

Protože každý podprostor $V_{m_\alpha(n)}$ je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní, leží vektory

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_{i_{\alpha-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_{i_\alpha} \tag{24}$$

opět v podprostoru $V_{m_\alpha(n)}$.

Buďte

$$\boldsymbol{b}_{i_{\alpha-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{i_\alpha}$$

souřadné vektory vektorů (24) vzhledem k bázi (23) a $b_{i,i_{\alpha-1}+1}, \ldots$ $\ldots, b_{i,i_\alpha}$ jejich složky $(i = 1, \ldots, n)$. Podle 8.2 má matice $[b_{i,j}]$ $(i = 1, \ldots, n; j = i_{\alpha-1} + 1, \ldots, i_\alpha)$ tvar

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ b_{i_{\alpha-1}+1,i_{\alpha-1}+1} & \ldots & b_{i_{\alpha-1}+1,i_\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_\alpha,i_{\alpha-1}+1} & \ldots & b_{i_\alpha,i_\alpha} \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Vidíme, že matice $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n]$ vytvořená souřadnými vektory $\mathscr{A}$-obrazů vektorů (23) při bázi vytvořené těmito vektory má tvar

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{B}_k \end{bmatrix}; \tag{25}$$

přitom $\boldsymbol{B}_\alpha$ značí čtvercovou matici stupně m_α a $\boldsymbol{O}$ vždy matici nulovou vhodného typu.

Matice tvaru (25) se nazývají *blokově diagonální* a vzorec (25) se zapisuje takto: $\mathbf{B} = \operatorname{diag}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k]$.

Došli jsme k tomuto výsledku: Je-li prostor V_n přímým součtem několika podprostorů, z nichž každý je při zobrazení $\mathbf{A}$ invariantní, pak při vhodné volbě báze prostoru V_n má matice souřadných vektorů $\mathscr{A}$-obrazů prvků této báze diagonální tvar (25).

Poznámka. Je-li $\mathbf{Q}$ matice vytvořená prvky báze (23), platí mezi maticemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ vztah $\mathbf{AQ} = \mathbf{QB}$ neboli $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$.

8.5. Poznámka o abstraktních vektorových prostorech. Aritmetický n-rozměrný vektorový prostor V_n nad tělesem T je zvláštním případem tzv. abstraktního n-rozměrného vektorového prostoru nad tělesem T.

Abstraktním n-rozměrným vektorovým prostorem nad tělesem T, stručněji *n-rozměrným vektorovým prostorem*, rozumíme neprázdnou (abstraktní) množinu W_n, na níž jsou vedle pojmu rovnosti dvou prvků (ve smyslu teorie množin) definovány dvě operace označené symboly, např. $+$, $.$, s těmito vlastnostmi:

Operace $+$, zvaná *sčítání*, přiřazuje ke každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a, b \in W_n$ další prvek $c \in W_n$, který se značí $a + b$ a nazývá se *součet* prvku a s prvkem b.

Operace $.$, zvaná *skalární násobení*, přiřazuje ke každému číslu $\alpha \in T$ a každému prvku $a \in W_n$ další prvek v množině W_n, který se značí $\alpha . a$, jednodušeji αa, a nazývá se *skalární součin* čísla α s prvkem a.

Přitom platí tato pravidla:

1a) Pro každé tři prvky $a, b, c \in W_n$ je

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(asociativní zákon pro sčítání);}$$

1b) pro každé dva prvky $a, b \in W_n$ je

$$a + b = b + a \quad \text{(komutativní zákon pro sčítání);}$$

1c) existuje prvek $o \in W_n$ vyznačující se tím, že pro každý prvek $a \in W_n$ je

$$a + o = a ;$$

1d) ke každému prvku $a \in W_n$ existuje prvek $(-a) \in W_n$ takový, že

$$a + (-a) = o ;$$

2a) pro každá dvě čísla $\alpha, \beta \in T$ a každý prvek $a \in W_n$ je

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)\, a \quad \text{(asociativní zákon pro skalární násobení);}$$

2b) pro každý prvek $a \in W_n$ je

$$1 \,.\, a = a ;$$

3a) pro každé číslo $\alpha \in T$ a každé dva prvky $a, b \in W_n$ je

$$\alpha \,.\, (a + b) = \alpha \,.\, a + \alpha \,.\, b \quad \text{(první distributivní zákon);}$$

3b) pro každé dvě čísla $\alpha, \beta \in T$ a každý prvek $a \in W_n$ je

$$(\alpha + \beta) \,.\, a = \alpha \,.\, a + \beta \,.\, a \quad \text{(druhý distributivní zákon);}$$

4) existuje $n\,(\geqq 1)$ prvků $a_1, \ldots, a_n \in W_n$ vyznačujících se tím, že každý prvek $a \in W_n$ je určen jedinou n-ticí čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ ve tvaru

$$a = \alpha_1 \,.\, a_1 + \ldots + \alpha_n \,.\, a_n ,$$

a zvláště prvek o n-ticí $0, \ldots, 0$.

Prvky vektorového prostoru W_n se nazývají *vektory*. Vektory o a $(-a)$, jejichž existence se požaduje podle 1c, a 1d, se nazývají vektor *nulový* a vektor *opačný* (neboli *záporný*) *k vektoru* a. Uspořádaná skupina prvků $a_1, \ldots, a_n \in W_n$ s vlastností 4 se nazývá *báze* prostoru W_n; číslo n se nazývá *rozměr* neboli *dimenze* prostoru W_n.

Vraťme se k pojmu aritmetického vektorového n-rozměrného prostoru V_n nad tělesem T. Význam těchto prostorů pro teorii abstraktních vektorových prostorů W_n nad tělesem T je dán tím, že prostor W_n je izomorfní s prostorem V_n. To znamená: Existuje prosté zobrazení $\mathscr{I}$ prostoru W_n na prostor V_n, tzv. *izomorfismus*, charakterizované obdobnými vlastnostmi, jako jsou (a) a (b) v odst. 8.3.: Pro libovolné vektory a, $b \in W_n$ a libovolné číslo $\alpha \in T$ je (a) $\mathscr{I}(a + b) = \mathscr{I}a + \mathscr{I}b$; (b) $\mathscr{I}(\alpha \, . \, a) = \alpha \, . \, \mathscr{I}a$. Zobrazení $\mathscr{I}$ se definuje tak, že se každý prvek $a = \alpha_1 \, . \, a_1 + \ldots + \alpha_n \, . \, a_n \in W_n$ zobrazí na aritmetický vektor o souřadnicích $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; přitom ovšem $a_1, \ldots, a_n$ značí bázi prostoru W_n.

O vektorových prostorech najde čtenář podrobnější poučení např. v knize E. Čech: Základy analytické geometrie. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1951.